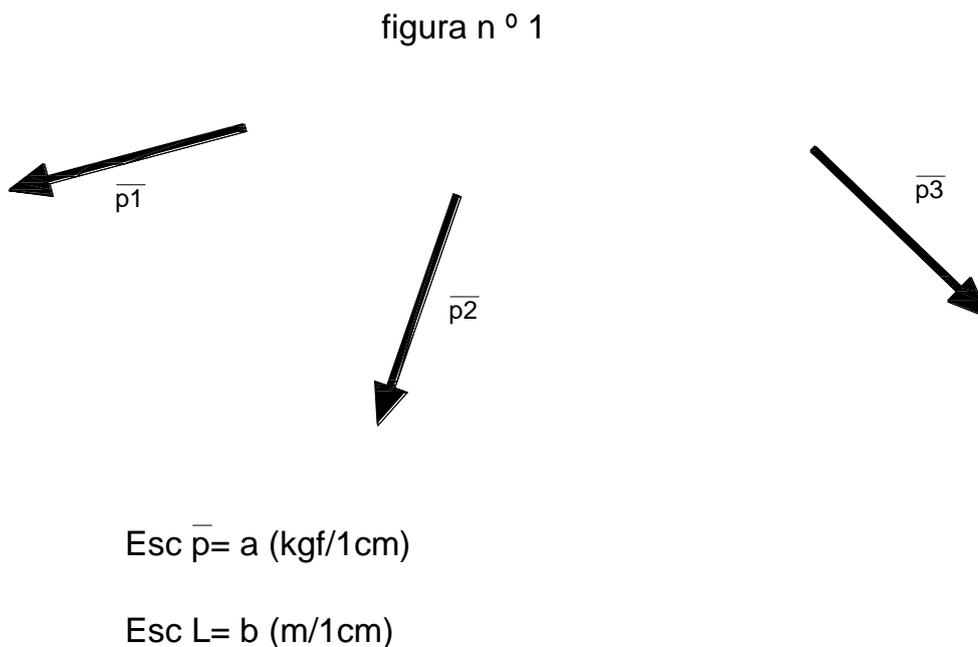


## **TEORÍA DEL POLÍGONO FUNICULAR**

Supongamos un sistema de fuerzas general en el plano de la figura n<sup>o</sup> 1, y debemos determinar en forma gráfica la recta de acción, sentido, módulo de la resultante.

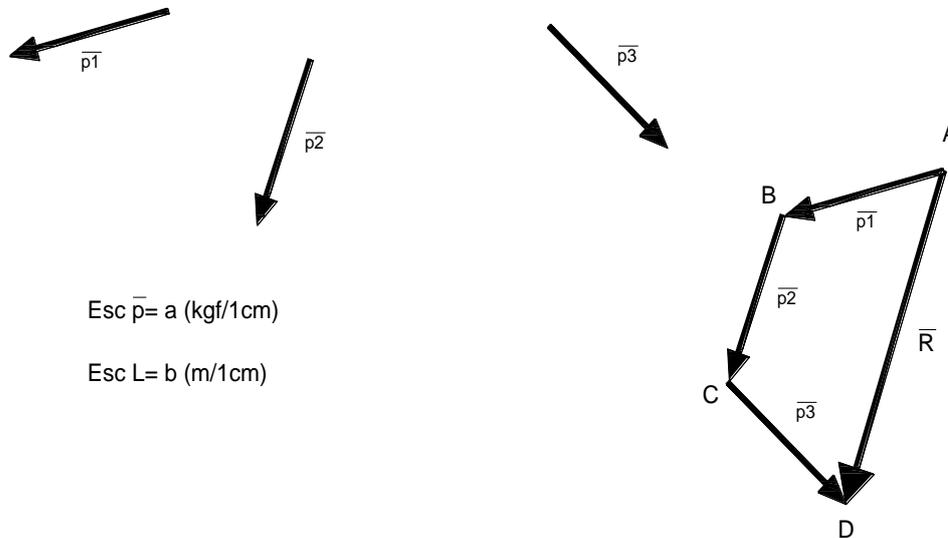


Luego, en una construcción auxiliar del sistema anterior, para determinar la posición, recta de acción, módulo y sentido de la **R**,

\* **1)** Se llevan paralelamente los vectores del sistema y se suman vectorialmente. La resultante de la suma se obtiene uniendo el origen del vector representativo de la primer fuerza con el extremo del vector representativo de la última fuerza del sistema. Cabe destacar, que la suma de vectores es conmutativa, por lo que podemos alternar el orden de los vectores de la suma; (figura n<sup>o</sup> 2).

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

figura n ° 2



\* 2) Luego, la poligonal **ABCD** es reemplazada por una construcción auxiliar, descomponiendo las fuerzas

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{p}_1 \\ \overrightarrow{BC} = \vec{p}_2 \\ \overrightarrow{CD} = \vec{p}_3 \end{cases}$$

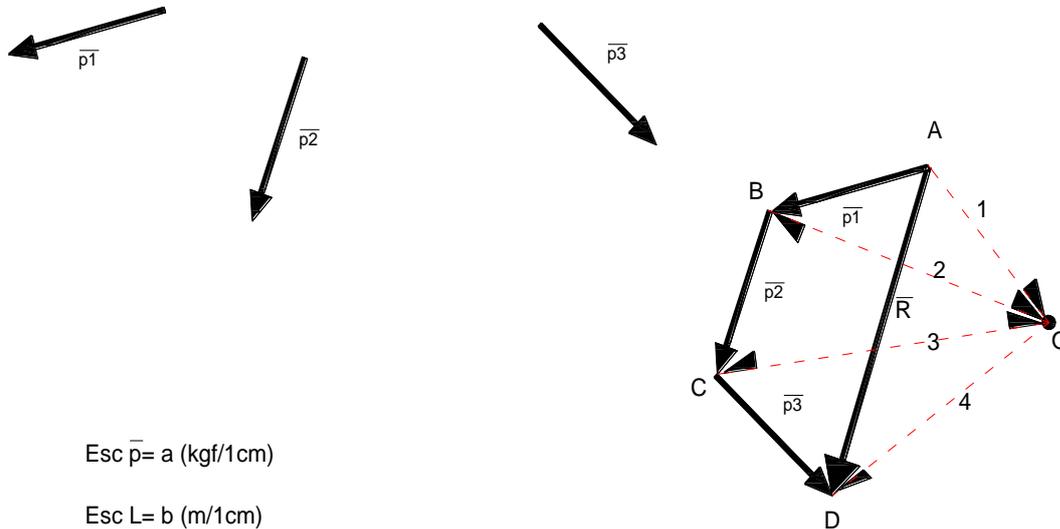
en dos direcciones. Para esto, elegimos un punto arbitrario **O**, que denominamos "polo" del polígono de fuerzas. Seguidamente, se descomponen las fuerzas de esta poligonal, cada una en dos fuerzas,

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \vec{p}_2 = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \\ \vec{p}_3 = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \end{cases}$$

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

Como se observa en la figura n ° 3.

