EQUIVALENCIA Y EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS DE FUERZAS

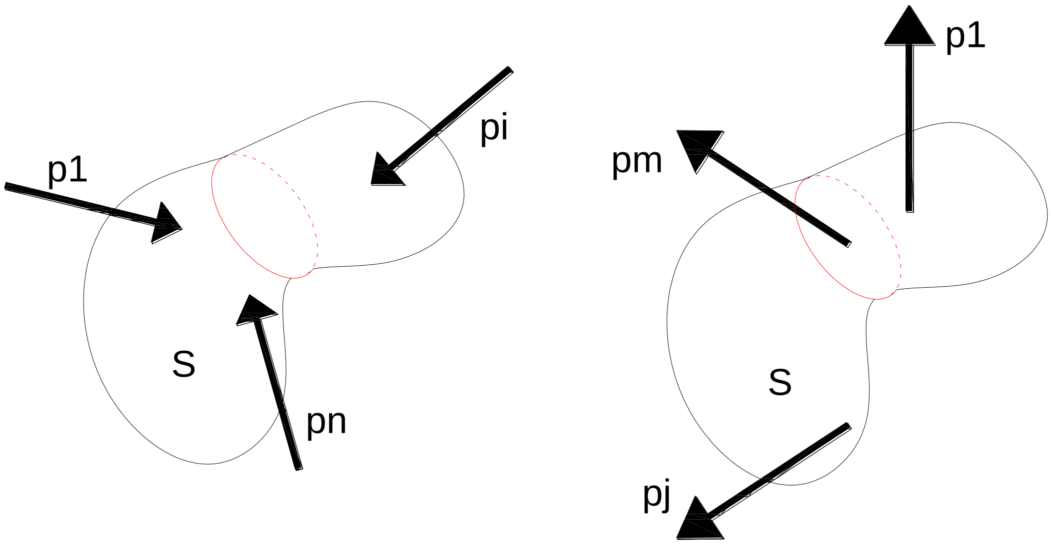
Equivalencia de dos o más sistemas de fuerzas

Dos o más sistemas son equivalentes cuando actuando en forma independiente sobre un cuerpo, producen el mismo efecto mecánico.

Sean por ejemplo, dos sistemas de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ y $\overrightarrow{p_j}$, de la figura n º 1, cuyas resultantes de reducción y momentos de reducción a un punto **CR** del espacio, son respectivamente, $\overrightarrow{R_{R-i}}; \overrightarrow{M^{CR}_{R-i}}$ y $\overrightarrow{R_{R-j}}; \overrightarrow{M^{CR}_{R-j}}$, la condición de equivalencia es,

$$(1)\begin{cases} \overrightarrow{R_{R-i}} = \overrightarrow{R_{R-j}} \\ \overrightarrow{M^{CR}_{R-i}} = \overrightarrow{M^{CR}_{R-j}} \end{cases}$$

figura n º 1



sistema pi

sistema pj

En el caso de que actúen en forma independiente un número l de sistemas, la condición de equivalencia es,

$$(2)\begin{cases} \overrightarrow{R_{R-i}} = \overrightarrow{R_{R-j}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overrightarrow{R_{R-l}} \\ \overrightarrow{M^{CR}_{R-i}} = \overrightarrow{M^{CR}_{R-j}} = \ldots\ldots\ldots = \overrightarrow{M^{CR}_{R-l}} \end{cases}$$

Equilibrio de un sistema de fuerzas

Un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo, se dice que está en equilibrio cuando no produce efecto mecánico alguno, es decir, no altera su ley de movimiento. La condición de equilibrio que surge de la reducción de un sistema de fuerzas a un punto **CR**, es,

$$(3)\quad \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}} = \overrightarrow{M^{CR}_{R}}$$

SISTEMAS DE FUERZAS

Denominaremos sistemas de fuerzas a un conjunto de fuerzas actuando sobre un cuerpo. Los sistemas de fuerzas pueden ser:

* a) Espaciales;

* b) Planos;

Dentro de los sistemas de fuerzas espaciales y planos, tenemos,

* 1) Sistema general de fuerzas;

