TEOREMA DE VARIGNON

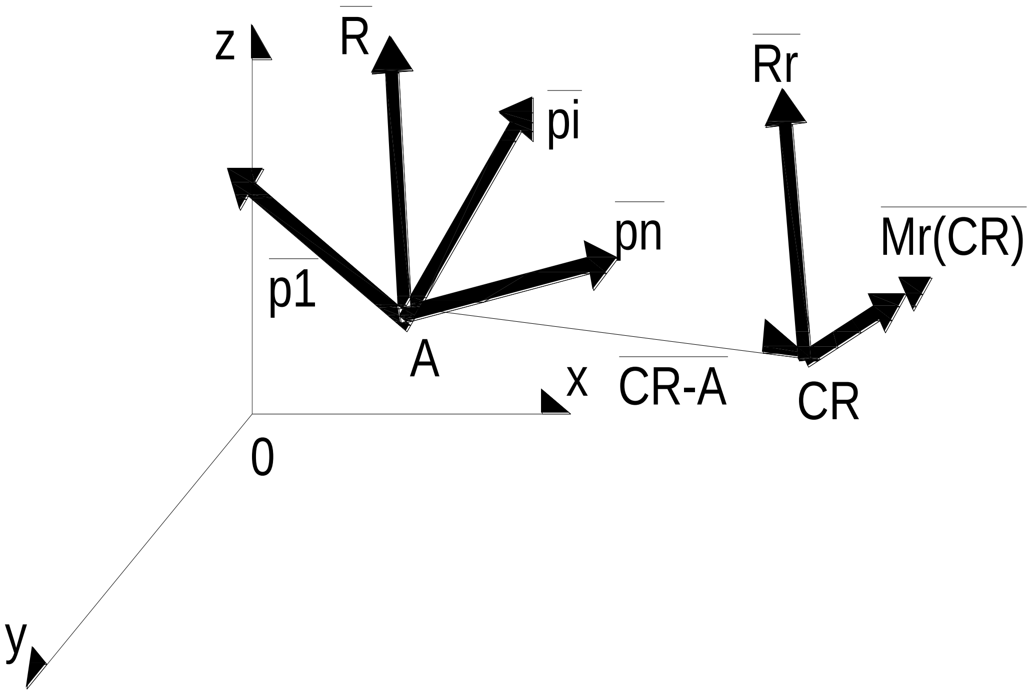
En un sistema de fuerzas cualquiera, ya sea espacial o plano, se tiene qué,

Sea un sistema de fuerzas cualesquiera p_i cuya resultante es $\overrightarrow{R_R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}$, entonces se cumple el siguiente teorema:

"La sumatoria de los momentos de un sistema de fuerzas respecto de un punto A, es igual al momento de la resultante respecto del mismo punto A".

Comenzaremos la demostración considerando un sistema de fuerzas concurrentes como el que se muestra en la figura n º 1.

figura n º 1



La sumatoria de los momentos de las fuerzas respecto de CR es,

$$(1)\quad \overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{pi}}^{\mathrm{CR}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}\, x \left(\overrightarrow{CR - A}\right)$$

Luego $\left(\overrightarrow{CR - A}\right)$ es un vector constante, por lo que la expresión (1) se puede escribir,

$$(2)\quad \overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{pi}}^{\mathrm{CR}}} = \left(\overrightarrow{p_1} + \ldots. + \overrightarrow{p_i} + \ldots. + \overrightarrow{p_n}\right) x \left(\overrightarrow{CR - A}\right)$$

Siendo $\vec{R} = \overrightarrow{p_1} + ... + \overrightarrow{p_i} + ... + \overrightarrow{p_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}$ (3)