figura n ° 3

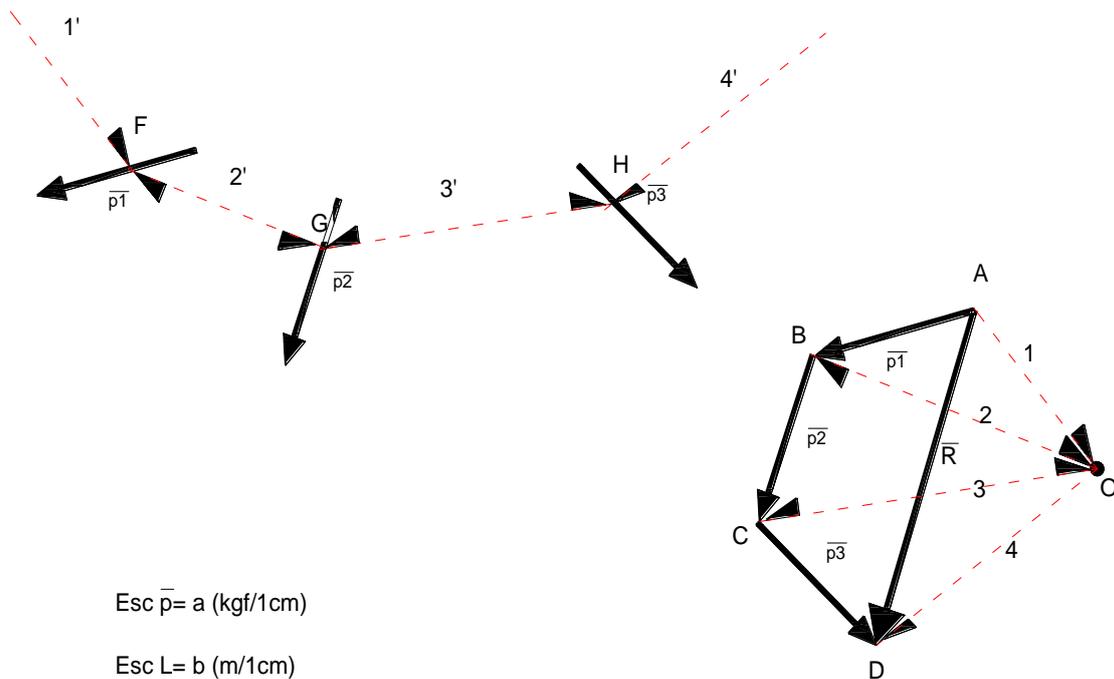


\* 3) obsérvese que los vectores que representativos de las fuerzas 2 y 3 se anulan mutuamente, pues  $\vec{OB}$  pertenece a  $\vec{p}_1$ , y  $\vec{BO}$  pertenece a  $\vec{p}_2$  compartiendo ambos la misma recta de acción, igual intensidad y sentidos opuestos, ocurriendo lo mismo con  $\vec{OC}$  y  $\vec{CO}$  pertenecientes a las fuerzas  $\vec{p}_2$  y  $\vec{p}_3$  respectivamente. Quedando en consecuencia las fuerzas 1 y 4 que componen  $\mathbf{R}$  del sistema.

\* 4) Se trasladan paralelamente las fuerzas **1, 2, 3, y 4** al sistema de fuerzas (figura n ° 4), empezando por algún punto arbitrario de la primer fuerza, en nuestro caso,  $\vec{p}_1$ . Comenzando por esta última, llevamos las fuerzas 1', y 2', que reemplazarán a  $\vec{p}_1$  en  $\mathbf{F}$ . Continuamos con las fuerzas 2' y 3' que reemplazan a  $\vec{p}_2$  en  $\mathbf{G}$ . Concluimos con las fuerzas 3' y 4' que reemplazan a  $\vec{p}_3$  en  $\mathbf{H}$ .

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

figura n<sup>o</sup> 4

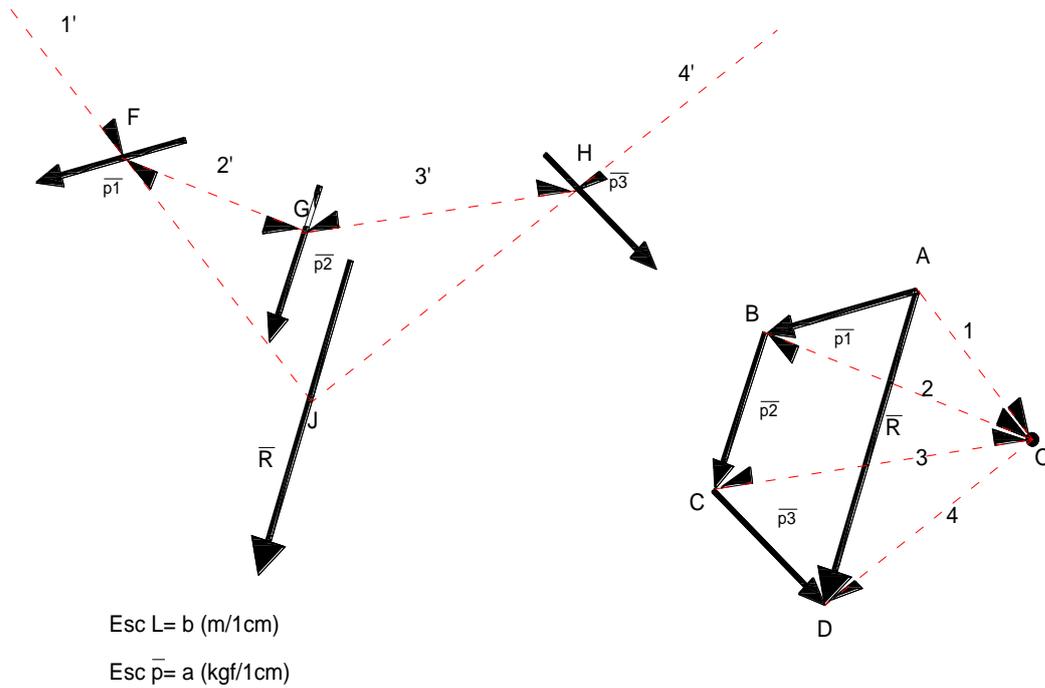


Esta construcción se denomina "**Polígono Funicular**". Y, según lo expuesto, las fuerzas 2 y 3 en el sistema de fuerzas se anulan mutuamente por formar un sistema en equilibrio, de acuerdo al segundo principio de la estática, quedando el sistema equivalente conformado por las fuerzas 1' y 4'.

\* 4) Estas fuerzas **1' y 4'** cuyas rectas de acción se interceptan en el punto **J**, se reemplazan por una fuerza de acuerdo al principio del paralelogramo, siendo esta fuerza, la resultante **R** del sistema, y el punto **J**, un punto de la recta de acción de la misma (figura n<sup>o</sup> 5). Nótese que en el polígono de fuerzas, las fuerzas **1 y 4** reemplazan a **R**, demostrando, de esta forma, la compatibilidad entre el polígono de fuerzas y el polígono funicular. Nos resta, trasladar paralelamente **R** al sistema pos **J**.

