

EQUILIBRIO DE FUERZAS Y DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

1 º) Sistema de Fuerzas concurrentes

Determinar la equilibrante del siguiente sistema de fuerzas concurrentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_1 = 30N ; \quad \alpha_1 = 65^\circ ; \quad \beta_1 = 45^\circ ; \quad \gamma_1 = 54,4645^\circ \\ \vec{p}_2 = 40N ; \quad \alpha_2 = 125^\circ ; \quad \beta_2 = 35^\circ ; \quad \gamma_2 = 90^\circ \\ \vec{p}_3 = 35N ; \quad \alpha_3 = 135^\circ ; \quad \beta_3 = 90^\circ ; \quad \gamma_3 = 45^\circ \\ \vec{p}_4 = 50N ; \quad \alpha_4 = 90^\circ ; \quad \beta_4 = 28^\circ ; \quad \gamma_4 = 62^\circ \end{array} \right.$$

1

La equilibrante $\vec{E}$ del sistema, el mismo se determina como la suma vectorial de las fuerzas componentes del sistema igualada a 0, es decir,

$$(A1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0 \\ \text{en nuestro caso} \\ \vec{E} + \sum_{i=1}^4 \vec{p}_i = 0 \end{array} \right.$$

y las componentes de $\vec{E}$ en las direcciones de los ejes coordenados son,

$$(B1) \left\{ \begin{array}{l} E_x + \sum_{i=1}^4 p_i \cdot \cos \alpha_i = 0 \\ E_y + \sum_{i=1}^4 p_i \cdot \cos \beta_i = 0 \\ E_z + \sum_{i=1}^4 p_i \cdot \cos \gamma_i = 0 \end{array} \right.$$

Por lo que debemos determinar los cosenos directores de los vectores representativos de las fuerzas componentes del sistema.

$$(C1) \left\{ \begin{array}{l} l_1 = \cos 65^\circ \approx 0,4226 ; \quad m_1 = \cos 45^\circ \approx 0,7071 ; \quad n_1 = \cos 54,4645^\circ \approx 0,5812 \\ l_2 = \cos 125^\circ \approx -0,5736 ; \quad m_2 = \cos 35^\circ \approx 0,8192 ; \quad n_2 = \cos 90^\circ = 0 \\ l_3 = \cos 135^\circ \approx -0,7071 ; \quad m_3 = \cos 90^\circ = 0 ; \quad n_3 = \cos 45^\circ \approx 0,7071 \\ l_4 = \cos 90^\circ = 0 ; \quad m_4 = \cos 28^\circ \approx 0,8829 ; \quad n_4 = \cos 62^\circ \approx 0,4695 \end{array} \right.$$

Reemplazando en (B1), se tiene,

$$(D1) \begin{cases} E_x + [30.0, 4226 + 40.(-0,5736) + 35.(-0,7071) + 50.0]N = 0 \rightarrow E_x = 35,0145N \\ E_y + [30.0, 7071 + 40.0,8192 + 35.0 + 50.0,8829]N = 0 \rightarrow E_y = -98,126N \\ E_z + [30.0, 5812 + 40.0 + 35.0, 7071 + 50.0, 4695]N = 0 \rightarrow E_z = -65,6595N \end{cases}$$

Entonces, la expresión vectorial de la equilibrante es,

$$(E1) \begin{cases} \vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k} \\ \vec{E} = [35,0145\vec{i} - 98,126\vec{j} - 65,6595\vec{k}]N \end{cases}$$

El módulo de $\|\vec{E}\| = \sqrt{(E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2}$ (F1)

Reemplazando en (F1) los valores (D1), resulta,

$$(G1) \|\vec{E}\| = \sqrt{(35,0145)^2 + (-98,126)^2 + (-65,6595)^2} N = 123,15N$$

La dirección de $\vec{E}$ se obtiene determinando sus cosenos directores.

$$(H1) \begin{cases} \cos \alpha_E = \frac{E_x}{\|\vec{E}\|} \\ \cos \beta_E = \frac{E_y}{\|\vec{E}\|} \\ \cos \gamma_E = \frac{E_z}{\|\vec{E}\|} \end{cases}$$