* 2) Fuerzas paralelas;

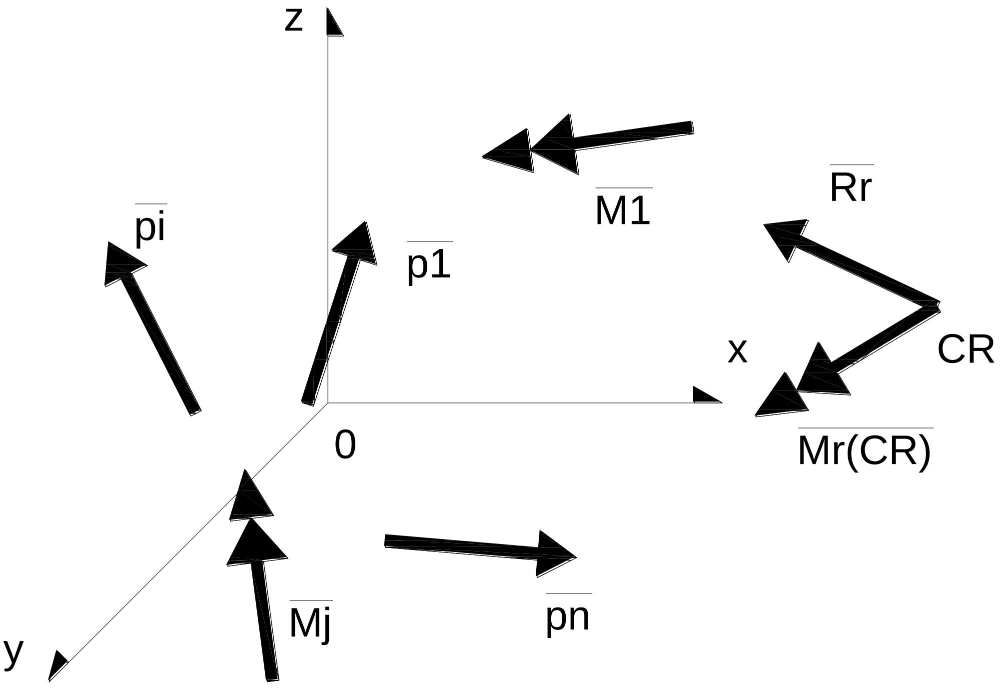
* 3) Fuerzas concurrentes

CONDICIONES DE EQUIVALENCIA Y EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS EN EL ESPACIO

1) Sistema general de fuerzas.

Sea el sistema mostrado en la figura n º 2, que reducimos al punto CR.

figura n º 2



De la reducción al punto **CR**, siendo A_i puntos de las rectas de acción de las fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ las condiciones de equivalencia son,

$$
(4)\begin{cases}
\sum \mathrm{Pr}oy_{xx} = R_{Rx} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_i = R_{Rx} \\
\sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = R_{Ry} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i = R_{Ry} \\
\sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = R_{Rz} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = R_{Rz} \\
\sum Mom_{xx} = M_{Rx}^{CR} \rightarrow \\
M_{Rx}^{CR} = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\beta_i\left(z_{CR}-z_{Ai}\right)-p_i.\cos\gamma_i\left(y_{CR}-y_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\alpha_{Mi} \\
\sum Mom_{yy} = M_{Ry}^{CR} \rightarrow \\
M_{Ry}^{CR} = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\gamma_i\left(x_{CR}-x_{Ai}\right)-p_i.\cos\alpha_i\left(z_{CR}-z_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\beta_{Mi} \\
\sum Mom_{zz} = M_{Rz}^{CR} \rightarrow \\
M_{Rz}^{CR} = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\alpha_i\left(y_{CR}-y_{Ai}\right)-p_i.\cos\beta_i\left(x_{CR}-x_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\gamma_{Mi}
\end{cases}
$$