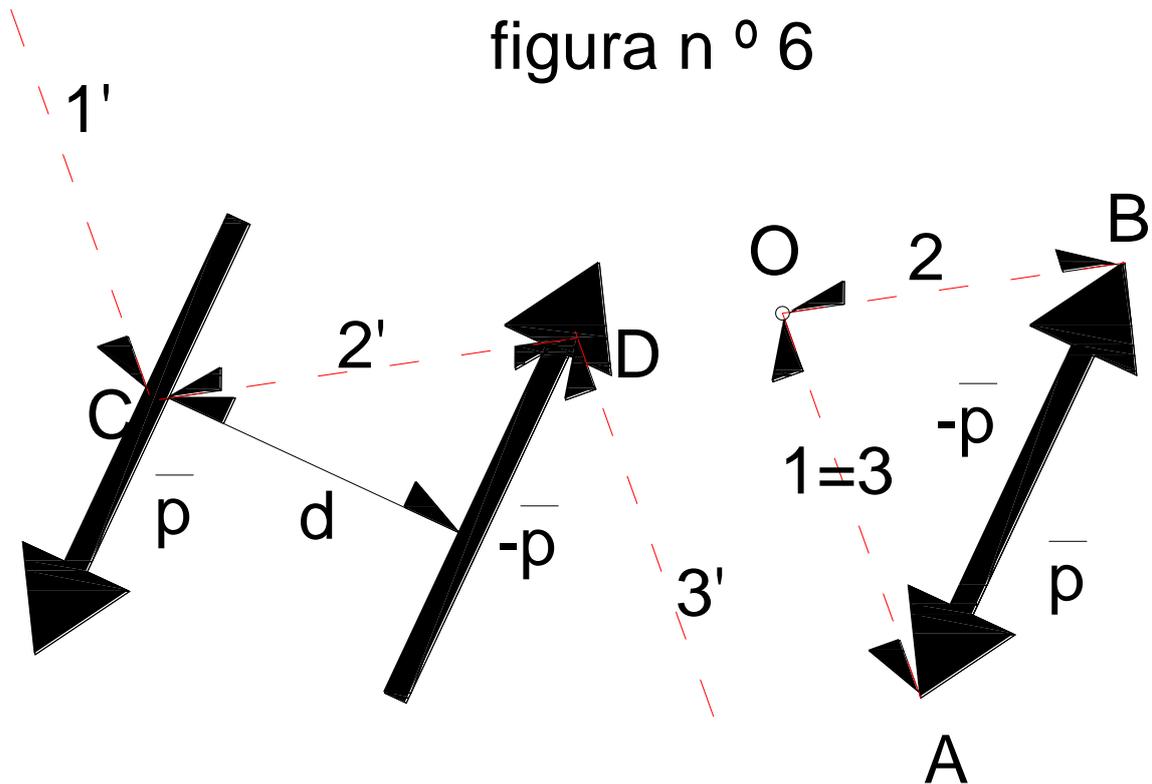
**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

figura n<sup>o</sup> 5



**Polígono funicular de un par de fuerzas  $\vec{p}$  y  $-\vec{p}$ .**

Sea el caso de un par de fuerzas en el plano,  $\vec{p}$  y  $-\vec{p}$  separadas por una cierta distancia d (figura n<sup>o</sup> 6), y le aplicamos la teoría del polígono funicular.

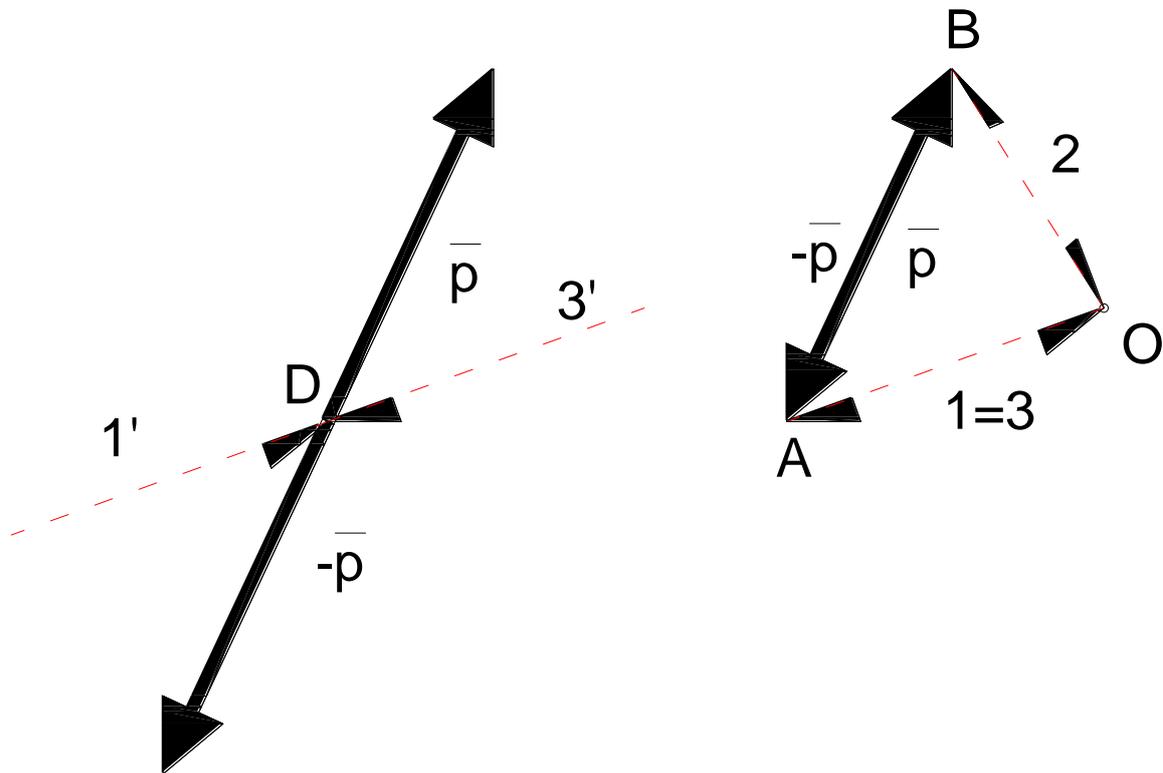


Observamos, en la figura n ° 6, al ser coincidentes las fuerzas **1 y 3** del polígono de fuerzas, resultan paralelas las fuerzas **1' y 3'** del polígono funicular, en consecuencia, se dice, que el polígono de fuerzas es cerrado, y el polígono funicular abierto, es decir, que se reemplazan el par  $\vec{p}$  y  $-\vec{p}$  por el par de fuerzas **1' y 3'**. En conclusión, cuando el polígono de fuerzas es cerrado, y el polígono funicular abierto, el sistema se reduce a un par en el plano.

#### Polígono funicular de un sistema en equilibrio

Sea el sistema en equilibrio de la figura n ° 7, formado por las fuerzas  $\vec{p}$  y  $-\vec{p}$  que comparten la misma recta de acción.

figura n<sup>o</sup> 7



Como vemos, las fuerzas **1'** y **3'** del polígono funicular comparten la misma recta de acción, esto implica que, el polígono de fuerzas es cerrado, lo mismo que el polígono funicular. Esto indica que el sistema de fuerzas está en equilibrio. En conclusión, " cuando los polígonos de fuerza y funicular son cerrados, el sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio".

#### DESCOMPOSICIÓN GRÁFICA DE UNA FUERZA EN 3 DIRECCIONES EN EL PLANO

Una fuerza en el plano en 3 fuerzas cuyos vectores representativos tengan direcciones no sean concurrentes a un punto.

