

VECTORES LIBRES

ALGO DE TEORÍA Y EJERCICIOS

¿QUÉ ES UN VECTOR?: un segmento orientado que es posible identificar a simple vista dirección y sentido,

VECTOR FIJO: se indica el punto sobre el que está aplicado .Y
PUEDE CAMBIAR EL EFECTO SEGÚN SU PUNTO DE APLICACIÓN

Vector libre: es el conjunto de vectores equipolentes
(tienen la misma dirección sentido y módulo)

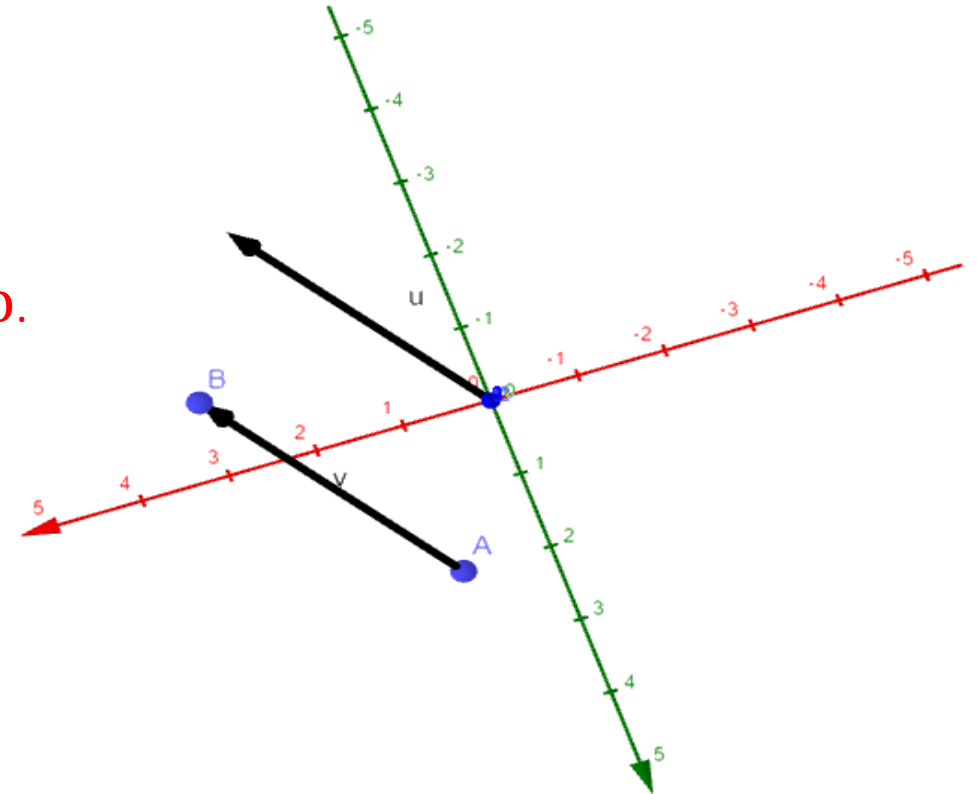
I) ¿Qué es un vector libre?

A un vector no lo nombramos con un solo punto.

Utilizamos su extremo en este caso el punto B y su origen el punto A.

Vector $\overline{AB}$

La ventaja es que lo podemos mover libremente por el espacio o por el plano

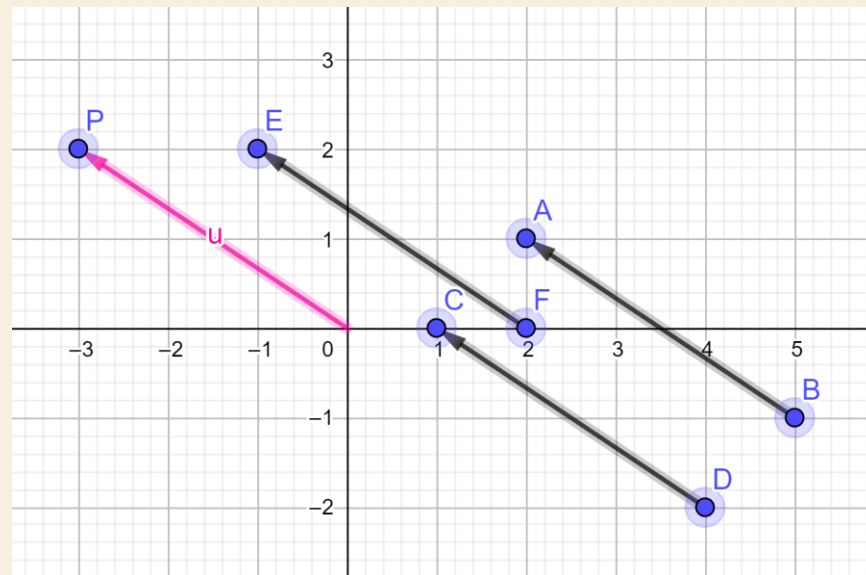
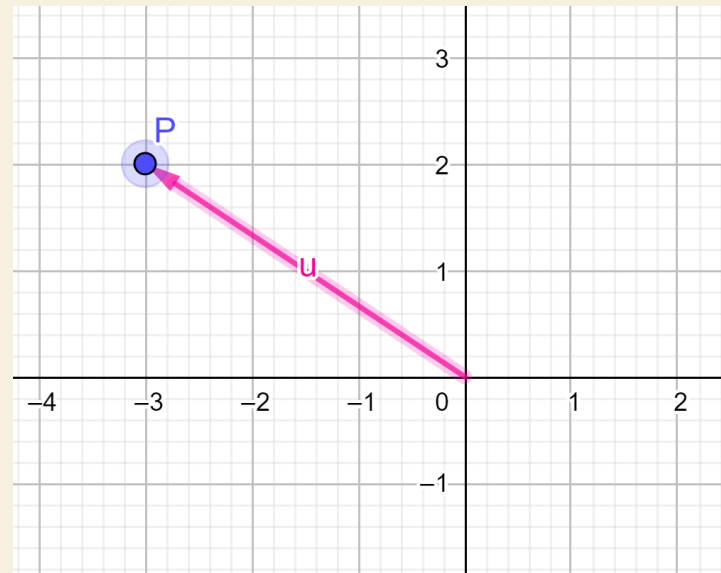