En cuanto a las condiciones de equilibrio son,

$$
(5)\begin{cases}
\sum \mathrm{Pr}oy_{xx} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_i = 0 \\
\sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i = 0 \\
\sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = 0 \\
\sum Mom_{xx} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\beta_i\left(z_{CR}-z_{Ai}\right)-p_i.\cos\gamma_i\left(y_{CR}-y_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\alpha_{Mi} \\
\sum Mom_{yy} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\gamma_i\left(x_{CR}-x_{Ai}\right)-p_i.\cos\alpha_i\left(z_{CR}-z_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\beta_{Mi} \\
\sum Mom_{zz} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\alpha_i\left(y_{CR}-y_{Ai}\right)-p_i.\cos\beta_i\left(x_{CR}-x_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\gamma_{Mi}
\end{cases}
$$

2 º) Sistema de fuerzas paralelas

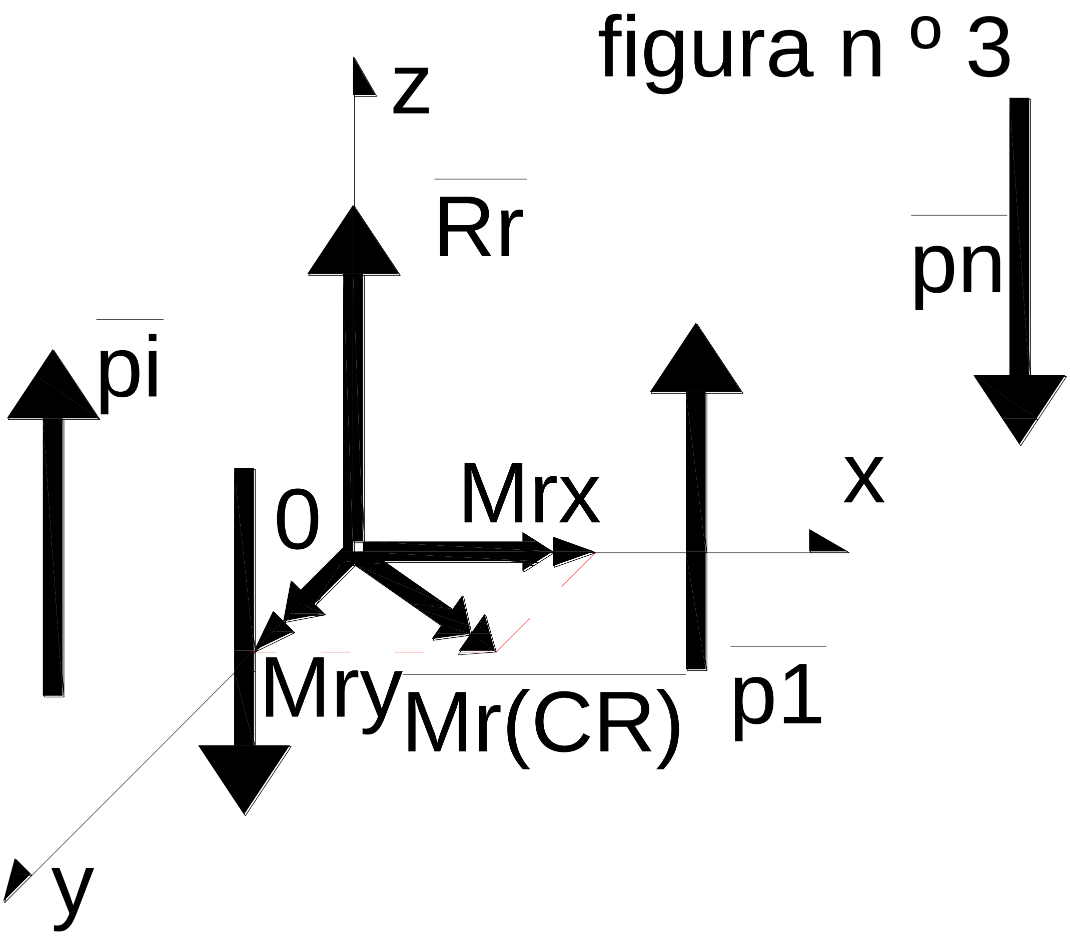
Cuando las fuerzas componentes de sistema, tienen igual dirección y distinta recta de acción, se tiene un sistema de fuerzas paralelas.