El problema puede presentar las siguientes posibilidades:

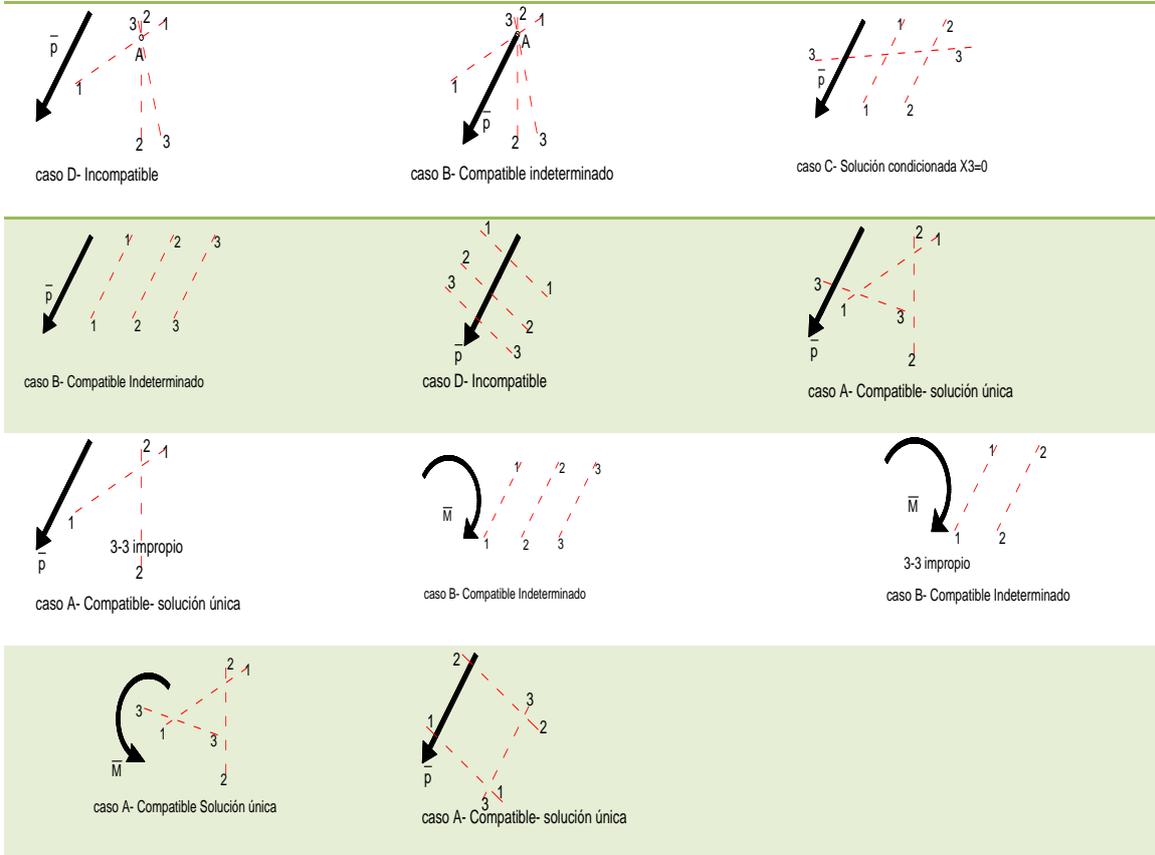
- \* A) Solución única;
- \* B) Solución indeterminada;

# APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN PÉRGOLA

\* C) Solución condicionada;

\* D) Incompatible

En la tabla siguiente resumimos estos casos posibles de fuerza  $\vec{p}$  y 3 direcciones 1-1; 2-2; y 3-3



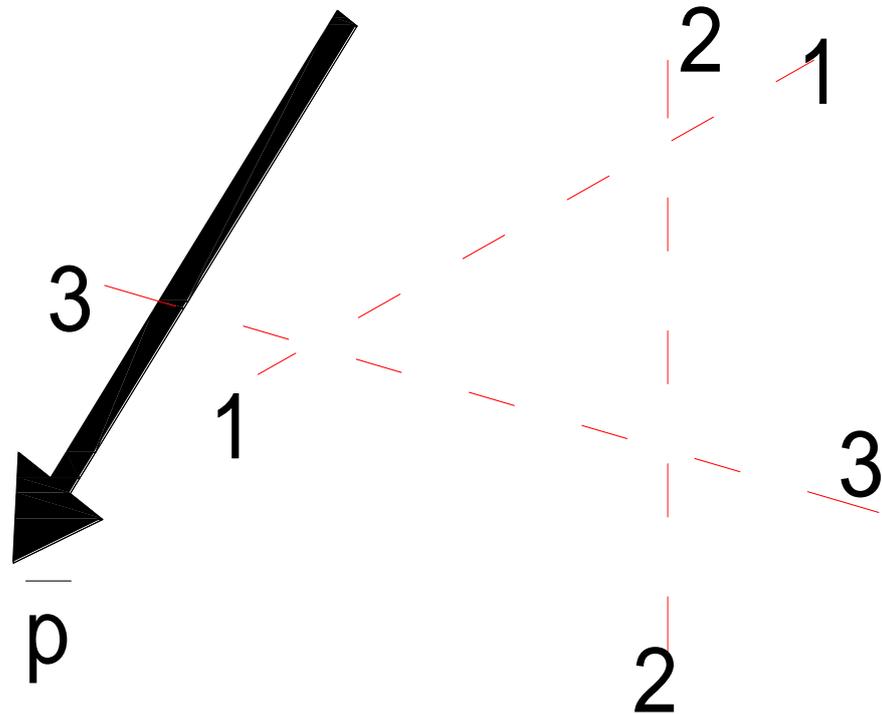
## a) Método gráfico de Culmann

Para la descomposición de una fuerza en tres direcciones en forma gráfica, es imprescindible utilizar las escalas de longitud y de fuerzas seleccionadas convenientemente.

$$(1) \begin{cases} Esc \vec{p} = \alpha \left( \frac{\text{Unidad de Fuerza}}{1cm} \right) \\ Esc Long = \beta \left( \frac{\text{Unidad de Long}}{1cm} \right) \end{cases}$$

Considerando la figura n<sup>o</sup> 8, en la que la fuerza  $\vec{p}$  se debe descomponer en las direcciones 1-1; 2-2; y 3-3.