Su representante es el vector posición , que tiene su misma dirección sentido y módulo

VECTORES EN SISTEMAS COORDENADOS

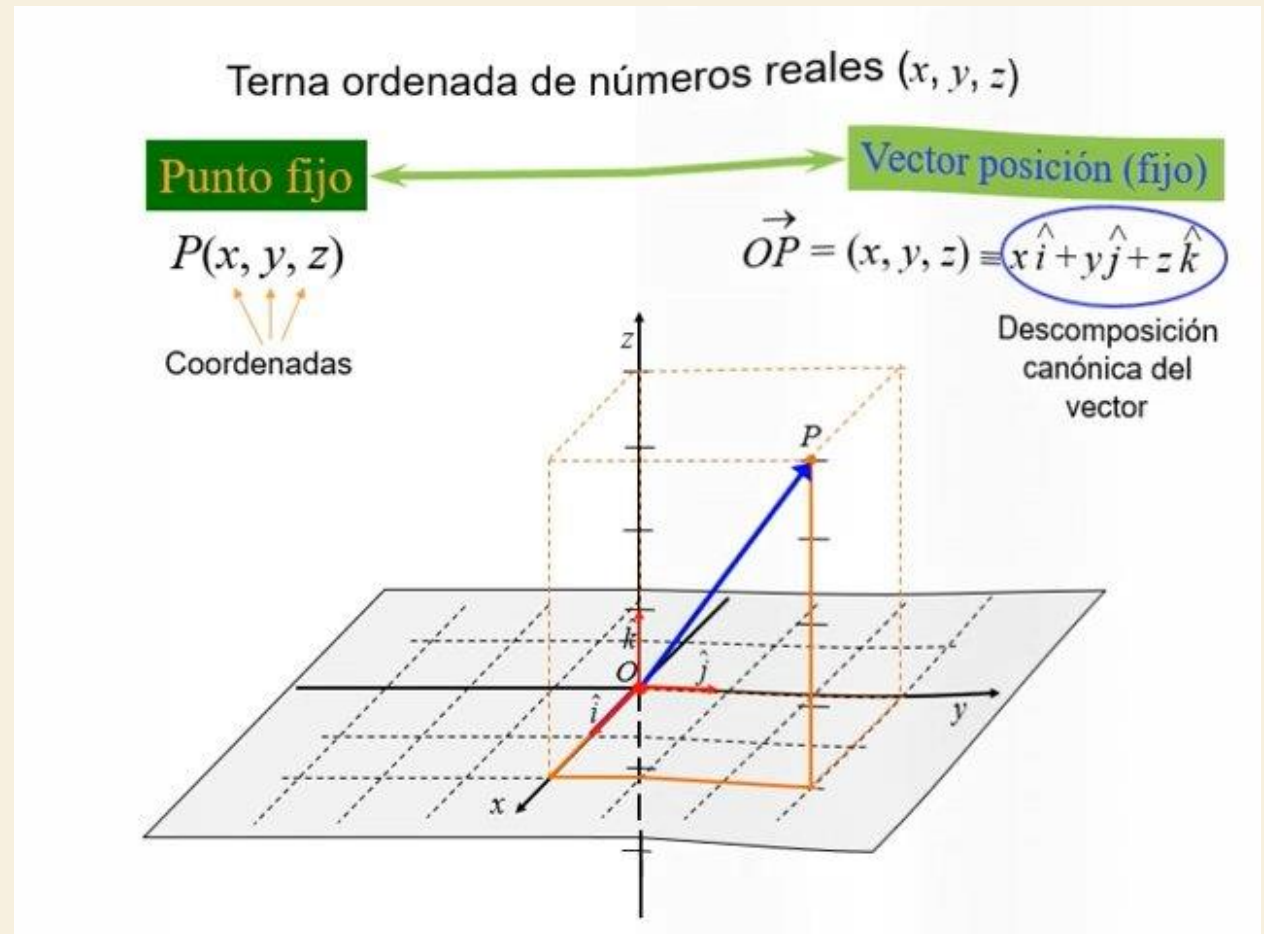
Todo punto $P(x, y) \in R^2$ tiene asociado un vector posición $\overrightarrow{OP}$

Cuyo origen es el origen de coordenadas y su extremo el punto P.



