Respuestas Trabajo Práctico 5. Variables aleatorias multidimensionales

Ej.1 **a)** $P(X>Y) = 0{,}0028$; $P(X=Y) = 0{,}9710$; $P(X<Y) = 0{,}0262$.

b)

x	0	1	2
$p(x)$	0,84	0,10	0,06

y	0	1	2
$p(y)$	0,8164	0,1160	0,0676

c) $E(X)=0{,}22$; $E(Y)=0{,}2512$; $\sigma_X=0{,}54$; $\sigma_Y=0{,}5686$.
d) $P(Y\leq X/X=1)=0{,}9900$; $P(Y\leq X/X\leq 1)=0{,}9721$; **e)** $E(X-Y)=-0{,}0312$.
f) No son independientes.
g) $Cov(X,X)=0{,}2916$; $Cov(Y,Y)=0{,}3233$; $Cov(Y,X)=0{,}2799$; $Corr(X,Y)=0{,}9116$.

Ej.2 **a)** 0,15; **b)** 0,40; **c)** 0,22; **d)** 0,17; 0,46;

e)

x	0	1	2	3	4
$P_X(x)$	0,19	0,30	0,25	0,14	0,12

y	0	1	2	3
$P_Y(y)$	0,19	0,30	0,28	0,23

$E(X)=1{,}7$; $E(Y)=1{,}55$: $V(X)=1{,}59$; $V(Y)=1{,}0875$
f) No son independientes; $Cov(X,Y)=0{,}695$; $Corr(X,Y)\cong 0{,}5285$;
g) $E[X+Y]= 3{,}25$; $V(X+Y)= V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)=4{,}0675$.

Ej.3 **a)**

x	-2	-1	1	2
$p(x)$	0,25	0,25	0,25	0,25

y	1	4
$p(y)$	0,5	0,5

b) $E(X)=0$; $E(Y)=2{,}5$; $E(XY)=0$; **c)** No son independientes ($Y=X^2$).

d)

$x+y$	0	2	6
$p(x+y)$	0,25	0,50	0,25

$E(X+Y)=2{,}5$ $\quad V(X+Y)=4{,}75$.

Ej.4 **b)**

		y				
		0	1	2	3	$P_X(x)$
	1	1/4	1/12	0	0	1/3
x	2	3/16	1/8	1/48	0	1/3
	3	9/64	9/64	3/64	1/192	1/3
	$P_Y(y)$	37/64	67/192	13/192	1/192	

c) Son independientes si $P_{XY}(x;y) = P_X(x)\cdot P_Y(y) \quad \forall(x;y)$.
$P_{XY}(3;3) \neq P_X(3)\, P_Y(3)$ pues $1/192 \neq 1/192 \cdot 1/3 \Rightarrow$ no son independientes.
d) $P_Y(y = 0) = 37/64 \approx 0{,}5781$.
e) A: es el evento que indica que aprobó el examen
$P(A) = P_{XY}(x = 1; y = 0) + P_{XY}(x = 2; y \leq 1) + P_{XY}(x = 2; y \leq 2) = 57/64 \approx 0{,}8906$.
f) $P_{Y/X=3}(x = 3; y = 2) = P_{XY}(x = 3; y = 2) / P_X(x = 3) = 3/64 / 1/3 \approx 0{,}1406$.

g) $P_{X/Y=2}$ $(x = 3; y = 2) = P_{XY}(x = 3, y = 2) / P_Y(y = 2) = 3/64 / 13/192 \approx 0{,}6923$.

h) $W = 10\,(X - Y) / X$; $R_W = \{0; 10/3; 5; 20/3; 10\}$

w	0	10/3	5	20/3	10
$P(w)$	7/64	3/64	1/8	9/64	37/64

$E(W) = 7{,}5$; $V(W) = 275/24 \approx 11{,}4583 \Rightarrow \sigma_W \approx 3{,}385$.