Reemplazando (3) en (2). resulta,

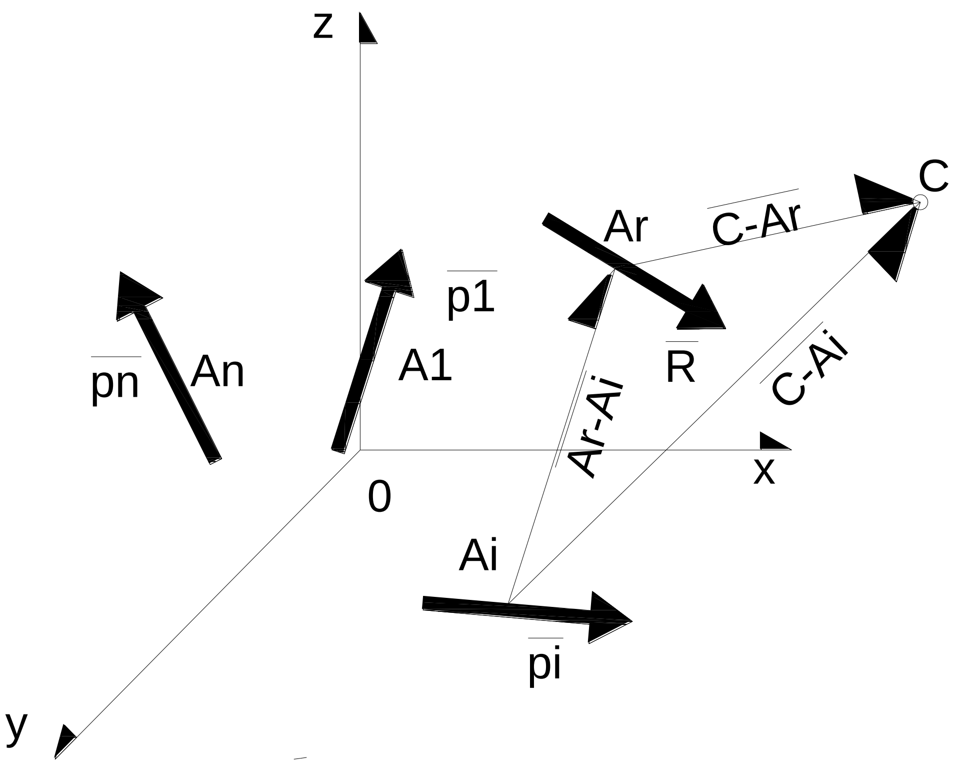
$$(4) \quad \overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{pi}}^{\mathrm{CR}}} = \vec{R}x\left(\overrightarrow{CR - A}\right)$$

Que es lo que se quería demostrar.

Luego, la resultante de un sistema de fuerzas es un sistema equivalente al sistema de fuerzas, que reemplaza al mismo, y, cuya recta es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyo momento de la misma respecto de cualquier punto **A** del espacio, sea igual a la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto de **A**.

Para demostrar esto, consideramos el sistema de fuerzas general del espacio p_i de la figura n º 2, un punto A_R de la recta de acción de la resultante del sistema **R**, y el punto **c** de reducción.

figura n º 2



Luego, la suma de los momentos de las fuerzas del sistema $\overrightarrow{p_i}$, como hemos estudiado, es,

$$(5)\quad \overrightarrow{\mathrm{M}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{pi}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} x \left(\overrightarrow{C - A_i}\right)$$

Podemos expresar los radio vectores posición de las fuerzas $\left(\overrightarrow{C - A_i}\right)$ como la suma de los vectores,

$$(6)\quad \overrightarrow{\mathrm{C} - \mathrm{A}_{\mathrm{i}}} = \overrightarrow{A_R - A_i} + \overrightarrow{C - A_R},$$

pudiéndose expresar (5), después de reemplazar (6) en esta,

$$(7)\quad \overrightarrow{\mathrm{M}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{pi}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} x \left[\overrightarrow{C - A_R} + \overrightarrow{A_R - A_i}\right]$$

que es lo mismo,

$$(8) \quad \overrightarrow{M_{pi}^{C}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} x \left(\overrightarrow{C - A_R} \right) + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} x \left(\overrightarrow{A_R - A_i} \right)$$

El segundo término del segundo miembro de (8) representa la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto del punto de la recta de acción de la resultante A_R. Ahora bien, como la resultante **R** reemplaza el sistema siendo un sistema equivalente de este, entonces, la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto de un punto de la recta de acción de la misma A_R es nulo, y, al ser nulo el momento de **R** respecto cualquier punto de su recta de acción, por consiguiente, el segundo término del segundo miembro de (8) es nulo.