Todo punto $P(x, y, z) \in R^3$
tiene asociado un vector posición
 $\overrightarrow{OP}$

Cuyo origen es el origen de
coordenadas y su extremo el
punto P.



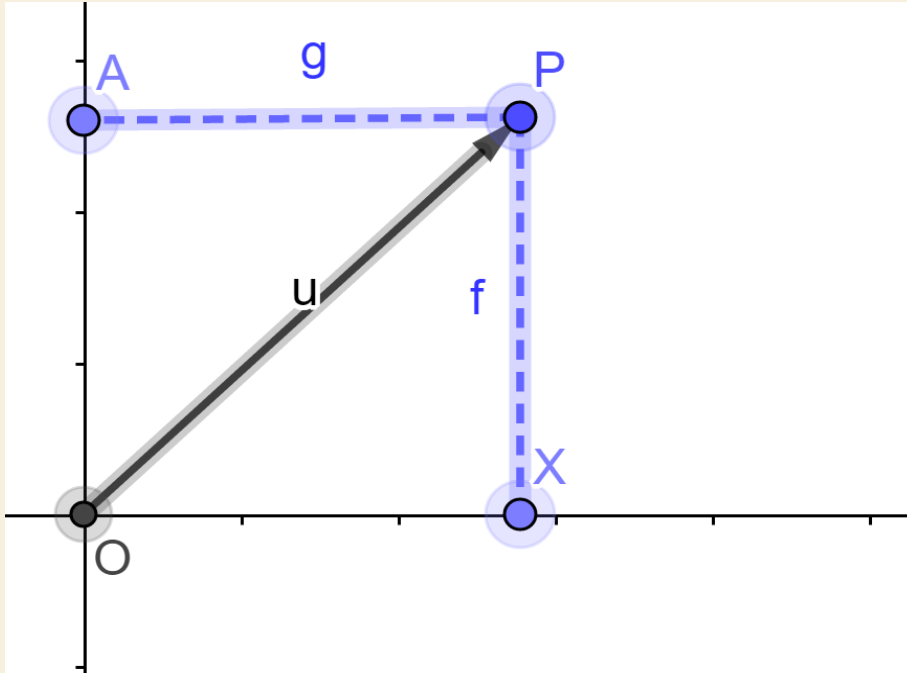
La dirección de un vector : queda definida por la recta donde esta incluido.

El sentido : lo indica la flecha cuando lo graficamos o la forma de escribirlo cuando usamos dos puntos. $\overline{AB}$

Módulo : es la longitud del segmento orientado desde el punto de vista geométrico.

Versor : vector de módulo 1

MÓDULO DE UN VECTOR EN R^2



$$\overline{OP} = (x, y)$$

Por ser O el origen de coordenadas:

