Guía de Ejercitación 6. Estimación de parámetros poblacionales

Ejercicio 1. El artículo "Effects of Aggregates and Microfillers on the Flexural Properties of Concrete" (*Magazine of Concrete Research*, 1997, pp. 81-98) reseña un estudio de las propiedades de resistencia del concreto de alta resistencia obtenido usando superplastificantes y ciertos aglutinantes. La resistencia a la compresión de ese concreto se había investigado con anterioridad, pero no se conocía mucho acerca de la resistencia a la fricción (medida de la capacidad de resistencia a la falla por flexión). Los datos siguientes sobre resistencia a la presión, X, están en megapascales, MPa, y aparecieron en el artículo citado:

5,9	7,2	7,3	6,3	8,1	6,8	7,0	7,6	6,8	6,5	7,0	6,3	7,9	9,0
8,2	8,7	7,8	9,7	7,4	7,7	9,7	7,8	7,7	11,6	11,3	11,8	10,7	

Calcular un estimado puntual de las siguientes magnitudes e indicar en cada caso qué estimador se utilizó:

a) Valor medio de resistencia a la presión para la población de todas las vigas fabricadas de esta forma, μ.

b) Valor de la resistencia que separa al 50% más débil de las vigas del 50% más fuerte.

c) Desvío típico estándar poblacional σ.

d) Proporción de las vigas cuya resistencia a la flexión es mayor que 10 MPa (Sugerencia: imaginar que una observación es un "éxito" si es mayor a 10).

e) Obtener la expresión del error estándar del estimador usado en el ítem **a)** y calcular el error estándar estimado de dicho estimador.

Definición. El **error estándar de un estimador** $\hat{\theta}$ es su desvío estándar $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})}$. Si en el error estándar intervienen parámetros desconocidos, cuyos valores se pueden estimar, la sustitución de estas estimaciones en $\sigma_{\hat{\theta}}$ produce el **error estándar estimado** (desviación estándar estimada) del estimador. El error estándar estimado se puede representar ya sea por $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ (el ^ resalta el hecho de que $\sigma_{\hat{\theta}}$ se está estimando) o por $s_{\hat{\theta}}$.

Ejercicio 2. Dos economistas estiman μ (el gasto promedio de las familias en una región determinada), con dos estimadores insesgados y estadísticamente independientes, $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$. El segundo economista es menos cuidadoso que el primero, resultando que la desviación estándar de $\hat{\mu}_2$ es el triple de la desviación estándar de $\hat{\mu}_1$. Cuando se pregunta cómo combinar $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ para obtener un estimador global publicable, se hacen tres propuestas:

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}_2 \text{ (promedio simple); } \hat{\mu}_4 = \frac{3}{4}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{4}\hat{\mu}_2 \text{ (promedio ponderado);}$$

$$\hat{\mu}_5 = 1\cdot\hat{\mu}_1 + 0\cdot\hat{\mu}_2 \text{ (se descarta el estimador menos exacto)}$$

a) ¿Cuáles están insesgadas?

b) ¿Cuál es el mejor estimador? Justificar la respuesta con el cálculo adecuado.

c) Proponer un mejor resultado de la forma $\hat{\mu}_6 = a\cdot\hat{\mu}_1 + b\cdot\hat{\mu}_2$ (insesgado y de varianza mínima).

Ejercicio 3. El valor esperado de crecimiento μ de un tipo de planta, durante un período de 1 año, es idéntico al de un segundo tipo, pero la varianza de crecimiento para el primer tipo es σ^2, mientras que para el segundo tipo es $4\sigma^2$. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ las n observaciones independientes de crecimiento en la primer tipo –entonces $E[X]=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$–, y sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ las m observaciones independientes de crecimiento en el segundo tipo –entonces $E[Y]=\mu$ y $V(Y)=4\sigma^2$.

a) Demostrar que para cualquier δ entre 0 y 1, el estimador $\hat{\mu} = \delta\overline{X} + (1-\delta)\overline{Y}$ es insesgado para μ.

b) Para n y m fijos, calcular $V(\hat{\mu})$ y encontrar el valor de δ que reduzca dicha varianza al mínimo. Sugerencia: derivar $V(\hat{\mu})$ con respecto a δ.