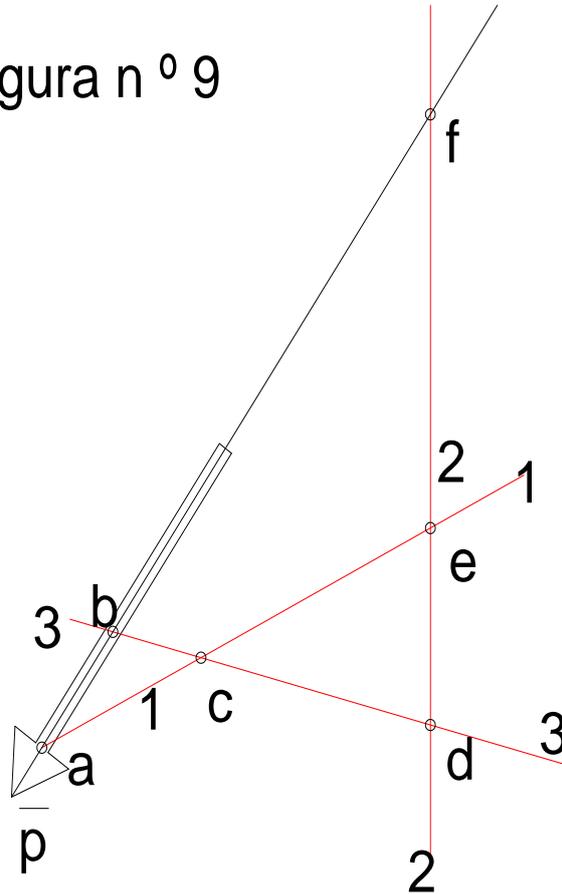
## Figura n<sup>o</sup> 8



Como podemos observar en la figura n<sup>o</sup> 8, las fuerzas desconocidas y  $\vec{p}$  se interceptan en un punto, 2 a 2 como lo indica la figura n<sup>o</sup> 9.  $\vec{p}$  y 1-1 se interceptan en el punto **a**,  $\vec{p}$  y 2-2 se interceptan en el punto **f**,  $\vec{p}$  y 3-3 se interceptan en el punto **b**, mientras que 1-1 y 2-2 se interceptan en el punto **e**, 1-1 y 3-3 se interceptan en el punto **c**, y, finalmente, 2-2 y 3-3 se interceptan en el punto **d** (figura n<sup>o</sup> 9).

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

Figura n<sup>o</sup> 9

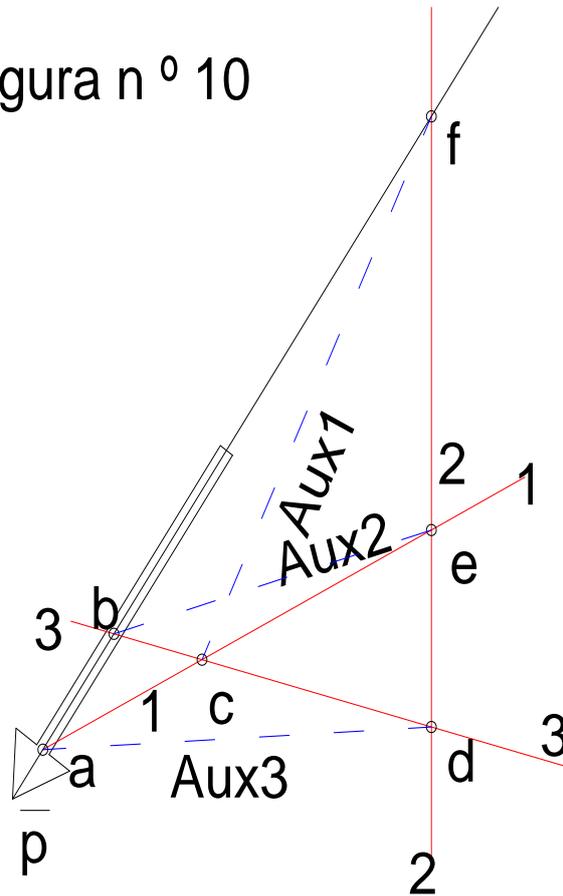


Ahora, se pueden unir mediante rectas denominadas auxiliares, los puntos de intercepción de las fuerzas desconocidas y  $\vec{p}$ . Se pueden trazar 3 rectas auxiliares como lo indica la figura n<sup>o</sup> 10, las mismas son:

$$(2) \begin{cases} Aux_2 = \overline{be} \\ Aux_3 = \overline{ad} \\ Aux_1 = \overline{cf} \end{cases}$$

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

Figura n<sup>o</sup> 10

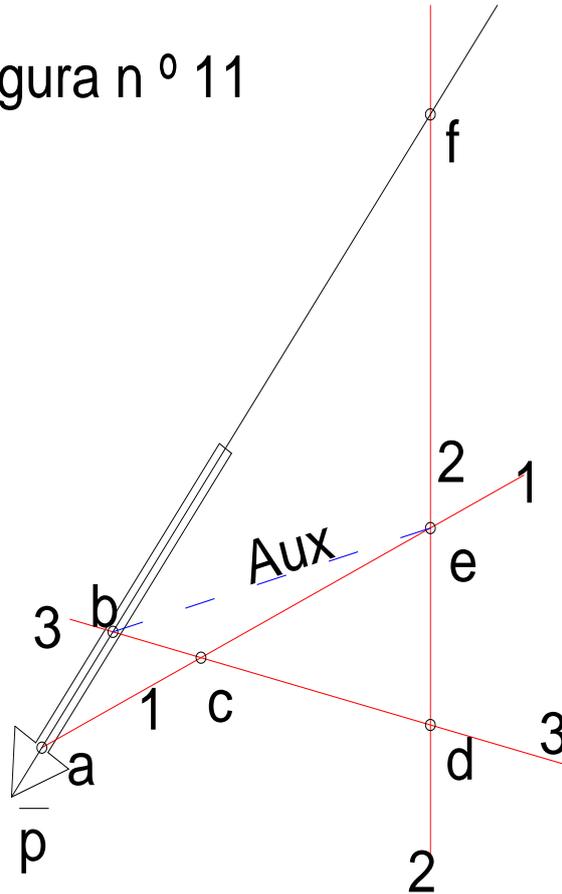


Entonces, si en la construcción se pueden determinar 7 rectas, teniendo en cuenta  $\vec{p}$ , las fuerzas incógnitas, y las 3 auxiliares, entonces, el sistema es compatible con solución única.

Para la descomposición de una fuerza en 3 direcciones, seguimos el procedimiento a continuación;

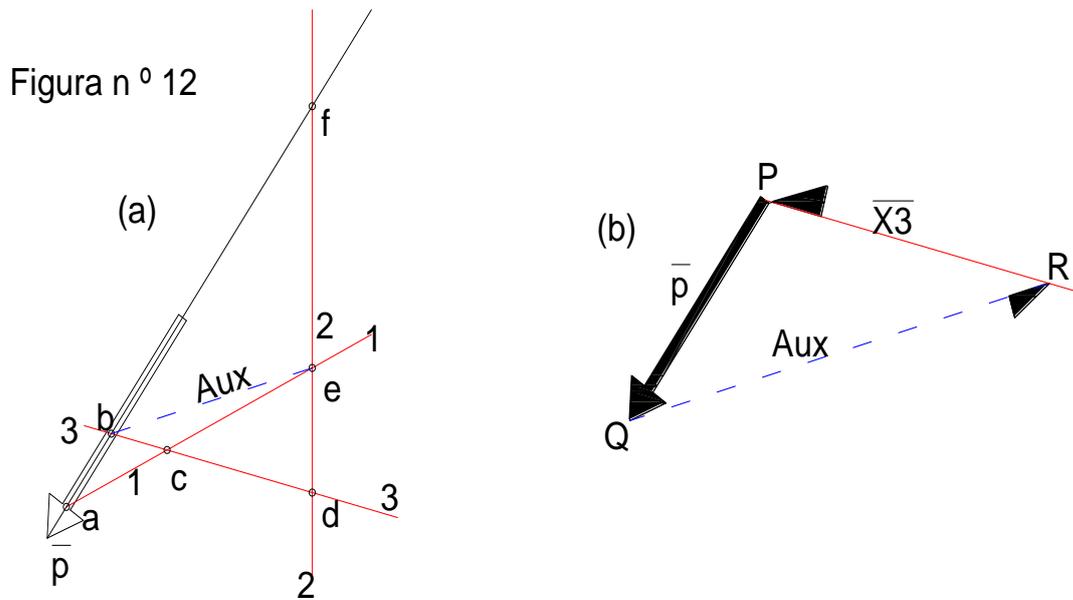
\* 1) Verificado que el sistema es compatible de solución única, se elige una auxiliar, por ejemplo, auxiliar 2, que une las fuerzas  $\vec{p}$  y 3-3, y 2-2 con 1-1. (figura n<sup>o</sup> 11).