Ej.5 **a)**

		y			
		−3	**0**	**2**	$P_X(x)$
x	**−2**	0,00 ( )	0,00 ( )	3/36 (11, 12)	3/36
	0	3/36 (2, 3)	6/36 (7)	12/36 (8, 9, 10)	21/36
	3	7/36 (4, 5)	5/36 (6)	0,00 ()	12/36
	$P_Y(y)$	10/36	11/36	15/36	

b) $P(A)=P(X>Y)=5/12$; $P(B)=P[(X>Y)\cup(Y>X)]=5/6$; $P(C)=P(X\leq 0)=2/3$; $P(D)=P(Y\geq 0)=13/18$.

c) 5/12; **d)** 23/33; **e)** sabiendo que el segundo jugador paga dinero, ¿cuál es la probabilidad de que el primer jugador cobre dinero? 7/10;

f) $E(X)=5/6$; $E(Y)=0$; **g)** $Cov(X,Y) =-2{,}083$; $Corr(X,Y)$ $-0{,}628$.

Ej.6 **a)**

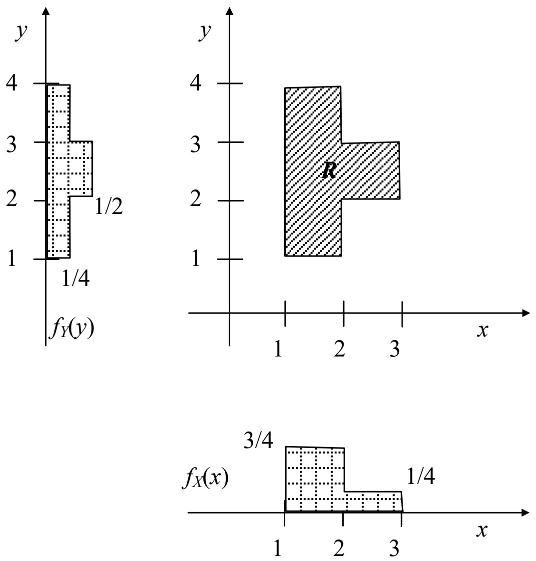
		x				
		0	1	2	3	4
y	0	$1{,}6\text{x}10^{-7}$	$2{,}88\text{x}10^{-5}$	$1{,}944\text{x}10^{-3}$	0,05832	0,6561
	1	$2{,}56\text{x}10^{-6}$	$3{,}456\text{x}10^{-4}$	0,015552	0,23328	0
	2	$1{,}536\text{x}10^{-5}$	$1{,}3824\text{x}10^{-3}$	0,031104	0	0
	3	$4{,}096\text{x}10^{-5}$	$1{,}8432\text{x}10^{-3}$	0	0	0
	4	$4{,}096\text{x}10^{-5}$	0	0	0	0

b) $P(X=2; Y = 1) = 0{,}015552$; $P(X = 2) = 0{,}0486$; **c)** $P(Y=0 / X = 3) = 0{,}20$.

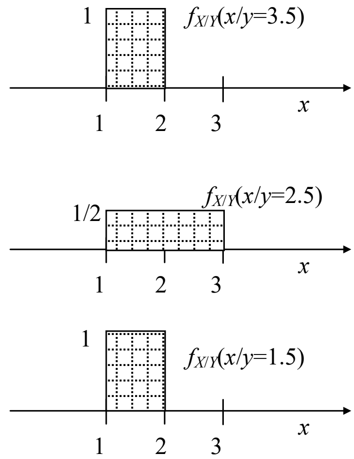
d) $E(X) = 3{,}6$; $E(Y) = 0{,}32$; W: número de bits inaceptables $\Rightarrow E(W) = 0{,}08$.

e) $Cov(X,Y) = -0{,}2903$; $Corr(X,Y) = -0{,}8917$; X y Y no son independientes.

Ej.9 **a)** ¼; **b)** 0,50; 0,25**; c) y d)** $f_X(x) = \begin{cases} 3/4 & 1 < x < 2 \\ 1/4 & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & 1 < y < 2 \\ 1/2 & 2 < y < 3 \\ 1/4 & 3 < y < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.