$$|\overline{OX}| = x \quad y \quad |\overline{PX}| = y$$

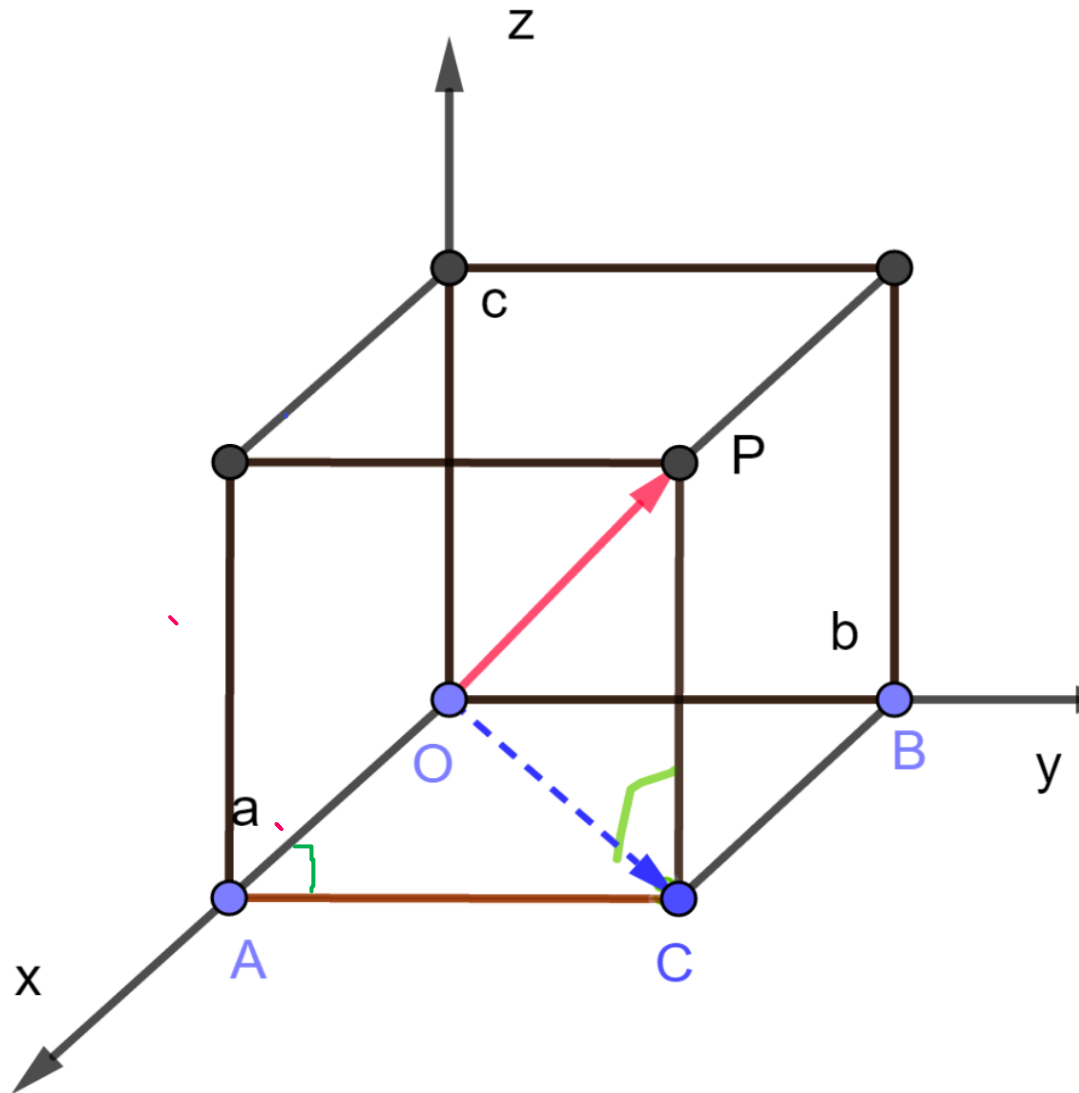
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OPX.

$$|\overline{OP}|^2 = |\overline{OX}|^2 + |\overline{PX}|^2$$

$$|\overline{OP}|^2 = x^2 + y^2$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

MODULO DE UN VECTOR EN R^3 $P(a, b, c)$



En AOC triángulo rectángulo en A
 $|\overline{OA}| = a$ y $|\overline{AC}| = |\overline{OB}| = b$

Por Pitágoras:

$$|\overline{OC}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

$$|\overline{OC}|^2 = a^2 + b^2$$

En OCP triángulo rectángulo en C
 $|\overline{CP}| = c$

Por Pitágoras:

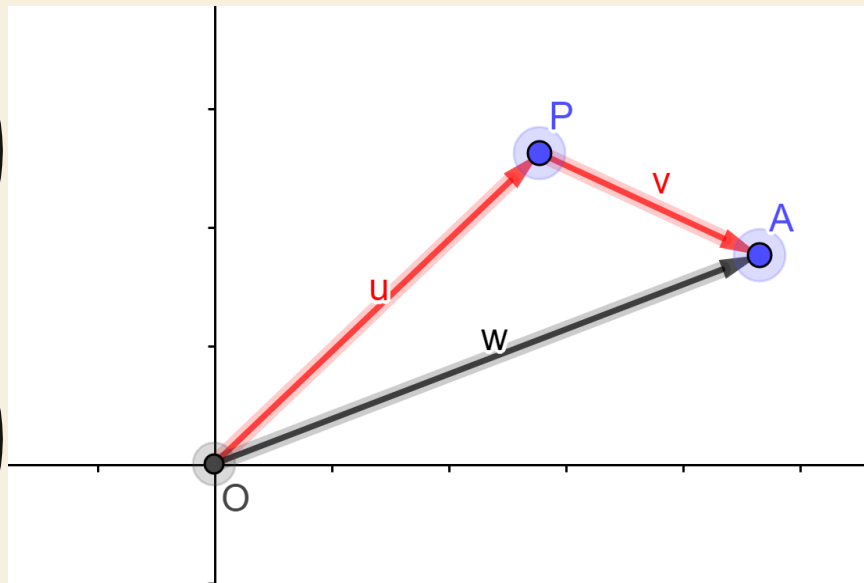
$$|\overline{OP}|^2 = |\overline{OC}|^2 + |\overline{CP}|^2$$

$$|\overline{OP}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

OPERACIONES ENTRE VECTORES

- Suma en forma geométrica:
- Utilizaremos el método de la poligonal



$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA}$$

- Suma en forma algebraica:
- Sumamos componente a componente:
- $\overrightarrow{OP} = (x, y)$
- $\overrightarrow{PA} = (a, b)$
- $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (x + a, y + b)$
- $\overrightarrow{OA} = (x + a, y + b)$
- EN