Figura n<sup>o</sup> 11



\* 2) Descomponemos la fuerza  $\vec{p}$  en las direcciones de la auxiliar y **3-3**, como mostramos en la figura n<sup>o</sup> 12(b). Previamente, para representar  $\vec{p}$  se deberá dividir el valor de la misma por la escala de fuerzas correspondiente.

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

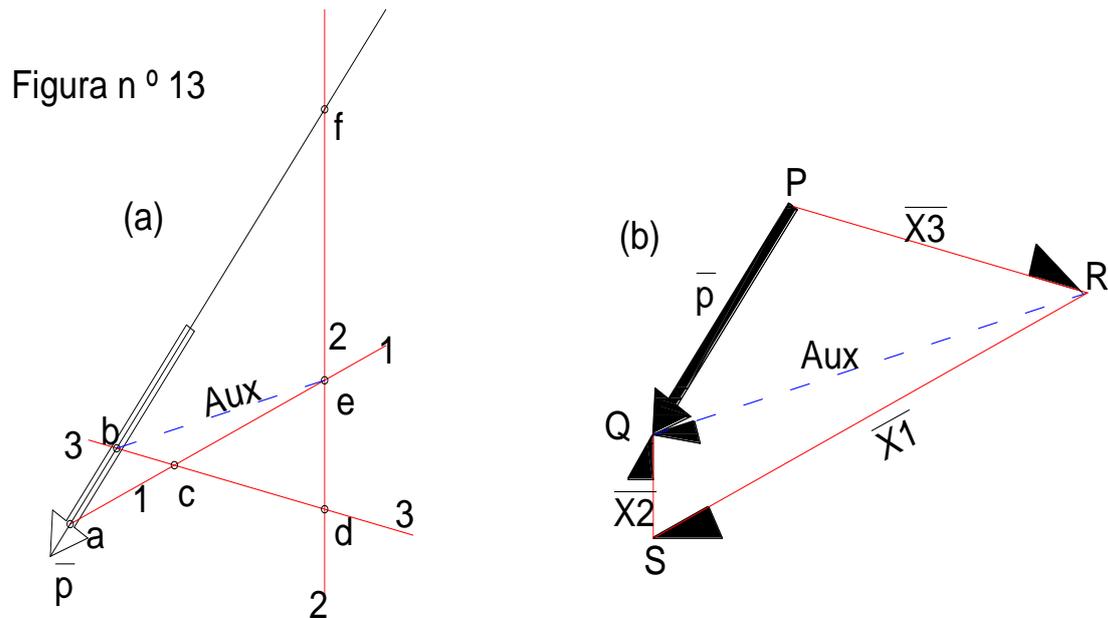


Aquí, se puede determinar  $\overrightarrow{X_3}$  multiplicando el segmento  $\overline{RQ}$  por la escala de fuerzas,

$$(3) \quad \overrightarrow{X_3} = \overline{RQ} \cdot Esc \vec{p}$$

\* 3) Ahora que se conocen las fuerzas  $\overrightarrow{X_3}$  y  $\overrightarrow{A_{ux}}$ , descomponemos la auxiliar en las direcciones **1-1** y **2-2** llevando paralelas a las direcciones de las mismas por el origen y extremo de la auxiliar a las direcciones **1-1** y **2-2** respectivamente, finalizando el proceso de construcción (figura n° 13-b).

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**



Finalizado el proceso de construcción gráfica de Culmann, determinamos los módulos de las fuerzas  $\vec{X}_1$  y  $\vec{X}_2$  multiplicando por la escala de fuerzas los segmentos representativos de los vectores.

$$(4) \begin{cases} \vec{X}_1 = \overline{RS} \cdot Esc \vec{p} \\ \vec{X}_2 = \overline{SQ} \cdot Esc \vec{p} \end{cases}$$

Como podemos observar de la figura n<sup>o</sup> 13(b) nos queda formado el cuadrilátero  $QPRS$  de la descomposición.

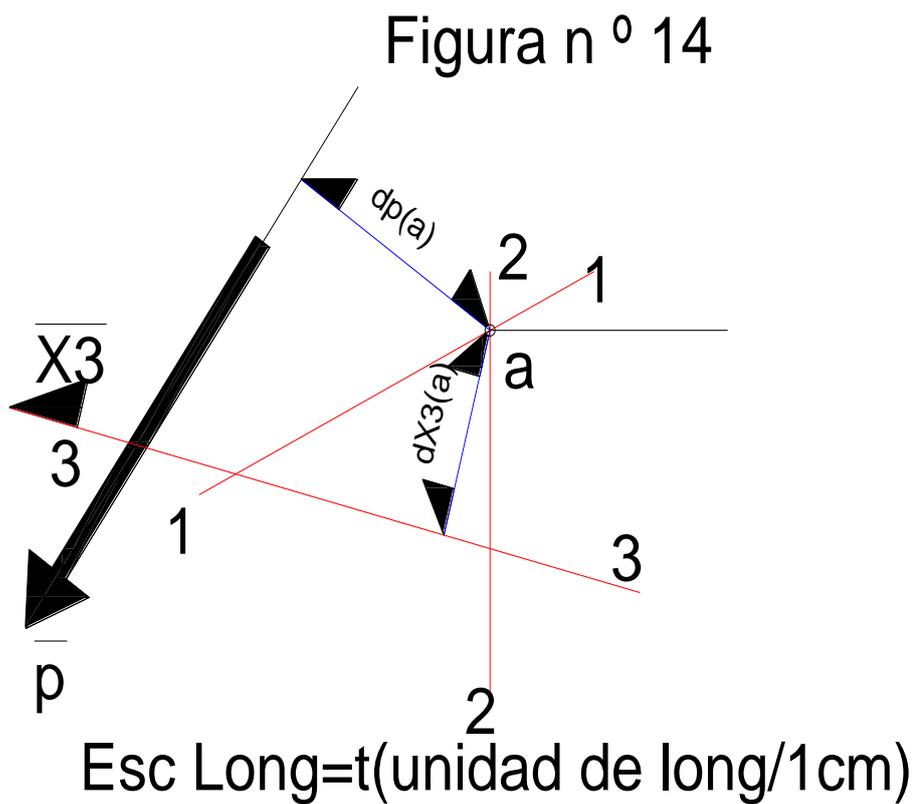
**b) Método gráfico numérico de Ritter**

Este método se basa en la aplicación del teorema de Varignon para la determinación de las 3 fuerzas desconocidas de un sistema general cuyas direcciones de los vectores representativos se conocen.

Para este método, es necesario establecer una escala de longitudes adecuada, pero no se precisa una escala de fuerzas.