Reemplazando valores en (H1), se tiene,

$$(I1) \begin{cases} \cos \alpha_E = \frac{35,0145}{123,15} = 0,28432 \rightarrow \alpha_E = 73,482^\circ \\ \cos \beta_E = \frac{-98,126}{123,15} = -0,7968 \rightarrow \beta_E = 142,826^\circ \\ \cos \gamma_E = \frac{-65,6595}{123,15} = -0,5332 \rightarrow \gamma_E = 122,222^\circ \end{cases}$$

2 9) Descomposición de una fuerza en 3 direcciones concurrentes a un punto de la misma considerando equilibrio.

Descomponer la fuerza $\vec{p} = \frac{20}{\sqrt{14}} Kgf (3\vec{i} - 2\vec{j} - 1\vec{k})$ en 3 fuerzas en equilibrio cuyos vectores

representativos tienen las siguientes orientaciones

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = |\vec{p}_1| \left(-\frac{5}{\sqrt{38}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{38}} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{38}} \vec{k} \right) \\ \vec{p}_2 = |\vec{p}_2| \left(\frac{4}{\sqrt{66}} \vec{i} - \frac{7}{\sqrt{66}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{66}} \vec{k} \right) \\ \vec{p}_3 = |\vec{p}_3| \left(\frac{6}{\sqrt{230}} \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{230}} \vec{j} + \frac{13}{\sqrt{230}} \vec{k} \right) \end{cases}$$

La resolución se reduce a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas desde la operativa algebraica, para lo cual, considerando (B1), podemos escribir,

$$(A2) \begin{cases} \sum_{i=1}^n \text{Proy}_{xx} = 0 = \frac{60}{\sqrt{14}} - \frac{5}{\sqrt{38}} |\vec{p}_1| + \frac{4}{\sqrt{66}} |\vec{p}_2| + \frac{6}{\sqrt{230}} |\vec{p}_3| \\ \sum_{i=1}^n \text{Proy}_{yy} = 0 = -\frac{40}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{38}} |\vec{p}_1| - \frac{7}{\sqrt{66}} |\vec{p}_2| + \frac{5}{\sqrt{230}} |\vec{p}_3| \\ \sum_{i=1}^n \text{Proy}_{zz} = 0 = -\frac{20}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{38}} |\vec{p}_1| + \frac{1}{\sqrt{66}} |\vec{p}_2| + \frac{13}{\sqrt{230}} |\vec{p}_3| \end{cases}$$

Luego, del sistema (A2) obtenemos,

$$(B2) \begin{cases} |\vec{p}_1| = 1,772 \cdot 10^{-3} \text{ Kgf} \rightarrow \vec{p}_1 = 1,772 \cdot 10^{-3} \text{ Kgf} \left(-\frac{5}{\sqrt{38}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{38}} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{38}} \vec{k} \right) \\ |\vec{p}_2| = 9,498 \text{ Kgf} \rightarrow \vec{p}_2 = 9,498 \text{ Kgf} \left(\frac{4}{\sqrt{66}} \vec{i} - \frac{7}{\sqrt{66}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{66}} \vec{k} \right) \\ |\vec{p}_3| = 7,6 \text{ Kgf} \rightarrow \vec{p}_3 = 7,6 \text{ Kgf} \left(\frac{6}{\sqrt{230}} \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{230}} \vec{j} + \frac{13}{\sqrt{230}} \vec{k} \right) \end{cases}$$

3.9) Sistema de fuerzas paralelas

Determinar la $\vec{E}$ y un punto de la recta de acción de la misma del siguiente sistema de fuerzas paralelas al eje z , cuyas coordenadas en el plano $(x; y)$ se indican a continuación,

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = 240 \text{ Kgf} \vec{k} & A_1(-3;4;0) \text{ cm} \\ \vec{p}_2 = -150 \text{ Kgf} \vec{k} & A_2(8;1;0) \text{ cm} \\ \vec{p}_3 = -200 \text{ Kgf} \vec{k} & A_3(-5;-6;0) \text{ cm} \\ \vec{p}_4 = 180 \text{ Kgf} \vec{k} & A_4(10;-5;0) \text{ cm} \end{cases}$$