EN ONE NOTE, EN
NOTAS DE CLASE
TIENEN EL
GEOGEBRA

PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

Propiedades de la suma de dos vectores

P.1 Ley de composición interna: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \vec{a} + \vec{b} \in \mathbf{R}^3$

P.2 Propiedad conmutativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

P.3 Propiedad asociativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbf{R}^3, \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

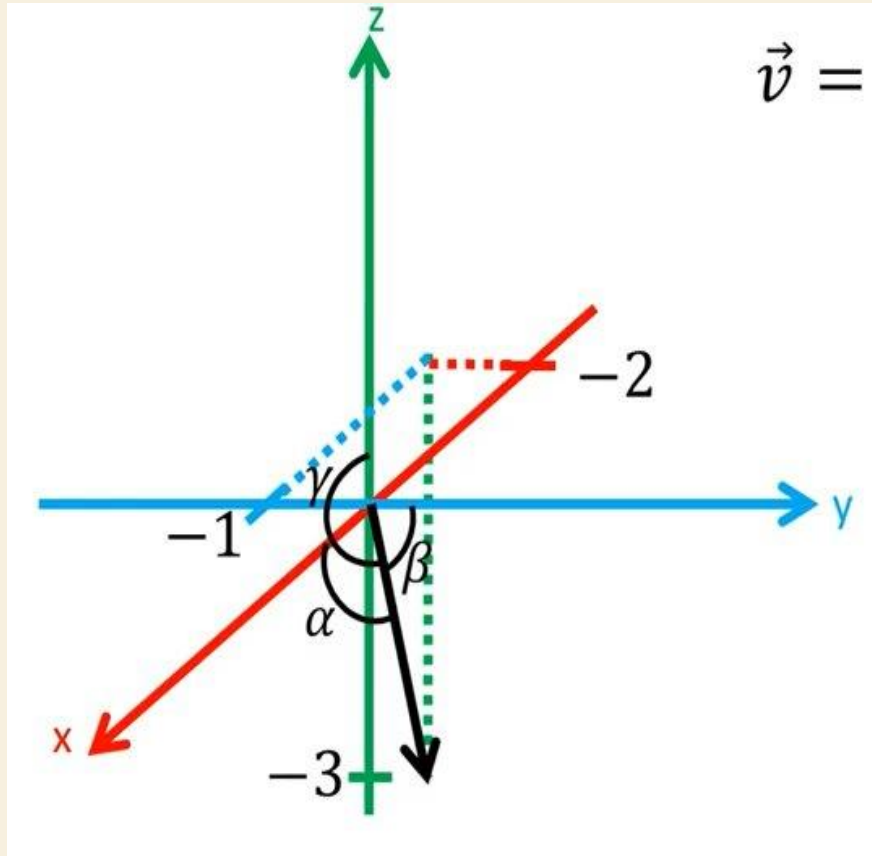
P.4 Elemento neutro: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \exists \vec{0} \in \mathbf{R}^3 / \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

P.5 Elemento opuesto: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \exists (-\vec{a}) \in \mathbf{R}^3 / \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Obs.: Estas propiedades de la suma también se verifican en $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R}^3$ cambiarlo por $\mathbf{R}^2$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

a) ÁNGULOS DIRECTORES

NOS DAN EL ÁNGULO QUE EL VECTOR FORMA CON CADA UNO DE LOS EJES POSITIVOS.
NOS PERMITEN CONOCER LAS **COMPONENTES DE UN VECTOR**.