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

Consideremos el sistema de fuerzas de la figura n<sup>o</sup> 8. con la fuerza  $\vec{p}$  y las direcciones de las fuerzas desconocidas **1-1**, **2-2**, y **3-3** que debemos determinar sus intensidades y sentidos. Para determinar cada fuerza desconocida, aplicamos el teorema de Varignon tomando como centro de momentos el punto de intersección de las otras 2 rectas de acción de las restantes fuerzas. Comencemos por determinar el valor de la fuerza  $X_3$  cuya dirección es **3-3**. Para ello, aplicamos el teorema de Varignon en el punto **a** de intersección de las direcciones **1-1**, y **2-2**, como se muestra en la figura n<sup>o</sup> 14, en donde  $d_p^a$  y  $d_{X_3}^a$  son las distancias de  $\vec{p}$  al centro de momentos **a**, y la distancia de la fuerza  $X_3$  al punto **a**.



Luego, aplicando el teorema de Varignon en el punto **a**, resulta,

$$(5) \quad \vec{M}_p^a = \vec{p} \cdot d_p^a = \vec{X}_1 \cdot d_{X_1}^a + \vec{X}_2 \cdot d_{X_2}^a + \vec{X}_3 \cdot d_{X_3}^a$$

Debido a que  $d_{X_1}^a$  y  $d_{X_2}^a$  de la ecuación (5) son nulas, entonces (5) queda reducida a,

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

$$(6) \quad \left| \vec{p} \cdot \mathbf{d}_p^a \right| = \left| \vec{X}_3 \cdot \mathbf{d}_{X_3}^a \right|$$

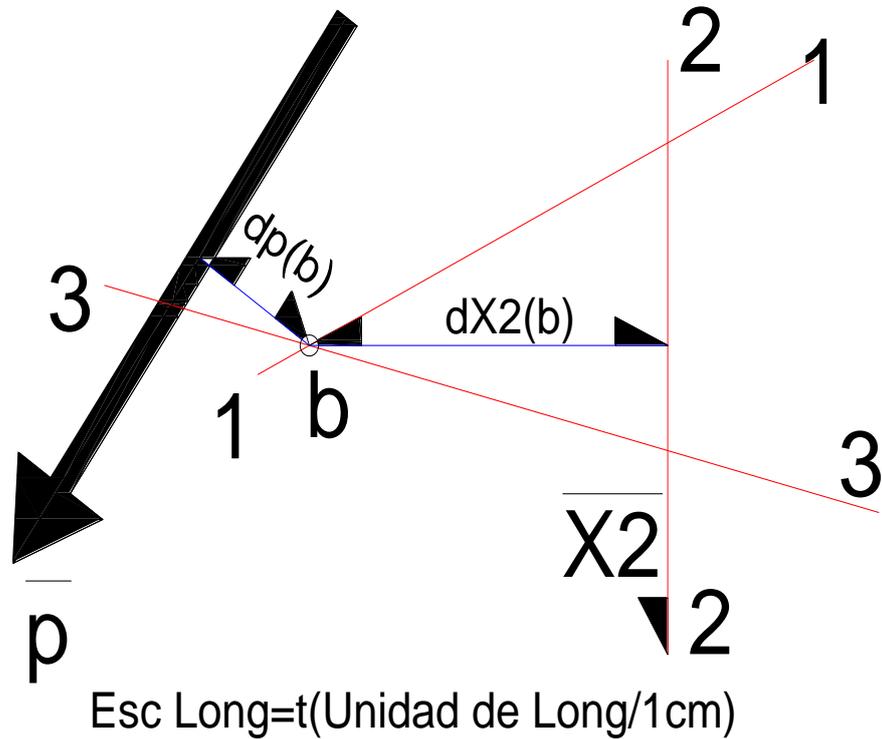
De (6), obtenemos  $\vec{X}_3$ ,

$$(7) \quad \left| \vec{X}_3 \right| = \frac{\left| \vec{p} \cdot \mathbf{d}_p^a \right|}{\mathbf{d}_{X_3}^a}$$

En cuanto al sentido de  $\vec{X}_3$ , deberá ser el mismo sentido que sentido de giro del momento de  $\vec{p}$  respecto de a cuando se trata de un sistema equivalente, y opuesto cuando se trata de un sistema en equilibrio.

A continuación, determinamos el valor de la fuerza  $\vec{X}_2$  cuyo vector representativo tiene la dirección 2-2, para lo cual, aplicamos el teorema de Varignon tomando centro de momentos el punto **b** de intercepción de las fuerzas  $\vec{X}_1$  y  $\vec{X}_3$  con lo que se anulan los brazos de palanca de las mismas respecto estos puntos. En la figura n º 15 mostramos este caso, donde las distancias  $d_p^b$  y  $d_{X_2}^b$  de  $\vec{p}$  al punto **b**, y de  $\vec{X}_2$  al punto **b** respectivamente.

## Figura n<sup>o</sup> 15



De acuerdo al teorema de Varignon en el punto **b**, resulta,

$$(8) \quad \overline{\mathbf{M}}_p^b = \vec{p} \cdot \mathbf{d}_p^b = \overline{\mathbf{X}}_1 \cdot \mathbf{d}_{X1}^b + \overline{\mathbf{X}}_2 \cdot \mathbf{d}_{X2}^b + \overline{\mathbf{X}}_3 \cdot \mathbf{d}_{X3}^b$$

Siendo  $\mathbf{d}_{X3}^b$  y  $\mathbf{d}_{X1}^b$  nulas por pertenecer este punto ambas rectas, la ecuación (8) queda reducida a,

$$(9) \quad \left| \vec{p} \cdot \mathbf{d}_p^b \right| = \left| \overline{\mathbf{X}}_2 \cdot \mathbf{d}_{X2}^b \right|$$

De (9), se obtiene  $\overline{\mathbf{X}}_2$

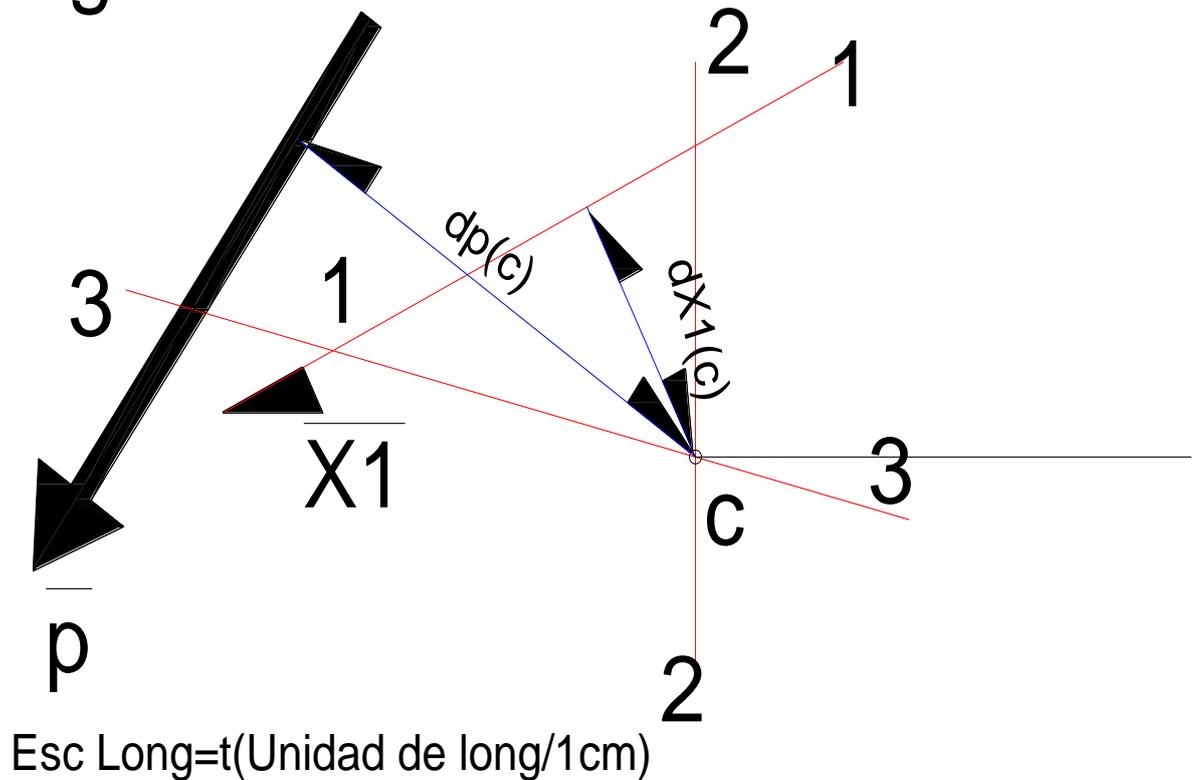
$$(10) \quad \left| \overline{\mathbf{X}}_2 \right| = \frac{\left| \vec{p} \cdot \mathbf{d}_p^b \right|}{\mathbf{d}_{X2}^b}$$