La resultante $\vec{E}$ es la suma algebraica de las fuerzas componentes del sistema igualada a cero.

$$(A3) \quad \vec{E} + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$$

En nuestro caso, resulta,

$$(B3) \quad \vec{E} + (240 - 150 - 200 + 180)Kg\vec{k} = 0 \rightarrow \vec{E} = -70Kg\vec{k} \downarrow$$

Para determinar un punto de la recta de acción, tomamos centro de reducción, por ejemplo, el origen de coordenadas $(0; 0; 0)$, y, recordando el **teorema de Varignon** que establece que "**la suma de momentos de las fuerzas componentes de un sistema de fuerzas respecto de un punto es igual al momento de la resultante de reducción respecto del mismo punto**", tenemos, aplicando este teorema en analogía con la equilibrante,

$$(C3) \quad \vec{E} \times (\vec{C}_R - \vec{A}_R) + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times (\vec{C}_R - \vec{A}_i) = 0$$

4

donde $\vec{A}_i; \vec{A}_R (x_R; y_R; 0)$ son puntos de las rectas de acción de las fuerzas componentes del sistema y la equilibrante respectivamente.

$$(D3) \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -70 \\ -x_R & -y_R & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 240 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -150 \\ -8 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -200 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 180 \\ -10 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo ecuación matricial (D3), resulta,

$$(E3) \quad \begin{cases} (-70 y_R) \vec{i} + 70 x_R \vec{j} + 960 \vec{i} + 720 \vec{j} - 150 \vec{i} + 1200 \vec{j} + 1200 \vec{i} - 1000 \vec{j} - 900 \vec{i} - 1800 \vec{j} = 0 \\ \text{de donde obtenemos} \\ -70 x_R Kg\vec{k} = [720 + 1200 - 1000 - 1800]Kg\vec{k} \rightarrow x_R = 12,57cm \\ 70 y_R Kg\vec{k} = [960 - 150 + 1200 - 900]Kg\vec{k} \rightarrow y_R = 15,857cm \end{cases}$$

4.9) Descomposición de una fuerza en 3 direcciones paralelas a la misma en equilibrio

Descomponer la fuerza $p = 250Kg\vec{k}$ cuyo punto de la recta de acción de la misma es $A(-3;5;0)m$ en las fuerzas cuyas rectas de acción cuyas direcciones son **1-1, 2-2, y 3-3**, siendo puntos de las rectas de acción de estos,

$$\begin{cases} 1-1 \rightarrow A_1(4;-2;0)m \\ 2-2 \rightarrow A_2(-10;0;0)m \\ 3-3 \rightarrow A_3(-7;-4;0)m \end{cases}$$

Para resolver esta situación, aplicamos las ecuaciones de equivalencia correspondientes.

$$(A4) \begin{cases} \vec{p} + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0 \\ \vec{p} \times (\vec{C}_R - \vec{A}) + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times (\vec{C}_R - \vec{A}_i) = 0 \end{cases}$$

Como centro de reducción, en la aplicación del teorema de Varignon, elegimos el origen de coordenadas $\vec{C}_R(0;0;0)$. De acuerdo (A4), y, comenzamos asignando arbitrariamente sentidos positivos a los vectores representativos de las fuerzas.

$$(B4) \begin{cases} 250Kgf\vec{k} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)\vec{k} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 250 \\ (0+3) & (0-5) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \vec{p}_1 \\ (0-4) & (0+2) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \vec{p}_2 \\ (0+10) & (0) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \vec{p}_3 \\ (0+7) & (0+4) & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Surgiendo de (B4),

$$(C4) \begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + 250N = 0 \\ [1250\vec{i} + 750\vec{j}]Kgf.m + [-2\vec{p}_1\vec{i} - 4\vec{p}_1\vec{j} + 10\vec{p}_2\vec{j} - 4\vec{p}_3\vec{i} + 7\vec{p}_3\vec{j}]m = 0 \end{cases}$$

