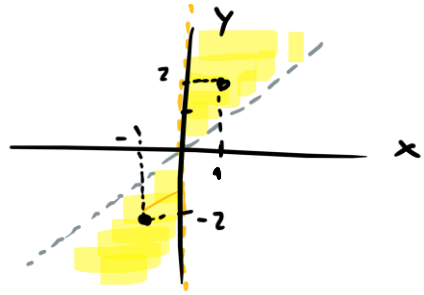
Ej.15 **Realizar el estudio completo de las siguientes funciones. Chequear los resultados obtenidos analíticamente con GeoGebra:**

$a)\ y = \frac{1}{x^2+3}$; $b)\ y = \frac{x^2+1}{x}$; $c)\ y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$; $d)\ y = x \ln x$

$e)\ y = x - 3(x+1)^{\frac{2}{3}}$; $y = x^x$; $g)\ y = e^x x^2$; h) $y = \frac{x}{x^2-1}$

ESTUDIO COMPLETO:



Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas → AV $x=0$ → A.O $y=x$

Intersecciones con los ejes NO PRESENTA

Conjunto de positividad y negatividad $C^+ = (0,+\infty)$ $C^- = (-\infty,0)$

$f(x) = -f(-x)$ Paridad IMPAR (*)

Discontinuidad en x=0 --- discontinuidad esencial

Puntos críticos (derivada primera)

Crecimiento y decrecimiento crec: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ decrec: $(-1,0)\cup(0,1)$

Máximos y mínimos Máx $(-1,-2)$ $f(-1)$ Mín $(1,2)$ $f(+1)$

Puntos críticos (derivada segunda)

Intervalos de Concavidad Conc (+) $(0,+\infty)$ Conc (−) $(-\infty,0)$

Puntos de inflexión NO PRES.

Imagen $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(*)

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)}$

$f(-x) = \frac{x^2+1}{-x}$

$f(-x) = -\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

$f(-1) = -2$

$f(1) = 2$

Asíntotas VERTICAL → $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} = \infty$

NO TIENE HORIZONTAL

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}$ INDET $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \infty$

¿Asíntota oblicua? $y = mx + b$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = b$

¿m?

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2}$ INDET. $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$

$m=1$

Busco "b"

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} - \frac{1x}{1}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x} = 0$

$b=0$

Asíntota

$y = 1x + 0$

$\cap x \rightarrow y = 0$

$$0 = \frac{x^2+1}{x}$$

$$0 = x^2+1$$

$$-1 = x^2$$

$$\sqrt{-1} = |x|$$

NO CORTA AL EJE X

$\cap y \rightarrow ¿x = 0?$

$0 \notin \text{Dom} f$

$\Rightarrow$ NO CORTA AL EJE Y

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

f(x) — eje

x = −1 ⊖ | x = 2 ⊕

$(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$

$$C^+ = (0, +\infty)$$

$$C^- = (-\infty, 0)$$

Buscamos máximos, mínimos, crecimiento...

$$f(x) \quad y = \frac{x^2+1}{x}$$

Puntos críticos → $f'(x) = 0$; $\nexists f'(x)$

¡Recuerdo!

$$y = \frac{a}{b}$$

$$y' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

PUNTOS CRÍTICOS

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow |x| = \sqrt{1}$ → $\boxed{x = 1}$ mín local ; $\boxed{x = -1}$ máx local

$\cancel{x = 0} \rightarrow 0 \notin \text{Dom} f$

f'(x) — eje x: −2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2 ; −1, 0, 1

$(-\infty, -1)$ $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(1, +\infty)$

$f'(-2) > 0$ $(3/4)$

$f'(-\frac{1}{2}) < 0$ (-3)

$f'(\frac{1}{2}) < 0$ (-3)

$f'(2) > 0$ $(3/4)$

crec: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

decrec: $(-1, 0) \cup (0, 1)$

Buscamos puntos de inflexión, concavidad...