La determinación del sentido de  $\overline{\mathbf{X}}_2$  se realiza en forma análoga al caso anterior.

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

Finalizamos la explicación, con la determinación de la fuerza  $\overline{X}_1$ , para lo cual, aplicamos el teorema de Varignon en el punto **c**, de intercepción entre las direcciones **2-2**, y **3-3**, de los vectores que representan las fuerzas  $\overline{X}_2$  y  $\overline{X}_3$  respectivamente como se muestra en la figura n<sup>o</sup> 16, donde las distancias  $d_p^c$  y  $d_{x1}^c$  de  $\vec{p}$  y  $\overline{X}_1$  al punto **c** respectivamente.

Figura n<sup>o</sup> 16



De acuerdo al teorema de Varignon en el punto **c**, resulta,

$$(11) \quad \overline{M}_p^c = \vec{p} \cdot d_p^c = \overline{X}_1 \cdot d_{x1}^c + \overline{X}_2 \cdot d_{x2}^c + \overline{X}_3 \cdot d_{x3}^c$$

Siendo  $d_{x3}^c$  y  $d_{x2}^c$  nulas por pertenecer este punto a ambas rectas, la ecuación (8) queda reducida a,

$$(12) \quad \left| \vec{p} \cdot d_p^c \right| = \left| \overline{X}_1 \cdot d_{x1}^c \right|$$

De (9), se obtiene  $\overline{X}_1$

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

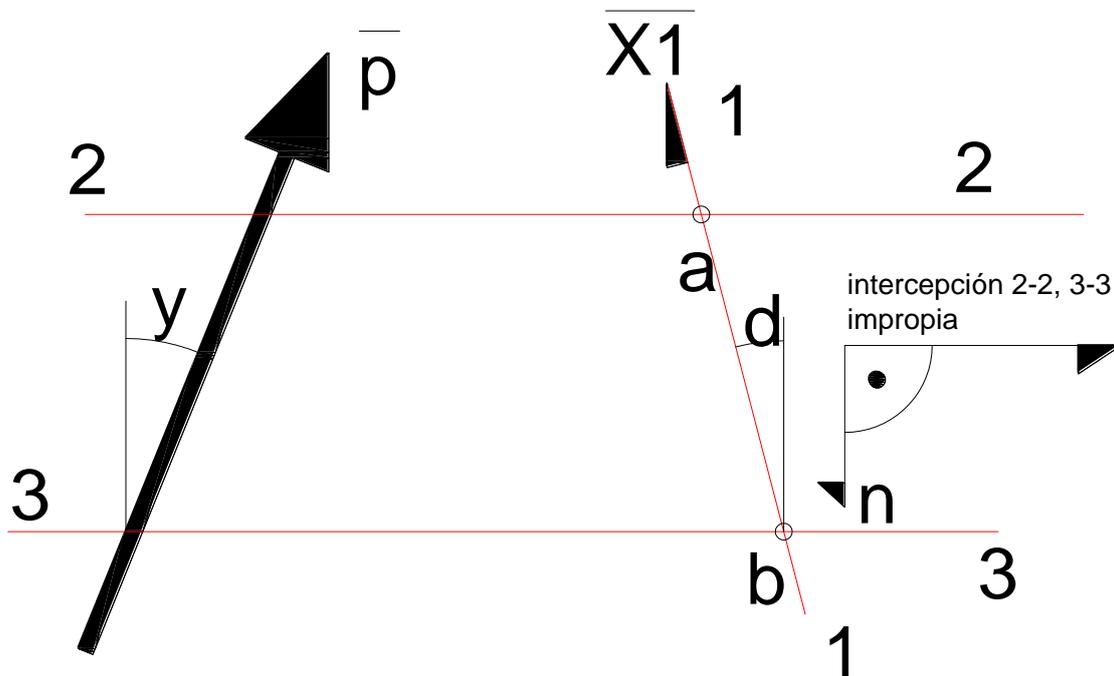
$$(13) \quad \left| \overrightarrow{X}_1 \right| = \frac{\left| \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{d}_p^c \right|}{d_{X_1}^c}$$

La determinación del sentido de  $\overrightarrow{X}_1$  se realiza en forma análoga a los casos anteriores.

Para el caso particular que dos direcciones sean paralelas, con lo cual el punto de intercepción de las mismas es impropio, se reemplaza la correspondiente ecuación de momentos por una sumatoria de proyecciones de fuerzas sobre la normal a la dirección del impropio.

Sea por ejemplo, el sistema de la figura n<sup>o</sup> 17, en la cual las direcciones 2-2, y 3-3 representativas de los vectores de las fuerzas  $\overrightarrow{X}_2$  y  $\overrightarrow{X}_3$  son paralelas.

figura n<sup>o</sup> 17



De la figura n<sup>o</sup> 17, al no poder aplicar el teorema de Varignon respecto de un punto impropio,

**APUNTE COMPILADO Y REDACTADO POR EL INGENIERO FABIÁN  
PÉRGOLA**

reemplazamos esta ecuación por la sumatoria de proyecciones de fuerzas en la dirección **n-n**, normal a la dirección del impropio, resultando en un sistema equivalente,

$$(14) \quad \sum \text{Proy}_{nn} \rightarrow \left| \vec{p} \cdot \cos \hat{y} \right| = \left| \vec{X}_1 \cdot \cos \hat{e} \right|$$

de (14), surge,

$$(15) \quad \left| \vec{X}_1 \right| = \left| \frac{\vec{p} \cdot \cos \hat{y}}{\cos \hat{e}} \right|$$

Mientras que en un sistema en equilibrio, debe resultar,

$$(16) \quad \sum \text{Proy}_{nn} = 0 \rightarrow \vec{p} \cdot \cos \hat{y} + \vec{X}_1 \cdot \cos \hat{e} = 0$$

Surgiendo de (16),

$$(17) \quad \vec{X}_1 = -\vec{p} \cdot \frac{\cos \hat{y}}{\cos \hat{e}}$$