La resultante de reducción de un sistema de fuerzas paralelas debe tener igual dirección que las fuerzas del sistema.

El momento de reducción es normal a la resultante de reducción, cuyo vector representativo, se encuentra, en consecuencia, en el plano normal a esta.

De aquí, que el invariante escalar es nulo

Sea el sistema de fuerzas paralelas de la figura n º 3.



Condiciones de equivalencia

$$(6)\begin{cases}\sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = R_R \rightarrow \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{\mathrm{p}_{\mathrm{i}}} = \overrightarrow{R_R} \\ \sum Mom_{xx} = M_{Rx} \rightarrow M_{Rx} = -\sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_{\mathrm{i}} \left(y_{CR} - y_{Ai} \right) \\ \sum Mom_{yy} = M_{Ry} \rightarrow M_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_{\mathrm{i}} \left(x_{CR} - x_{Ai} \right)\end{cases}$$

En cuanto a las condiciones de equilibrio,

$$(6)\begin{cases}\sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 \;\rightarrow\; \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{\mathrm{p}}_{\mathrm{i}} = 0 \\ \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow\; 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos\gamma_{\mathrm{i}} \left(y_{CR} - y_{Ai}\right) \\ \sum Mom_{yy} = 0 \;\rightarrow\; 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos\gamma_{\mathrm{i}} \left(x_{CR} - x_{Ai}\right)\end{cases}$$

Pues, si planteamos las ecuaciones $\sum \mathrm{Pr}oy_{xx} = 0; \sum \mathrm{Proy}_{\mathrm{yy}} = 0\,; \sum \mathrm{Mom}_{\mathrm{zz}} = 0$ resultan idénticamente nulas, como es de esperarse.

3 º) Sistema de fuerzas concurrentes.

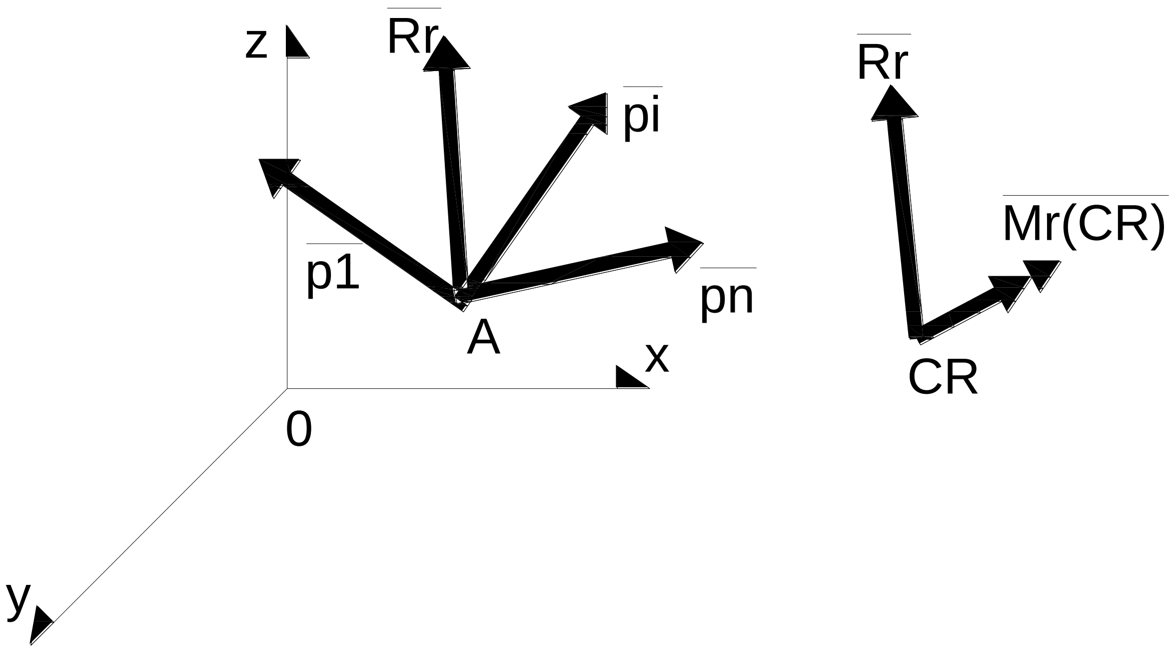
Cuando las rectas de acción de las fuerzas componentes del sistema comparten todas un punto en común, entonces tenemos un sistema de fuerzas concurrentes.