$$\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

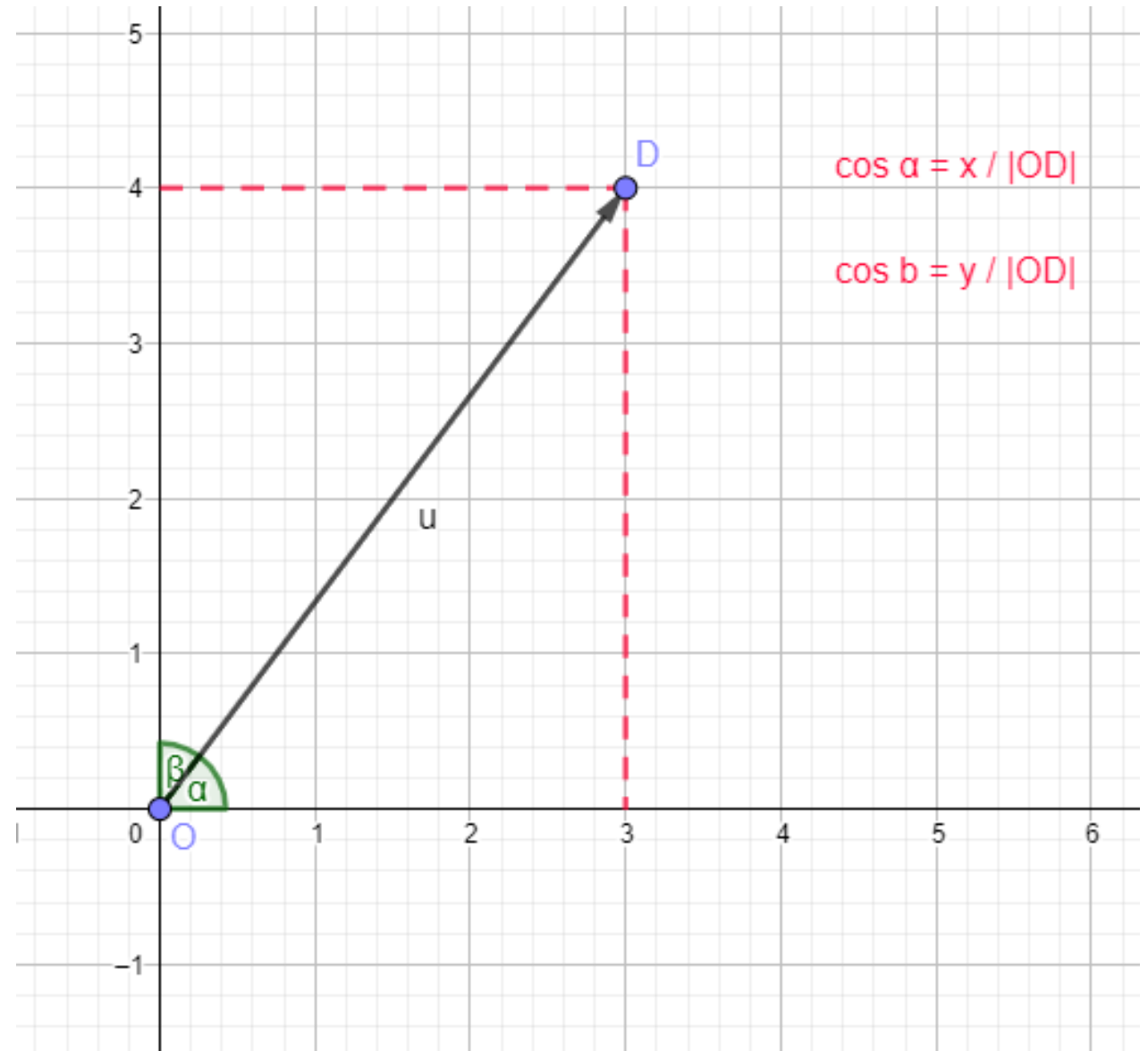
$$\cos \hat{\beta} = \frac{-1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos \hat{\gamma} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

La suma de los cosenos directores al cuadrado es 1.

COSEENOS DIRECTORES EN R^2

NOS DAN EL ÁNGULO
QUE EL VECTOR FORMA
CON CADA UNO DE LOS
EJES POSITIVOS.



APORTAN OTRA FORMA DE DEFINIR LAS COMPONENTES DE UN VECTOR.

$\overline{OP} = (x, y, z)$ en forma de terna

$\overline{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ en forma cartesiana usando los versores canónicos

$\overline{OP} = (\cos\hat{\alpha} |\overline{OP}| , \cos\hat{\beta} |\overline{OP}| , \cos\hat{\gamma} |\overline{OP}|)$ utilizando cosenos directores

ENTONCES UN VERSOR NOS INFORMA EL COSENO DIRECTOR

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

$\bar{v} \in R^2 \text{ o } R^3, \forall \lambda \in R \therefore \lambda \bar{v} \text{ es un vector}$

Al vector $\lambda \bar{u}$ se lo llama
múltiplo escalar de $\bar{u}$

Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar
del otro

$$\bar{u} \parallel \bar{v} \Leftrightarrow \exists \lambda \in R / \bar{u} = \lambda \bar{v} \text{ siendo } \bar{u} \neq \bar{o} \text{ y } \bar{v} \neq \bar{o}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Propiedades para el producto de un escalar por un vector

P.1 Ley de composición externa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \vec{a} \in \mathbf{R}^3$

P.2 Notación: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$

P.3 Propiedad asociativa mixta: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{a}$

P.4 Observación: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}; \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3$

P.5 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R} - \{0\}, \lambda \vec{a} \parallel \vec{a}; |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$; si $\lambda > 0$, $\lambda \vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$
si $\lambda < 0$, $\lambda \vec{a}$ tiene el sentido opuesto a $\vec{a}$

P.6 Propiedades distributivas: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}$

$$\text{P.6.1} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$\text{P.6.2} \quad (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

Obs.: estas propiedades del producto de un escalar por un vector también se verifican en $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}$ (toda vez que aparezca $\mathbf{R}^3$ cambiarlo por $\mathbf{R}^2$ ó $\mathbf{R}$ según corresponda).

También lo podemos utilizar para particionar un segmento.