De (C4), extraemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(D4) \begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + 250Kgf = 0 \\ -2\vec{p}_1 - 4\vec{p}_3 + 1250Kgf = 0 \\ -4\vec{p}_1 + 10\vec{p}_2 + 7\vec{p}_3 + 750Kgf = 0 \end{cases}$$

Finalmente, obtenemos de la resolución del sistema (D4),

$$(E4) \begin{cases} \vec{p}_1 = -215Kgf \downarrow \\ \vec{p}_2 = -455Kgf \downarrow \\ \vec{p}_3 = 420Kgf \end{cases}$$

5 9) Sistema general de fuerzas

Determinar la equilibrante $\vec{E}$ y un punto de la recta de acción de la misma, siendo el sistema de fuerzas con un punto de la recta de acción,

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = 1000N \left(\frac{3}{\sqrt{62}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{62}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{62}}\vec{k} \right) \rightarrow A_1(-3;5;-9)m \\ \vec{p}_2 = 1500N \left(-\frac{5}{\sqrt{42}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{42}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{42}}\vec{k} \right) \rightarrow A_2(12;-6;1)m \\ \vec{M} = 50000Nm \left(\frac{11}{\sqrt{194}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{194}}\vec{j} + \frac{8}{\sqrt{194}}\vec{k} \right) \end{cases}$$

La equilibrante $\vec{E}$, no depende del centro de reducción, y la misma será la suma vectorial de los vectores representativos de las fuerzas del sistema, en nuestro caso,

$$(A5) \begin{cases} \vec{E} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \\ \vec{E} + 1000N \left(\frac{3}{\sqrt{62}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{62}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{62}}\vec{k} \right) + 1500N \left(-\frac{5}{\sqrt{42}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{42}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{42}}\vec{k} \right) = 0 \end{cases}$$

Cuyas componentes son,

$$(B5) \begin{cases} E_x + \left(\frac{3000}{\sqrt{62}} - \frac{7500}{\sqrt{42}} \right) N = 0 \rightarrow E_x \approx 776,27N \\ E_y + \left(-\frac{2000}{\sqrt{62}} + \frac{6000}{\sqrt{42}} \right) N = 0 \rightarrow E_y = -671,82N \\ E_z - \left(\frac{7000}{\sqrt{62}} + \frac{1500}{\sqrt{42}} \right) N = 0 \rightarrow E_z = 1120,46N \end{cases}$$

Cuyo módulo es,

$$(C5) |\vec{E}| = \sqrt{(776,27)^2 + (-671,82)^2 + (1120,46)^2} N \approx 1519,66N$$

cosenos directores de $\vec{E}$

$$(D5) \begin{cases} \cos \alpha_E = \frac{776,27}{1519,66} = 0,51082 \rightarrow \alpha_E = 59,2815^\circ \\ \cos \beta_E = -\frac{671,82}{1519,66} = -0,4421 \rightarrow \beta_E = 116,238^\circ \\ \cos \gamma_E = \frac{1120,46}{1519,66} = 0,7374 \rightarrow \gamma_E = 42,49^\circ \end{cases}$$

Para determinar un punto $(x_E; y_E; z_E)$ de la recta de acción de la $\vec{E}$ consideramos como centro de momentos el origen de coordenadas.

$$(E5) \left\{ \begin{aligned} &\vec{E}_x(\vec{C}_R - \vec{A}_R) + \vec{p}_1(\vec{C}_R - \vec{A}_1) + \vec{p}_2(\vec{C}_R - \vec{A}_2) + \vec{M} = 0 \\ &\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 776,27 & -671,82 & 1120,46 \\ -x_E & -y_E & -z_E \end{vmatrix} + \frac{1000}{\sqrt{62}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 3 & -2 & -7 \\ 3 & -5 & 9 \end{vmatrix} + \frac{1500}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -5 & 4 & -1 \\ -12 & 6 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{50000}{\sqrt{194}} (11\check{i} - 3\check{j} + 8\check{k}) = 0 \end{aligned} \right.$$

De (E5) obtenemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas siguiente:

$$(F5) \begin{cases} -671,82 z_R - 1120,46 y_R = 33219,6m \\ 1120,46 x_R - 776,27 z_R = -15245,2m \\ 776,27 y_R + 671,82 x_R = 31741,5m \end{cases}$$