La resultante de reducción de un sistema de fuerzas concurrentes, es una fuerza cuyo vector representativo comparte el mismo punto de concurrencia de las vectores de las fuerzas componentes del sistema.

En consecuencia, el momento de reducción de las fuerzas respecto del punto de concurrencia de las mismas es nulo.

Consideramos la figura n º 4 para la identificación del ítem.

figura n º 4



Condiciones de equivalencia

$$(7)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{xx} = R_{Rx} \rightarrow R_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \alpha_i \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = R_{Ry} \rightarrow R_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \beta_i \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = R_{Rz} \rightarrow R_{Rz} = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_i \end{cases}$$

Las condiciones de equilibrio son,

$$(8)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{xx} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \alpha_i \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \beta_i \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_i \end{cases}$$

CONDICIONES DE EQUIVALENCIA Y EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS EN EL PLANO

1 º) Sistema general de fuerzas

En la reducción de los sistemas planos a un punto **CR**,

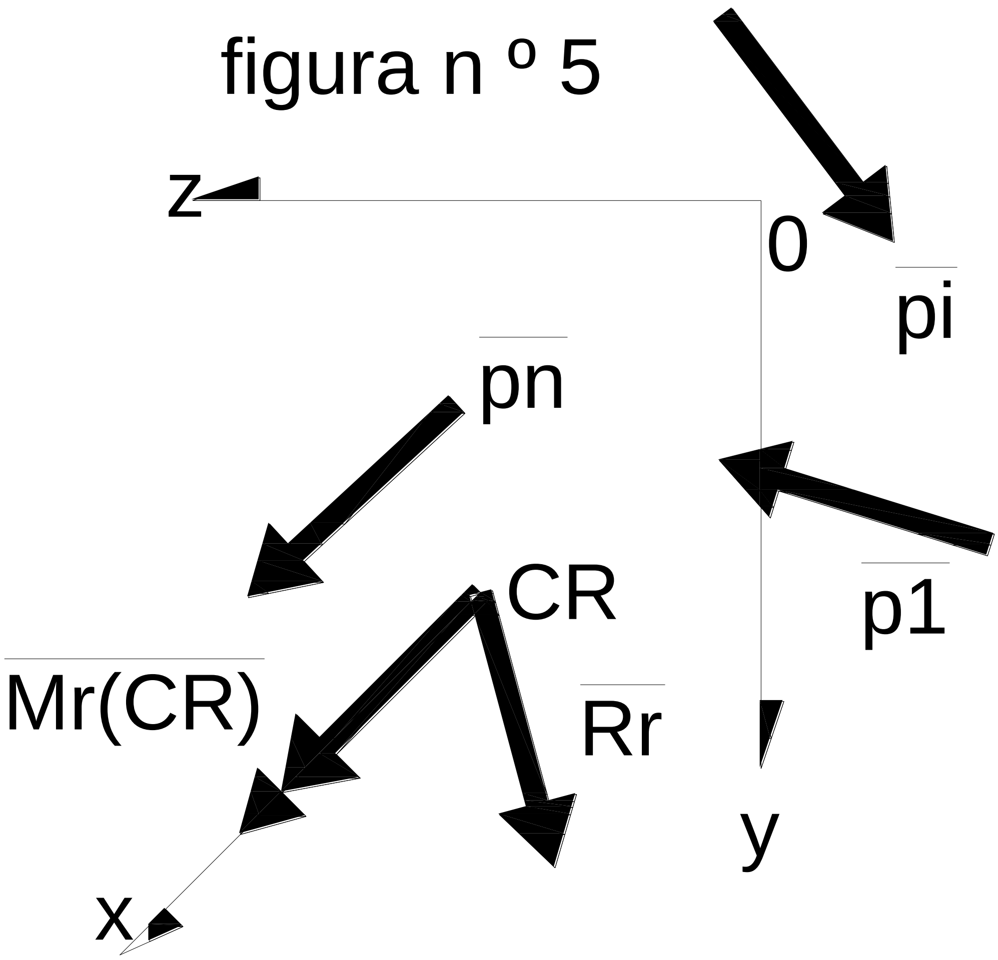
* 1) La resultante de reducción pertenece obviamente al plano del sistema de fuerzas,