Identificar puntos particulares en un segmento

Trisección de un segmento $\overline{AB}$ $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$

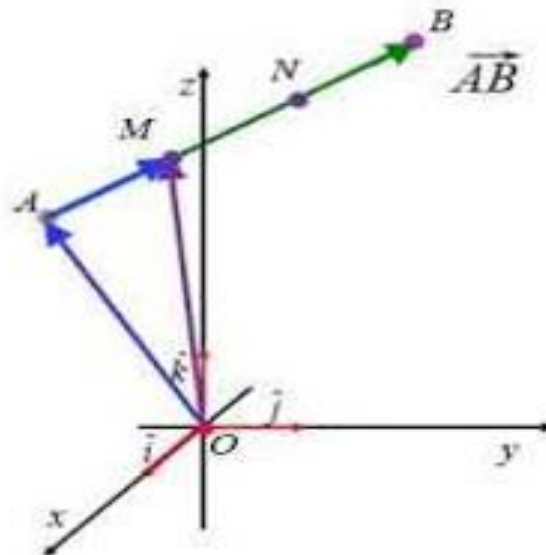
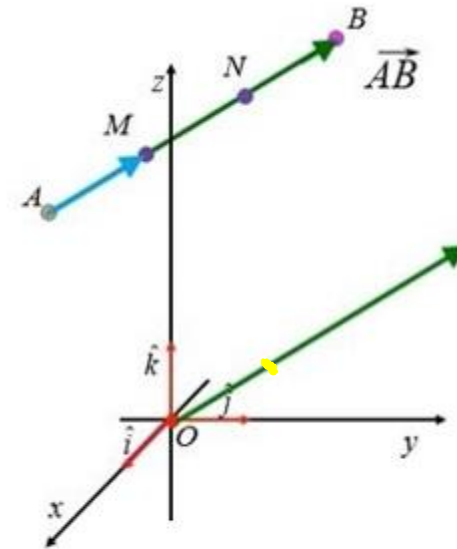
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