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p.

a) Demostrar que la proporción muestral $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ es un estimador insesgado de p.

b) Demostrar que el error estándar es $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, y que nunca supera el valor $\sqrt{\dfrac{1}{4n}}$.

c) Un fabricante de automóviles ha desarrollado un nuevo tipo de defensas, las cuales absorben impactos con menos averías que las defensas anteriores. El fabricante ha utilizado esta defensa en una secuencia de 25 choques controlados contra un muro, cada uno a 16 kilómetros por hora, usando uno de sus modelos compactos. Sea X el número de choques que resultan sin daño visible al automóvil, y el valor observado x=15. Estimar la proporción p de todos los choques que resultan sin daño, equivalente a p=P(sin daño en un solo choque), y calcular el error estimado $\hat{\sigma}_{\hat{p}}$.

Ejercicio 5. Intervalo de confianza para μ de una población normal con σ conocido. La duración de una pieza de un equipo es una variable aleatoria con distribución normal de desvío estándar, σ, de 4 horas y una media poblacional, μ, que se quiere estimar. Una muestra de 100 piezas que fueron probadas produjo una media muestral de 501,2 horas. Obtener un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza de:

a) 0,95 (95 % de confianza); **b)** 0,99 (99 % de confianza).

Ejercicio 6. Una máquina llenadora de latas de café dosifica cantidades variables con distribución normal de desvío estándar 15 gramos. A intervalos regulares se toman muestras de 10 envases con el fin de estimar la dosificación media μ. Una de estas muestras arrojó una media muestral de 246 gramos.

a) Calcular los límites de confianza para la dosificación media con un 10% de riesgo (nivel de confianza 0,90).

b) ¿Cuántos envases más habría que pesar para poder obtener una estimación cuyo **error de muestreo** fuera 5 gramos?

Ejercicio 7. Nivel de confianza, precisión y selección del tamaño muestral. Se sabe que determinaciones hechas sobre la densidad de cierto producto químico se distribuyen normalmente alrededor de la media poblacional desconocida con un desvío estándar de 0,005g/cm^3. Se desea estimar la densidad media con un intervalo de confianza del 95% y con un error de muestreo menor que 0,002 g/cm^3, ¿cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra? Observación: el error se corresponde con la amplitud del intervalo o, lo que es equivalente, a la semilongitud del mismo.

Ejercicio 8. Sea n el tamaño de una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con distribución normal, de desvío estándar conocido σ, correspondiente a un intervalo de confianza para la media poblacional μ con una confianza de $(1-\alpha)100\%$, cuya amplitud es ε. ¿Cuánto y cómo se debe modificar n para reducir a la cuarta parte la amplitud del intervalo de confianza anterior manteniendo el mismo nivel de confianza? Justificar la respuesta.

Ejercicio 9. Intervalo de confianza para μ de una población normal con σ desconocido. Para estimar el tiempo medio que lleva ensamblar cierto componente de una computadora, el supervisor de una empresa electrónica tomó el tiempo que 10 técnicos tardaban en ejecutar esta tarea, obteniendo los resultados (en minutos) que se presentan en la siguiente tabla. Se considera que el tiempo de ensamble del componente es una variable aleatoria normal.

12,5	12,0	13,0	12,0	12,8	12,5	13,0	13,0	12,6	12,5

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza del 98% para el tiempo medio poblacional que lleva ensamblar el componente de la computadora?
b) ¿Cuál es la cota de error en la estimación de dicho tiempo medio con la media de la muestra y con una confianza del 99%?

Ejercicio 10. El artículo "Measuring and Understanding the Aging of Kraft Insulating Paper in Power Tansformers" (*IEEE Electrical Insul. Mag.*, 1996, pp. 276-286) contiene las siguientes observaciones sobre el grado de polimerización en muestras de papel donde la viscosidad multiplicada por la concentración cae entre determinados límites intermedio.

418	421	421	422	425	427	431	434	437
439	446	447	448	453	454	463	465	

Se supone que los datos provienen de una población normal. Calcular un intervalo de confianza de nivel 0,95 para el grado de polimerización promedio poblacional, como lo hicieron los autores del artículo. ¿Parece indicar ese intervalo que 440 es un valor factible del grado promedio real de polimerización? ¿Y 450?

Ejercicio 11. En una revista, un artículo informa que se usó una muestra de tamaño 5 como base para calcular un intervalo de confianza de 95% para la frecuencia natural promedio real, en Hertz, de vigas deslaminadas de cierto tipo. La variable aleatoria cuyo valor medio se estima se supone que tiene una distribución normal. El intervalo resultante fue (229,764; 233,504). Si se difiere con los autores y se considera que es mejor trabajar con un nivel de confianza de 0,99 en vez del 0,95 que se usó en el artículo, ¿cuáles son los límites del intervalo de confianza de 99%? Sugerencia: usar el centro del intervalo publicado y su amplitud para determinar $\bar{x}$ y s.