* 2) El vector representativo del momento de reducción es normal al plano del sistema de fuerzas, y de su resultante, formando ambos vectores ángulo recto;

* 3) El invariante escalar en todo sistema plano es nulo

En la figura n º 5, se representa un sistema de fuerzas cualesquiera en el plano para su análisis.

figura n º 5



Las condiciones de equivalencia son:

$$(9)\begin{cases} \sum \Pr oy_{zz} = R_{Rz} \rightarrow R_{Rz} = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_i \\ \sum \Pr oy_{yy} = R_{Ry} \rightarrow R_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \beta_i \\ \sum Mom_{CR} = \overrightarrow{M_R^{CR}} \end{cases}$$

Mientras que las condiciones de equilibrio son,

$$(9)\begin{cases} \sum \Pr oy_{zz} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_i \\ \sum \Pr oy_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \beta_i \\ \sum Mom_{CR} = \vec{0} \end{cases}$$

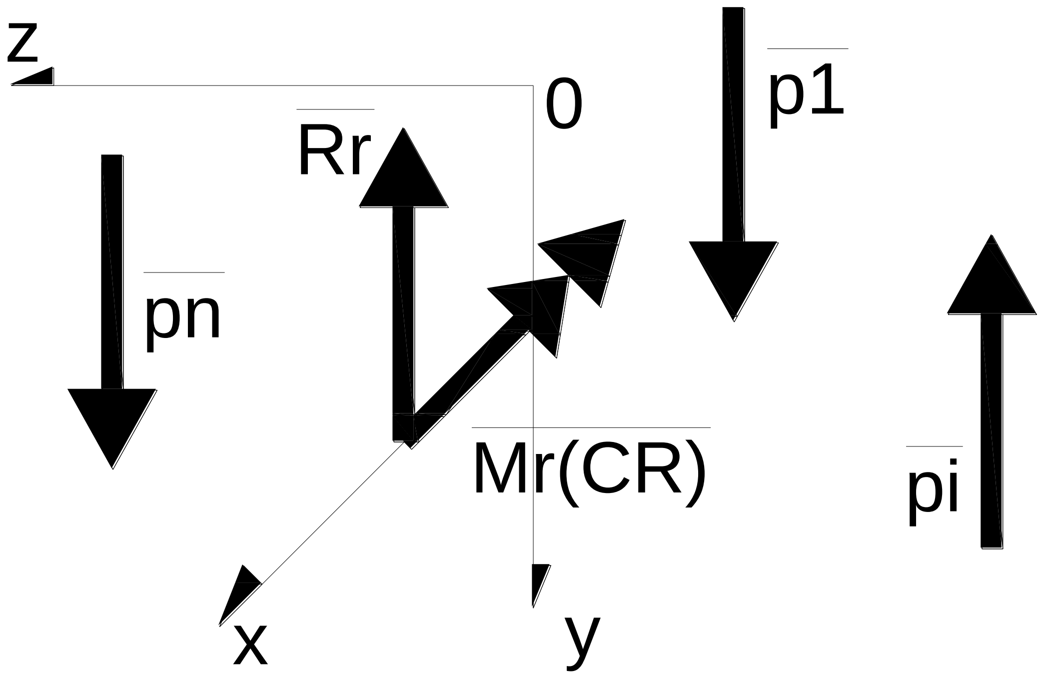
2 º) Fuerzas paralelas

* 1) La resultante de reducción de un sistema de fuerzas paralelas en el plano, es otra fuerza cuyo vector representativo es de la misma dirección que los vectores representativos de las fuerzas del sistema.