Funciones de densidad marginales (c)



Funciones de densidad condicionales (d)

Funciones de densidad condicionales:

$$f_{X/Y}(x/y=3{,}5)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},\ f_{X/Y}(x/y=2{,}5)=\begin{cases}1/2 & 1<x<3\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},\ f_{X/Y}(x/y=1{,}5)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}.$$

e) $E_{X/Y}(X/Y=y)=\begin{cases}1{,}5 & 1\le y<2 \vee 3\le y\le 4\\ 2 & 2\le y\le 3\\ \text{fuera de consideración otro caso}\end{cases}$.

Ej.10 **a)** $f_X(x)=2(1-x)$ con $0\le x\le 1$; $f_Y(y)=2y$ con $0\le y\le 1$; nula en otros casos.
b) No son independientes; **c)** 1/3; **d)** 1/4; **e)** 2/3; **f)** 1/3; **g)** 1/2; **h)** 1/4; **i)** 1/3; **j)** ½.

Ej.11. **a)** 0,40; **b)** 0,50; **c)** 0,045; **d)** 8/9**;** **e)** 0,596575

Ej.12. **a)** $E(X)$ = ¾ = 0,75 ; $E(Y)$ = 2/3 ≈ 0,6667; **b)** $f_{XY}(x\ge 0{,}5\ ;\ y\ge 0{,}5)=21/32=0{,}65625$.
c) A: evento de encontrarse si cada uno de ellos espera a lo sumo 15 minutos.
$P(A)$ = 37/64 ≈ 0,5781.
La región asociada con el evento A es el polígono cerrado formado por los vértices: (0;0);(1/4;0);(1;3/4);(1;1);(3/4;1) y (0;1/4).
d) $E(|x-y|)$ = ¼ = 0,25.

Ej.13. **a)** $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$.

$$f_{XY}(x;y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\to f_{XY}(x;y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x\ge 0\wedge y\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}.$$

b) $P(X\le 1)=1-e^{-1}\cong 0{,}632121$; $P(Y\le 1)=1-e^{-1}\cong 0{,}632121$;

c) $P(X+Y\le 2)=1-3e^{-2}\cong 0.593994$

d) $P(1\le X+Y\le 2)=(1-3e^{-2})-(1-2e^{-1})=2e^{-1}-3e^{-2}\cong 0{,}32975$.

e) $F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-t}-te^{-t} & t\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$. Derivando, $f_T(t)=\begin{cases}te^{-t} & t\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$.

Ej.14. **a)** $f_X(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}\quad x\ge 0$**;** $f_Y(y)=e^{-y}\quad y\ge 0$**; b)** no son independientes; **c)** 0,00082625.

d) $P(X\ge 2\wedge Y\ge 2/X\ge 1\wedge Y\ge 1)=\dfrac{2}{3e^4}=0{,}0122104$; **e)** $P(0<X<1/Y=0{,}5)=0{,}393469$.

Ej.15. a) 0,0625; **b)** 0,4140625; **c)** $f_{Y/X}(y/x)=\dfrac{2y+2x}{1+2x}$ con $0\le x\le 1\wedge 0\le y\le 1$, nula en otro caso;

d) $E_{Y/X}(Y/x)=\dfrac{2+3x}{3+6x}\quad 0\le x\le 1$, nula en otro caso.

Ej.16. a) $\begin{pmatrix}17/9 & -1/27\\ -1/27 & 13/162\end{pmatrix}$; **b)** −0,0951; **c)** $f(Y/X)=\dfrac{2(x+y)}{2x+1}$; $P(Y>1/2/X=1)=\dfrac{7}{12}$.

d) $E(Y/X)=(3x+2)/(6x+3)$.

Ej.17. a) 0,1314; **b)** 0,0000; **c)** i. 1,088 litros; ii. 0,07%; iii. −0,903; **d)** i. 2581,5 g; ii. 11,31%.