Ejercicio 12. Intervalos de confianza para μ en muestras grandes.
a) La media y la dispersión muestrales de la carga máxima soportada por un cable en una muestra de 60 cables son 11,09 ton y 0,73 ton respectivamente. Hallar los límites de confianza del 95 % para la carga máxima media μ.
b) El artículo "Extravisual Damage Detection? Defining the Standar Normal Tree" (*Photogrammametric Engr. and Remote Sensing*, 1981, pp. 518-522) analiza el uso de fotografía infrarroja en color para la identificación de árboles normales en bosques de pinos de Oregon (abeto Douglas). Entre los datos reportados se presentan resúmenes de estadísticos para medidas densitométricas ópticas analítica de filtro verde en muestras de árboles sanos y enfermos. Para un muestra de 69 árboles sanos, el promedio muestral de densidad de capa de tinte fue 1,028, y el desvío estándar muestral 0,163.
   i. Calcular un intervalo de confianza de 95% para el verdadero promedio de densidad de capa de tinte μ para todos estos árboles.
   ii. Los investigadores han hecho una estimación de 0,16 para el valor de s antes de reunir los datos. ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para obtener una amplitud de 0,025 para el intervalo de confianza manteniendo el nivel de confianza en 0,95?

Ejercicio 13.
a) El voltaje de ruptura de corriente alterna en un líquido aislador es indicativo de la llamada resistencia dieléctrica. El artículo "Testing Practices for the AC Breackdown Voltage Testing of Insulation Liquids" (*IEEE Electrical Insulation Magazine*, 1995, pp. 21-26) presenta la siguiente muestra de observaciones de voltaje de ruptura (en kilovolt) de un circuito en particular, bajo ciertas condiciones.

62	50	53	57	41	53	55	61	59	64	50	53	64	62	50	68
54	55	57	50	55	50	56	55	46	55	53	54	52	47	47	55
57	48	63	57	57	55	53	59	53	52	50	55	60	50	56	58

Hallar un intervalo de confianza para μ, media poblacional del voltaje de ruptura, de nivel de confianza 0,99.

b) En la siguiente tabla se presentan los datos contenidos de silicio en una muestra de 150 coladas de hierro

Contenido de sílice	Cantidad de coladas
0,333 – 0,433	4
0,433 – 0,533	12
0,533 – 0,633	19
0,633 – 0,733	28
0,733 – 0,833	48
0,833 – 0,933	25
0,933 – 1,033	14

Estimar un intervalo de confianza del 95% para el contenido medio de sílice por colada.

Ejercicio 14. Intervalo de confianza para la varianza de una población normal. La longitud de los cables de acero fabricados por una máquina se distribuye según una ley normal. Se desea estimar la varianza de la longitud de dichos cables. A tal fin, un operario toma una muestra de 12 cables obteniendo las siguientes longitudes (en metros):

9,2 9,7 9,8 10,2 10,4 10,0 9,4 9,5 9,5 10,3 9,9 9,7

¿Cuál es el intervalo de confianza del 95 % para la varianza de la longitud de los cables?

Ejercicio 15. Se usa una cizalla para cortar metal y la variabilidad natural de la máquina hace que la longitud de una pieza cortada sea una variable aleatoria normal con media y varianza desconocidas. Si la varianza es demasiado grande, entonces se reajusta la máquina. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 25 piezas recortadas por esta máquina y se encontró:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 101{,}10 \text{ (en cm)}; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 412{,}75 \text{ (en cm}^2\text{)}$$

Estimar σ^2 con un intervalo de confianza del 90 %.

Ejercicio 16. Intervalos de confianza para la proporción *p* de una población. Una maderera minorista inspecciona los embarques de madera que llegan de sus proveedores. Para las maderadas de pino de calidad selecta, el supervisor recoge aleatoriamente una gruesa (12 docenas o 144 hojas) de un embarque de varias decenas de miles de hojas. En la muestra, 18 hojas no pueden venderse como de calidad selecta.