* 2 º) El vector representativo del momento de reducción es normal al plano de la resultante de reducción, por consiguiente, el invariante escalar es nulo.

En la figura n º 6, se representa un sistema de fuerzas paralelas para su análisis.

figura n º 6



Las condiciones de equivalencia son:

$$(10)\begin{cases}\sum \Pr oy_{yy} = R_{Ry} \rightarrow R_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i} . \cos \beta_{\mathrm{i}} \quad \text{siendo los ángulos } \beta_{\mathrm{i}} = 0 \text{ o } \beta_{\mathrm{i}} = \pi \\ \sum Mom_{CR} = \overrightarrow{M_{R}^{CR}}\end{cases}$$

Condiciones de equilibrio,

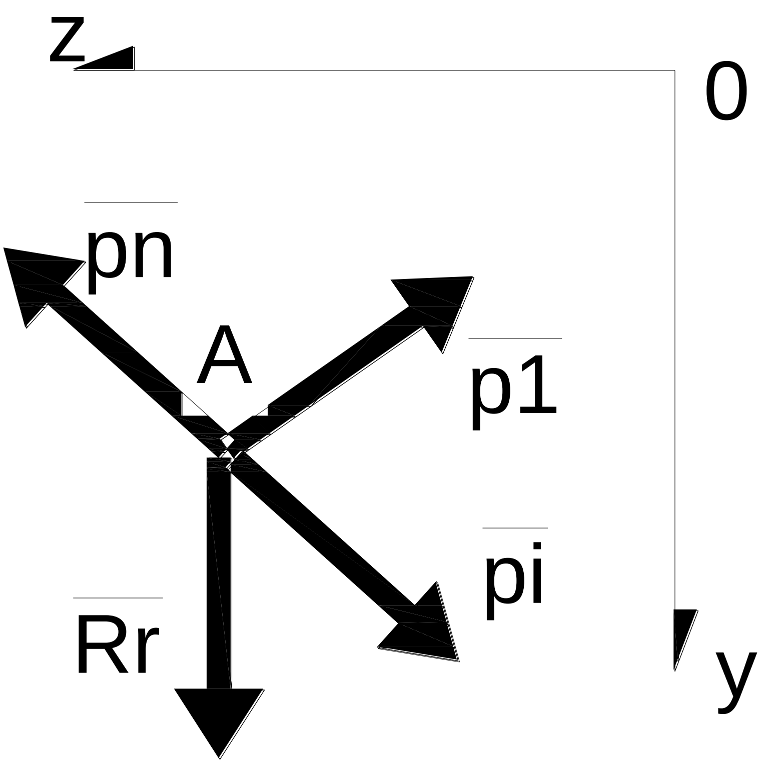
$$(11)\begin{cases}\sum \Pr oy_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i} . \cos \beta_{\mathrm{i}} \quad \text{siendo los ángulos } \beta_{\mathrm{i}} = 0 \text{ o } \beta_{\mathrm{i}} = \pi \\ \sum Mom_{CR} = 0\end{cases}$$

3 º) Fuerzas concurrentes

* 1) La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en el plano, es otra fuerza que comparte el punto de concurrencia de las fuerzas del sistema, cuyo vector representativo se obtiene de la suma vectorial de los vectores representativos de las fuerzas del sistema.

En la figura n º 7, graficamos este sistema para su análisis

figura n º 7



Las condiciones de equivalencia son,

$$(12)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = R_{Rz} \;\rightarrow R_{Rz} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i}.\cos\gamma_{\mathrm{i}} \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = R_{Ry} \;\rightarrow R_{Ry} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i}.\cos\beta_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

Condiciones de equilibrio,

$$(13)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 \;\rightarrow 0 = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i}.\cos\gamma_{\mathrm{i}} \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \;\rightarrow 0 = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i}.\cos\beta_{\mathrm{i}} \end{cases}$$