PRIMER PARCIAL ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA – UTN – FRH

Ejercicio 1. Sean el plano π y las rectas s y q definidos por

$$\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad s: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases} \qquad q: \frac{x-3}{h} = \frac{2-y}{2} = \frac{z+m}{-2}$$

1.a) ¿Existen valores reales h y m para los que la recta q esté a una distancia $2\sqrt{14}$ del plano π? Justificar la respuesta. En caso afirmativo dar todas las soluciones posibles.

1.b) Hallar la ecuación de una recta r contenida en π, que pase por el punto $A(2,1,-1)$ y que sea perpendicular a s.

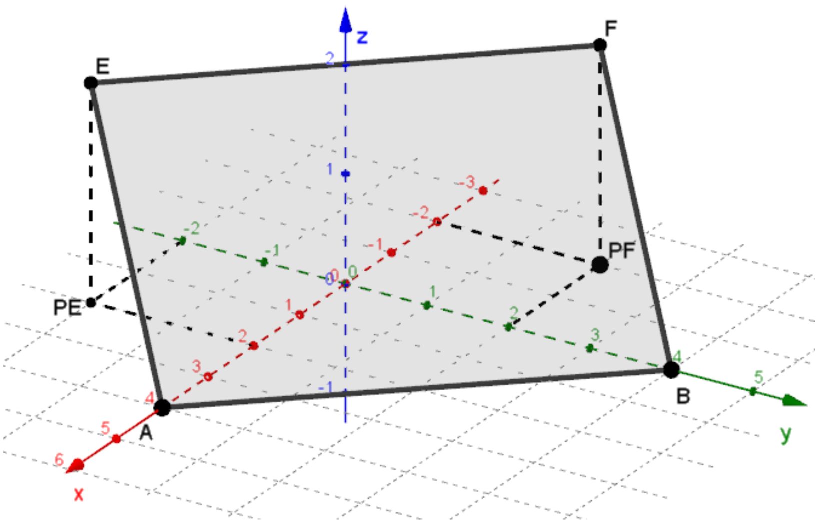
Ejercicio 2. En la figura se observa una placa rectangular de vértices A, B, E y F. Los puntos PE y PF son, respectivamente, las proyecciones de los vértices E y F sobre el plano coordenado xy.

2.a) Sea el punto C el centro de la placa. Dar sus coordenadas. Indicar el planteo de la resolución.

2.b) ¿Existe un plano β paralelo a la placa que contenga completamente al segmento que une PE con PF? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, hallar la ecuación general de β e indicar si dicho plano es único.

2.c) Hallar todos los puntos del eje x cuya distancia a la recta que une E con F sea $\sqrt{22}$. Dar todas las soluciones posibles.

2.d) Hallar el volumen del cuerpo de vértices A, B, E, F, PE y PF.

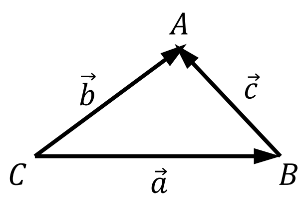


Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, dar un contraejemplo o una explicación clara.

3.a) Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ versores de $\mathbf{R}^3$ tales que $\vec{w} \perp \vec{v}$ y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{u}$ es $\frac{\pi}{3}$, entonces $2[(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}] = \vec{v}$.

3.b) Sea el triángulo ABC de la figura. Se verifica que:

$$proy_{\vec{a}}\vec{b} + proy_{\vec{a}}\vec{c} = \overrightarrow{CB}.$$



PRIMER PARCIAL ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA – UTN – FRH

Ejercicio 1. Sea un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal ubicado de forma que el suelo es el plano xy. Las distancias se miden en metros. La columna de una antena de 5 metros de altura está colocada sobre el eje z con su base apoyada en el piso y centrada con respecto al origen de coordenadas. Está sostenida por tres tensores (cables de acero) que parten del extremo superior de la columna de la antena y se dirigen a los puntos de anclaje ubicados en

$$A(-5,-5,0), B(m,5,0) \text{ y } C(t,-5,0).$$

¿Es posible encontrar valores reales de m y t para que los tensores sean mutuamente perpendiculares? Justificar la respuesta. En caso afirmativo calcular dichos valores.

Ejercicio 2. Sea el plano $\pi: x + 2y - 3z - 4 = 0$.
2.a) Dar la ecuación vectorial paramétrica de π.
2.b) Hallar todos los puntos Q de $\mathbf{R}^3$ tales que su vector posición $\overrightarrow{OQ}$ sea un versor contenido en el plano xy y que además resulte paralelo al plano π.

Ejercicio 3. Se conoce la recta $s: (x,y,z) = (4,3,2) + \lambda(1,2,-2)\ \lambda \in \mathbf{R}$. Hallar una recta r perpendicular y alabeada con s, tal que la distancia entre ambas rectas sea $\sqrt{8}$.