Para tener en cuenta. Sea X la variable aleatoria que indica el número de hojas inservibles en la muestra de tamaño n. Sea p la proporción poblacional de hojas inservibles en el embarque, parámetro cuyo valor se desea estimar. Como la maderada es de varias decenas de miles de hojas, se puede considerar que X tiene una distribución binomial de parámetros n, p, tal que, como n es grande se puede considerar una variable aleatoria con distribución normal:

$$X \sim \mathrm{Bi}(n, p) \xrightarrow{n \text{ grande}} X \approx \mathrm{N}(\mu_X = np; \sigma_X^2 = np(1-p)\,.$$

a) Calcular un intervalo de confianza al 95% para la proporción p de todo el embarque que no puede venderse como de calidad selecta con las siguientes consideraciones:

i. Estimando la dispersión poblacional a partir del mayor de los valores posibles que ella puede tomar, esto es construir el intervalo con los valores dados por $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{0{,}5(1-0{,}5)}{n}}$, donde $\hat{p}$ es la proporción muestral.

ii. Estimando la dispersión poblacional a partir del valor muestral, esto es con los valores dados por $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

iii. Trabajando con la ecuación cuadrática para p que surge de reemplazar los signos de desigualdad por igualdades en la expresión del intervalo de confianza, $-z_{\alpha/2} < \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z_{\alpha/2}$, esto es construir el intervalo con los valores dados por

$$p = \frac{\hat{p} + \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{n}}.$$

Comparar las posiciones de los centros y las longitudes respectivas de los tres intervalos obtenidos.

b) Si el 20% o más del embarque no puede venderse como madera de calidad selecta, el embarque no es rentable. ¿Indica el intervalo de confianza que hay razones para pensar que el embarque no es rentable? ¿Es la misma esta respuesta para los tres intervalos calculados?

c) Si se tratara de diseñar un muestreo para obtener un intervalo de confianza al 95% para la proporción de hojas invendibles con una longitud no superior a 0,04, ¿de qué tamaño debería ser la muestra de hojas inspeccionadas? Para este cálculo la gerencia sugiere suponer, dados los registros históricos y sin sospechas de una maderada fuera de lo habitual, que entre un 10% y un 20% del embarque es invendible.

d) Con respecto al diseño de muestreo del ítem c), ¿sería útil calcular el tamaño de la muestra basándose en la hipótesis de que el 50% del embarque es invendible (estimación de máxima dispersión)?

e) Si a partir del resultado del ítem c) se decide tomar una muestra el doble de lo sugerido, manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿se reduce a la mitad la amplitud del intervalo?

Ejercicio 17. Una encuestadora política querría estimar la proporción de votantes a favor por cierto candidato en las próximas elecciones. La encuestadora querría un 90% de confianza de que su predicción está correcta con un error de ±0,04 de la proporción poblacional real (±4 puntos porcentuales). Organizar la encuesta tiene un costo de \$5000 y \$5 adicionales por cada encuestado. ¿Cuánto costará realizar la encuesta? ¿A cuánto se eleva el costo si desea un error de ±0,01 de la proporción poblacional real (±1 puntos porcentual) manteniendo el mismo nivel de confianza?

Ejercicio 18. El *rating* de un programa de televisión se mide como el porcentaje de hogares que está viendo el programa en un momento dado. Una compañía medidora de rating cuenta con un panel de 600 hogares colaboradores, en los cuales ha instalado un *people meter* (dispositivo que registra cada minuto si el televisor está encendido y en qué canal, y envía telefónicamente la información a la base de datos durante la noche). Se ha registrado el rating de un programa popular en 25 puntos entre las 21:15 y las 21:16 de la noche del viernes. Es decir que en el día y horarios señalados el 25% de los hogares del panel vio el programa.

a) Calcular un intervalo de confianza del 90% para el rating del programa en la franja horaria estipulada.

b) Sabiendo que cada *people meter* cuesta \$320, calcular la inversión adicional en dispositivos necesaria para medir el rating con un error de muestreo de ±1,00% (un punto porcentual de amplitud en el intervalo de confianza) manteniendo el mismo nivel de confianza. Sugerencia: utilizar como estimador de la proporción muestral el dato registrado del panel existente en la amplitud del intervalo y trabajar a 4 decimales. Observar en cuánto cambia la respuesta si los números se redondean a menos decimales.

Ejercicio 19. Intervalos de confianza para diferencia entre medias poblacionales de dos poblaciones independientes.

a) Las duraciones de superficies de rodadura de dos marcas competidoras de medida FR78-15 de llantas radiales son variables aleatorias normales con medias μ_x y μ_y y desviaciones estándar

σ_x=2200 y σ_y=1900. Sendas muestras proporcionaron la información siguiente: n_X=40, $\bar{x} = 36500$, n_Y=40, $\bar{y} = 33400$. Hallar el intervalo de confianza del 95% para $\mu_X - \mu_Y$.

b) Dos máquinas A y B llenan cajas de cereal. El peso en gramos del contenido de cada caja es una variable aleatoria normal con varianza igual a 48,5 g^2 si la caja es llenada por la máquina A ó por la máquina B. Con el propósito de verificar la diferencia entre el promedio de los pesos en el proceso de llenado por ambas máquinas se seleccionaron al azar 5 cajas llenadas por A y 6 cajas llenadas por B, obteniendo los siguientes pesos:

Máquina A:	506	508	499	503	504;	
Máquina B:	497	512	514	505	493	496.