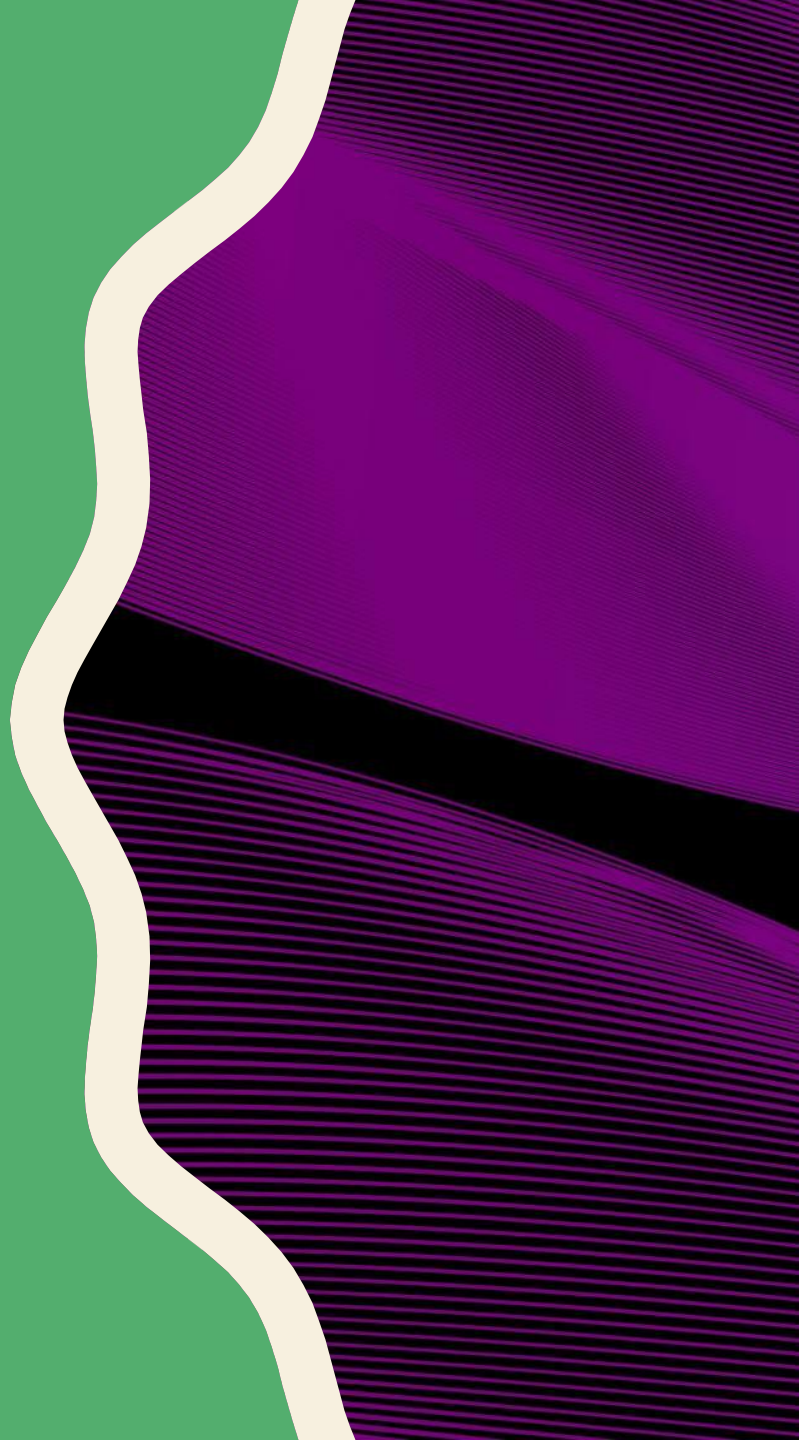
Vector libre

$$M \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}$$

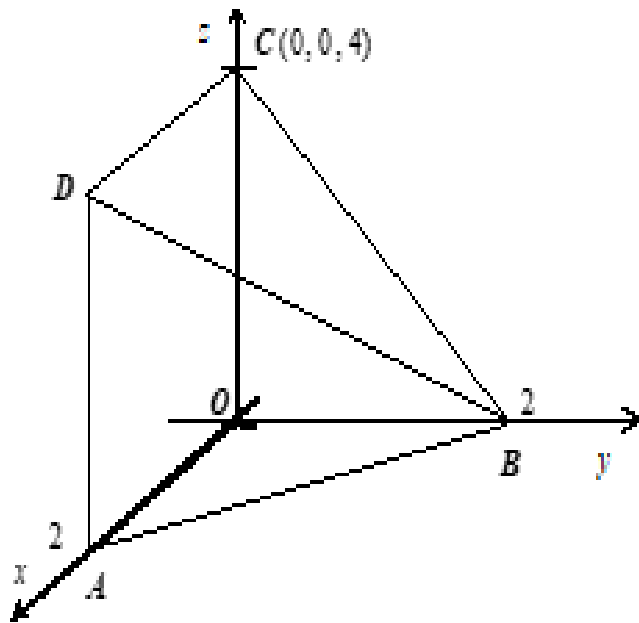
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$



EJERCICIOS

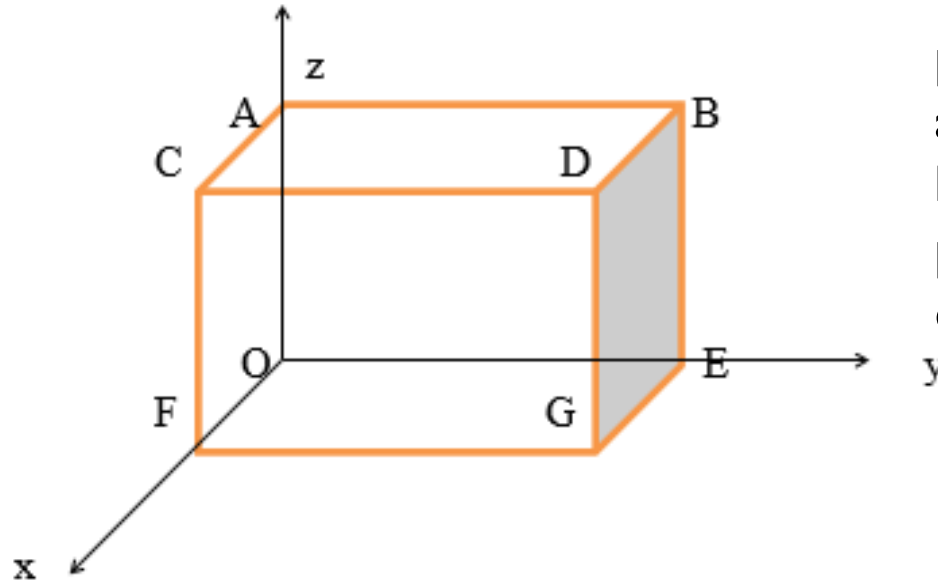


- 1) Sea el cuerpo con vértices en $OABCD$ tal como lo muestra la figura de análisis – D es un punto del plano xz ; B pertenece al eje y



- Dar las características de los puntos ubicados en la cara $OCDA$
- Si a dicha cara la giramos 90° en sentido antihorario, que cambiaría en los puntos?
- Dar las características de los vértices A , B y D y las componentes de los vectores $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{AB}$
- Hallar un vector de módulo 3 paralelo al vector $\overrightarrow{DB}$ pero de sentido contrario.

Ejercicio 2



Dado el siguiente paralelepípedo donde el punto $D(2,5,3)$:

- a) Hallar las coordenadas de sus vértices.
- b) Dar las componentes de sus 4 diagonales principales y trata de encontrar una relación entre ellas.

c) Dar las componentes del vector $\overrightarrow{OG}$ usando sus cosenos directores.

d) Hallar un vector paralelo al $\overrightarrow{OG}$ que pertenezca a la cara ABCD.

e) Calcular $\frac{1}{2} \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}$