Ejercicio 4. Sean $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores no nulos de $\mathbf{R}^3$ tales que:

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 3\vec{b} + 2\vec{c}$
- $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$
- El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\pi/3$

4.a) Calcular $|\vec{c}|$.
4.b) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
4.c) El área del triángulo dos de cuyos lados son los vectores $3\vec{a}$ y $\vec{c}$.

Ejercicio 5. Analizar si la siguientes proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, dar un contraejemplo o una explicación clara.

$\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{0}\}$ tales que $\vec{a} \perp \vec{b}$, se verifica que:

$$proy_{\vec{b}}(-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} \times 3\vec{b}) = \vec{b}.$$

===

Ejercicio 1. Sean el punto $T(0,1,-6)$, la recta r y el plano π definidos por:

$$r: (x,y,z) = (-2,1,-5) + \lambda(-3,0,4)\ \forall\lambda \in \mathbf{R};\quad \pi: -z + 4 = 0.$$

a) Hallar todos los puntos Q de r tales que la distancia de Q a π sea el triple de la distancia que hay de T a r.
b) Sea A la proyección del punto $W(h,2,8)$ sobre π. Hallar $h \in \mathbf{R}$ tal que A forme junto con el origen de coordenadas y $B(1,1,0)$ un triángulo de área 3. Dar todas las respuestas posibles.
c) Escribir la ecuación vectorial paramétrica de $s: \begin{cases} mx - z = 3 \\ y = 5 \end{cases}$. ¿Existe, $m \in \mathbf{R}$ para que r y s resulten paralelas? Justificar la respuesta. En caso de existir, ¿r y s son coincidentes? Si no lo son, dar la ecuación vectorial paramétrica y la ecuación general del plano β que las contiene.

Ejercicio 2. Analizar si la siguiente proposición es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa dar un contraejemplo o una explicación clara.

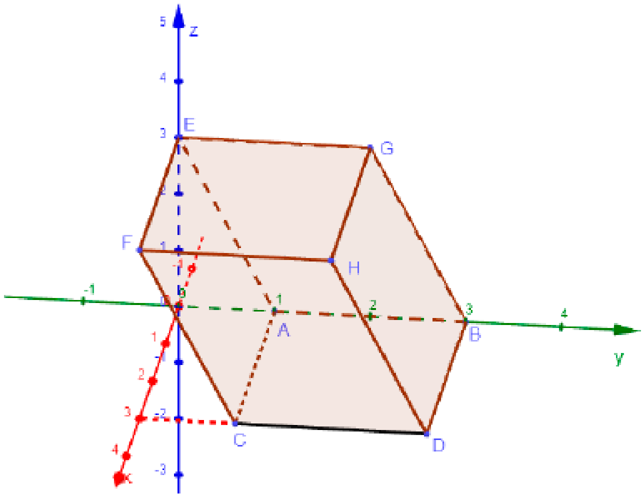
Sean los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$ tales que $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces:

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{u} + |\vec{u}|^2\, \vec{v} = -\vec{u} \times \vec{v}.$$

===

Ejercicio 1:

Dado el paralelepípedo ABCDFGH que muestra la figura:



a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la cara FCDH.

b) Hallar la distancia entre las rectas que contienen a los puntos CD y la recta que contiene a los puntos EF.

c) Calcular el volumen del paralelepípedo.

d) Hallar todos los puntos del eje x, que se encuentran a una distancia de 3 unidades de la recta determinada por los puntos C y D.

Ejercicio 2:

Sean las rectas $r: -x = \frac{y}{4} = \frac{z-a}{3}$ y $s: \begin{cases} 2x - z = 5 \\ -x + y + z = -7 \end{cases}$

a) Analizar los distintos valores de $a \in R$, para los cuales las rectas resultan coplanares.

b) Para $a = -\frac{5}{3}$, indicar si las rectas son secantes o pararelas. En caso de que sean secantes, hallar el punto intersección y en caso de ser paralelas, la distancia entre ellas.

c) Hallar el valor de a para que el $punto\ P(-2,8,0)$ sea el punto de intersección de la recta r con el plano $\pi: -2x + y - 2z - 12 = 0$.

Ejercicio 3:

Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa, justificando en cada caso la respuesta.

a) Sabiendo que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $\in R^3$ y que el vector $\vec{a}$ es perpendicular con el vector $\vec{b}$ entonces: $(\vec{a}\ x\ \vec{b})x\ \vec{c} - \vec{a}\ x\ (\vec{b}\ x\ \vec{c})$ da como resultado un vector paralelo a $\vec{a}$.

b) $\vec{a} \in R^3, \vec{b} \in R^3$ vectores no nulo tales que $\vec{a} \perp (\vec{b} - 3\vec{a})$ y $|\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{b}| = 3$ entonces $proy_{\vec{a}}\vec{b} = -\vec{a}$