Hallar el intervalo de confianza del 96% para la diferencia entre los pesos medios de los contenidos de las cajas.

c) Una muestra de 150 bombitas de la marca LUZ dieron una vida media de 1250 horas y una desviación estándar muestral de 120 horas. Otra muestra de 100 bombitas de la marca CANDELA dieron una media de 1200 horas y un desvío estándar muestral de 80 horas. Determinar un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias de los tiempos de duración de ambas marcas. El resultado de esta muestra, ¿lo inclinaría a comprar una marca en particular?

Para tener en cuenta

I. El error cuadrático medio de un estimador se define como $ECM(\hat{\theta}) = E\left[\hat{\theta} - \theta\right]^2$. Demostrar que $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + (\text{sesgo})^2$ esto es $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \left(E\left[\hat{\theta}\right] - \theta\right)^2$.

II. La mejor balanza.

Para tener en cuenta. Un estimador que tiene varianza pequeña (aunque puede estar sesgado) se denomina <u>preciso</u>. Un estimador que tiene un error cuadrático medio pequeño se denomina <u>exacto</u>. Para cualesquiera dos estimadores $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, sesgados o insesgados, se define la eficacia comparada

$$\text{Eficacia de } \hat{\theta}_1 \text{ comparada con } \hat{\theta}_2 = \frac{ECM\left(\hat{\theta}_2\right)}{ECM\left(\hat{\theta}_1\right)}.$$

Una masa estándar de 100 gramos se pesó varias veces en una balanza A, y a continuación se presenta la distribución de las mediciones. Para la balanza B se obtuvo una distribución semejante, así como por último la balanza C (Ver figura). Las escalas de cada una de ellas son

Escala A: μ_A=100,00,σ_A=0,05 – Escala B: μ_B=99,98,σ_B=0,02 – Escala C: μ_C=100,08,σ_C=0,01

a) ¿Cuál balanza es más precisa? ¿Y más exacta?

b) ¿Cuál es la eficacia relativa de la balanza A con respecto a la balanza B? ¿La de la balanza C con respecto a la B? ¿Las respuestas anteriores concuerdan con el inciso (a)?

c) Dado que las balanzas no son perfectas, se decidió en cada caso pesar 25 veces un objeto y tomar el promedio como la mejor estimación del peso verdadero. Cuando se lleva a cabo lo anterior, ¿cuál balanza proporciona la $\bar{X}$ más exacta?

d) Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones. Si fueran falsas, corregirlas:
Si se toma una sola medición, entonces la parte aleatoria (σ) y la parte sistemática (sesgo) son igualmente importantes.
Cuando se promedian varias mediciones, la parte aleatoria del error se elimina, mientras que la parte sistemática persiste. Entonces, es particularmente importante tener poco sesgo.

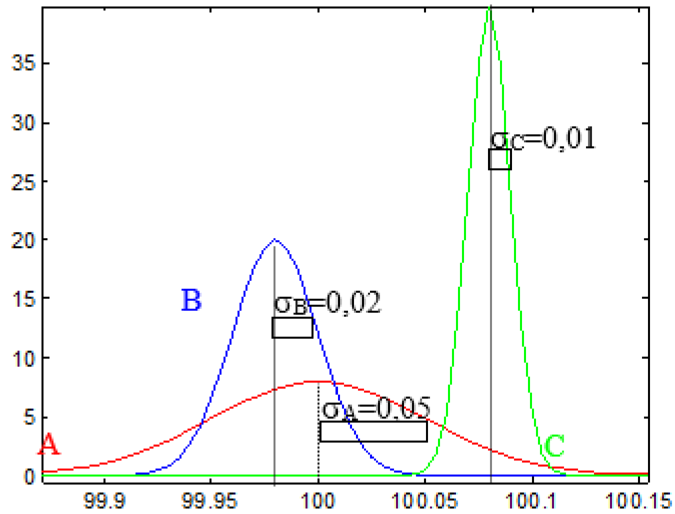

Figura Ej. II. Distribuciones de las mediciones de las balanzas A, B y C.