Del sistema (F5), observamos que el mismo es compatible indeterminado, lo que implica tiene infinitas soluciones por poseer la recta de acción de $\vec{R}_R$ infinitos puntos, finalmente, elegimos arbitrariamente una coordenada, por ejemplo $x_R = 0$, y resolvemos el sistema restante, obteniéndose para esta situación,

$$(G5) \begin{cases} x_R = 0 \\ y_R = 40,89m \\ z_R = 19,64m \end{cases}$$

6 9) Descomposición de un sistema de fuerzas en 6 direcciones

Descomponer el siguiente sistema

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = 500N \left(\frac{3}{\sqrt{62}} \check{i} + \frac{2}{\sqrt{62}} \check{j} - \frac{7}{\sqrt{62}} \check{k} \right) \rightarrow \vec{A}_1(-5;5;-9)m \\ \vec{p}_2 = 800N \left(-\frac{5}{\sqrt{42}} \check{i} - \frac{4}{\sqrt{42}} \check{j} + \frac{1}{\sqrt{42}} \check{k} \right) \rightarrow \vec{A}_2(13;-6;-1)m \\ \vec{M} = 50000Nm \left(-\frac{11}{\sqrt{194}} \check{i} + \frac{3}{\sqrt{194}} \check{j} + \frac{8}{\sqrt{194}} \check{k} \right) \end{cases}$$

En las direcciones **1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, y 6-6** que se indican a continuación cuyos puntos de sus rectas de acción se indican,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(-3;4;5) \quad ; \quad A'_1(6;-2;4) \\ A_2(5;10;-4) \quad ; \quad A'_2(2;-7;0) \\ A_3(0;-11;8) \quad ; \quad A'_3(10;5;-8) \\ A_4(4;3;-8) \quad ; \quad A'_4(2;-3;5) \\ A_5(-5;-1;-3) \quad ; \quad A'_5(2;-2;6) \\ A_6(-11;-3;6) \quad ; \quad A'_6(7;3;-6) \end{array} \right.$$

Comenzamos por nombrar las fuerzas que pasan por los puntos con igual subíndice,

$$(A6) \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{X_1} \rightarrow \overrightarrow{A_1 A'_1} \\ \overrightarrow{X_2} \rightarrow \overrightarrow{A_2 A'_2} \\ \overrightarrow{X_3} \rightarrow \overrightarrow{A_3 A'_3} \\ \overrightarrow{X_4} \rightarrow \overrightarrow{A_4 A'_4} \\ \overrightarrow{X_5} \rightarrow \overrightarrow{A_5 A'_5} \\ \overrightarrow{X_6} \rightarrow \overrightarrow{A_6 A'_6} \end{array} \right.$$

Expresando en forma vectorial los mismos, resulta,

$$(B6) \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{X_1} = |\overrightarrow{X_1}| \left(\frac{9}{\sqrt{118}} \check{i} - \frac{6}{\sqrt{118}} \check{j} - \frac{1}{\sqrt{118}} \check{k} \right) \\ \overrightarrow{X_2} = |\overrightarrow{X_2}| \left(-\frac{3}{\sqrt{314}} \check{i} - \frac{17}{\sqrt{314}} \check{j} + \frac{4}{\sqrt{314}} \check{k} \right) \\ \overrightarrow{X_3} = |\overrightarrow{X_3}| \left(\frac{5}{3\sqrt{17}} \check{i} + \frac{8}{3\sqrt{17}} \check{j} - \frac{8}{3\sqrt{17}} \check{k} \right) \\ \overrightarrow{X_4} = |\overrightarrow{X_4}| \left(-\frac{2}{\sqrt{209}} \check{i} - \frac{6}{\sqrt{209}} \check{j} + \frac{13}{\sqrt{209}} \check{k} \right) \\ \overrightarrow{X_5} = |\overrightarrow{X_5}| \left(\frac{7}{\sqrt{374}} \check{i} - \frac{1}{\sqrt{374}} \check{j} + \frac{18}{\sqrt{374}} \check{k} \right) \\ \overrightarrow{X_6} = |\overrightarrow{X_6}| \left(\frac{18}{6\sqrt{14}} \check{i} + \frac{6}{6\sqrt{14}} \check{j} - \frac{12}{6\sqrt{14}} \check{k} \right) \end{array} \right.$$