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Puntos críticos → $f''(x) = 0$; $\nexists f''(x)$

$\cancel{x = 0}$ pero $0 \notin \text{Dom}$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{2}{x^3}}$$

¿$\frac{2}{x^3} = 0$?

la derivada no se anula

f''(x) — eje x: −2, 2 ; 0

$(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$

$0 \notin \text{Dom}$

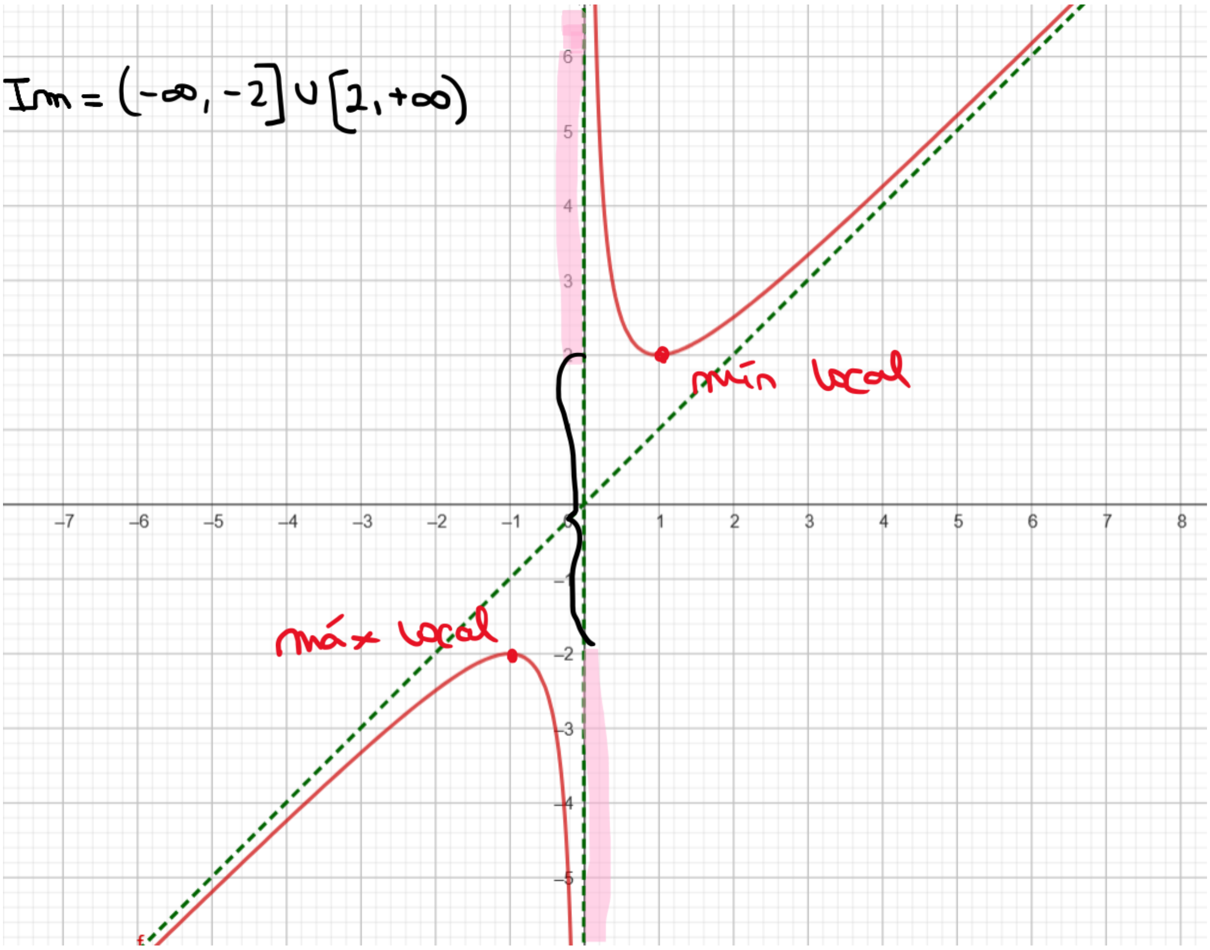
$f''(2) > 0$

$f''(-2) < 0$

Conc ⊕ $(0, +\infty)$

Conc ⊖ $(-\infty, 0)$

$Im = \mathbb{R} - (-2;2)$



$Im = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$