Por ecuaciones de equilibrio de las proyecciones de fuerzas, tenemos,

$$(C6) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^6 X_i \cdot \cos \alpha_{xi} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \cdot \cos \beta_i + \sum_{i=1}^6 X_i \cdot \cos \beta_{xi} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n p_i \cdot \cos \gamma_i + \sum_{i=1}^6 X_i \cdot \cos \gamma_{xi} = 0 \end{cases}$$

En nuestro caso, (C6) resulta,

$$(D6) \begin{cases} \left(\frac{1500}{\sqrt{62}} - \frac{4000}{\sqrt{42}} \right) N + \frac{9}{\sqrt{118}} X_1 - \frac{3}{\sqrt{314}} X_2 + \frac{5}{3\sqrt{17}} X_3 - \frac{2}{\sqrt{209}} X_4 + \frac{7}{\sqrt{374}} X_5 + \\ + \frac{3}{\sqrt{14}} X_6 = 0 \\ \left(\frac{1000}{\sqrt{62}} - \frac{3200}{\sqrt{42}} \right) N - \frac{6}{\sqrt{118}} X_1 - \frac{17}{\sqrt{314}} X_2 + \frac{8}{3\sqrt{17}} X_3 - \frac{6}{\sqrt{209}} X_4 - \frac{1}{\sqrt{374}} X_5 + \\ + \frac{1}{\sqrt{14}} X_6 = 0 \\ \left(-\frac{3500}{\sqrt{62}} + \frac{800}{\sqrt{42}} \right) N - \frac{1}{\sqrt{118}} X_1 + \frac{4}{\sqrt{614}} X_2 - \frac{8}{3\sqrt{17}} X_3 + \frac{13}{\sqrt{209}} X_4 + \frac{18}{\sqrt{374}} X_5 + \\ - \frac{2}{\sqrt{14}} X_6 = 0 \end{cases}$$

9

Mientras que las ecuaciones de equivalencia de sumatorias de momentos considerando como centro de reducción el origen de coordenadas $C_R(0;0;0)$, resulta,

$$(E6) \begin{cases} \sum_{j=1}^m \overrightarrow{M_j} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p_i} \times (\overrightarrow{C_R} - \overrightarrow{A_i}) + \sum_{k=1}^6 \overrightarrow{X_k} \times (\overrightarrow{C_R} - \overrightarrow{A_k}) = 0 \\ 5 \cdot 10^4 \text{ Nm} \left(-\frac{11}{\sqrt{194}} \check{i} + \frac{3}{\sqrt{194}} \check{j} + \frac{8}{\sqrt{194}} \check{k} \right) + \left[\frac{500}{\sqrt{62}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 3 & 2 & -7 \\ 5 & -5 & 9 \end{vmatrix} + \frac{800}{\sqrt{42}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -5 & -4 & 1 \\ -13 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right] \text{ Nm} + \\ + \frac{X_1}{\sqrt{118}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 9 & -6 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{vmatrix} + \frac{X_2}{\sqrt{314}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -3 & -17 & 4 \\ -5 & -10 & 4 \end{vmatrix} + \frac{X_3}{3\sqrt{17}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 5 & 8 & -8 \\ 0 & 11 & -8 \end{vmatrix} + \frac{X_4}{\sqrt{209}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & -6 & 13 \\ -4 & -3 & 8 \end{vmatrix} + \\ + \frac{X_5}{\sqrt{374}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 7 & -1 & 18 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{X_6}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 11 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

En la ecuación (E6) formamos el sistema siguiente, considerando las componentes

$$\sum Mom_{xx}^{CR}; \sum Mom_{yy}^{CR}; \sum Mom_{zz}^{CR};$$

$$2, \\ (F6) \begin{cases} -41802Nm + (2,935 X_1 - 1,58 X_2 + 1,94 X_3 - 0,6225 X_4 - 1,086 X_5)m = 0 \\ 5845Nm + (3,866 X_1 - 0,451 X_2 + 3,234 X_3 - 2,49 X_4 + 3,568 X_5 - 1,07 X_6)m = 0 \\ 17009Nm + (-1,657 X_1 - 3,104 X_2 + 4,446 X_3 - 1,246 X_4 + 0,62 X_5 + 0,5345 X_6)m = 0 \end{cases}$$

Los sistemas (D6) y (F6) conforman un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas siguiente:

$$(G6) \begin{cases} -476,71N + \frac{9}{\sqrt{118}} X_1 - \frac{3}{\sqrt{314}} X_2 + \frac{5}{3\sqrt{17}} X_3 - \frac{2}{\sqrt{209}} X_4 + \frac{7}{\sqrt{374}} X_5 + \frac{3}{\sqrt{14}} X_6 = 0 \\ -366,77N + -\frac{6}{\sqrt{118}} X_1 - \frac{17}{\sqrt{314}} X_2 + \frac{8}{3\sqrt{17}} X_3 - \frac{6}{\sqrt{209}} X_4 - \frac{1}{\sqrt{374}} X_5 + \frac{1}{\sqrt{14}} X_6 = 0 \\ -321,1N - \frac{1}{\sqrt{118}} X_1 + \frac{4}{\sqrt{314}} X_2 - \frac{8}{3\sqrt{17}} X_3 + \frac{13}{\sqrt{209}} X_4 + \frac{18}{\sqrt{374}} X_5 - \frac{2}{\sqrt{14}} X_6 = 0 \\ -41802N + (2,935 X_1 - 1,58 X_2 + 1,94 X_3 - 0,6225 X_4 - 1,086 X_5) = 0 \\ 5845N + (3,866 X_1 - 0,451 X_2 + 3,234 X_3 - 2,49 X_4 + 3,568 X_5 - 1,07 X_6) = 0 \\ 17009N + (-1,657 X_1 - 3,104 X_2 + 4,446 X_3 - 1,246 X_4 + 0,62 X_5 + 0,5345 X_6) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución en Matemática 7.0 es,

$$\begin{aligned} \text{Solve}[\{0.8285X_1 - 0.1693X_2 + 0.404X_3 - 0.138X_4 + 0.362X_5 + 0.801X_6 = \\ = -476.71, -0.5523X_1 - 0.959X_2 + 0.647X_3 - 0.415X_4 - 0.052X_5 \\ + 0.267X_6 = \\ = -366.77, -0.092X_1 + 0.226X_2 - 0.647X_3 + 0.899X_4 + 0.931X_5 \\ - 0.535X_6 == -321.1, 2.935X_1 - 1.58X_2 + 1.94X_3 - 0.6225X_4 - 1.086X_5 \\ == 41802, 3.866X_1 - 0.451X_2 + 3.234X_3 - 2.49X_4 + 3.568X_5 - 1.07X_6 = \\ = 5845, -1.657X_1 - 3.104X_2 + 4.446X_3 - 1.246X_4 + 0.62X_5 + 0.5345X_6 \\ == 17009\}, \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}] \end{aligned}$$

Entonces, la solución obtenida del software es,

$$\{\{X_1 \rightarrow 6187.07, X_2 \rightarrow -3719.57, X_3 \rightarrow 8508.9, X_4 \rightarrow 11105.5, X_5 \rightarrow -7524.78, X_6 \rightarrow -6758.42\}\}$$

Es decir, podemos escribir,

$$(H6) \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{X_1} = 6187N \quad \text{de vector } \overrightarrow{A'_1 A_1} \\ \overrightarrow{X_2} = 3719,57N \\ \overrightarrow{X_3} = 8508,9N \quad \text{de vector } \overrightarrow{A'_3 A_3} \\ \overrightarrow{X_4} = 11105,5N \quad \text{de vector } \overrightarrow{A'_4 A_4} \\ \overrightarrow{X_5} = 7524,8N \\ \overrightarrow{X_1} = 6758,42N \end{array} \right.$$