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} x \left(\overrightarrow{C - A_R} \right) = 0$$

Quedando (8) de la siguiente expresión:

$$(10) \quad \overrightarrow{M_{pi}^{C}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} x \left(\overrightarrow{C - A_R} \right) = \overrightarrow{M_R^C}$$

Quedando demostrado de esta forma el **"Teorema de Varignon"** para un sistema general de fuerzas en el espacio.

DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN EL ESPACIO

1 º) Sistema de fuerzas generales

Un sistema de fuerzas general en el espacio se puede descomponer en 6 fuerzas desconocidas. Para que el problema sea de solución única, se deberá cumplir,

* 1) no deben concurrir a un punto más de 3 rectas;

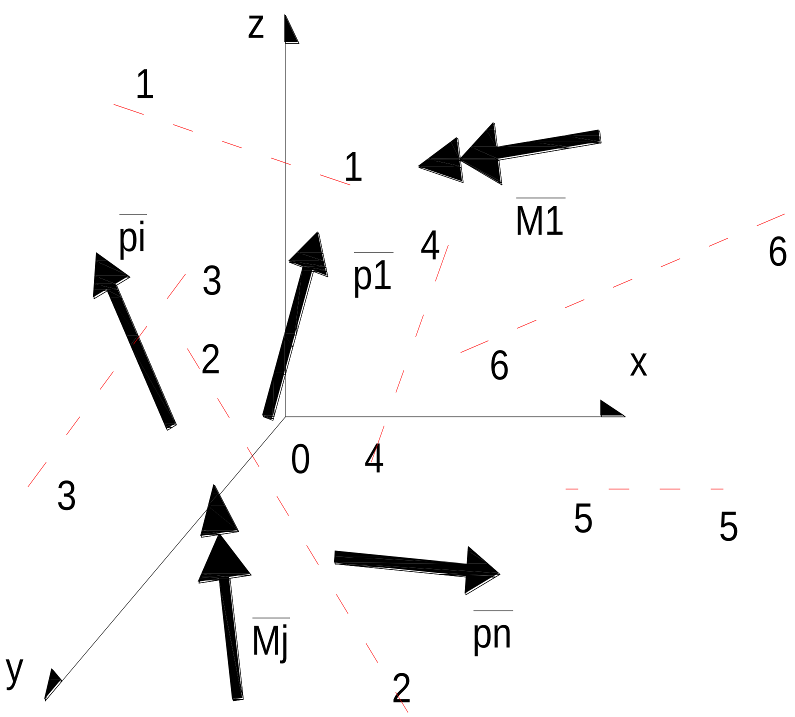
* 2) no deben cortar a una misma recta más de 5 direcciones;

* 3) no deben ser coplanares mas de 3 direcciones;

Se deben conocer tanto, un punto de la recta de acción de cada fuerza como como las direcciones de las mismas.

Supongamos el sistema general de fuerzas de la figura n º 3, al que debemos descomponer por otro sistema de fuerzas actuante en las direcciones **1-1; 2-2; 3-3; 4-4; 5-5;** y **6-6**.

figura n º 3



Llamando $\overrightarrow{X_j}$ a las fuerzas desconocidas, para determinar un sistema de 6 fuerzas equivalentes al sistema de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ se deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$
(11)\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \cos\alpha_i = \sum_{j=1}^{6} X_j \cdot \cos\alpha_j \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{xx}^{pi} = \sum_{j=1}^{6} \mathrm{Mom}_{xx}^{Xj} \\
\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \cos\beta_i = \sum_{j=1}^{6} X_j \cdot \cos\beta_j \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{yy}^{pi} = \sum_{j=1}^{6} \mathrm{Mom}_{yy}^{Xj} \\
\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \cos\gamma_i = \sum_{j=1}^{6} X_j \cdot \cos\gamma_j \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{zz}^{pi} = \sum_{j=1}^{6} \mathrm{Mom}_{zz}^{Xj}
\end{cases}
$$

Para determinar un sistema de fuerzas en equilibrio con el sistema $\overrightarrow{p_i}$, se deberá cumplir,

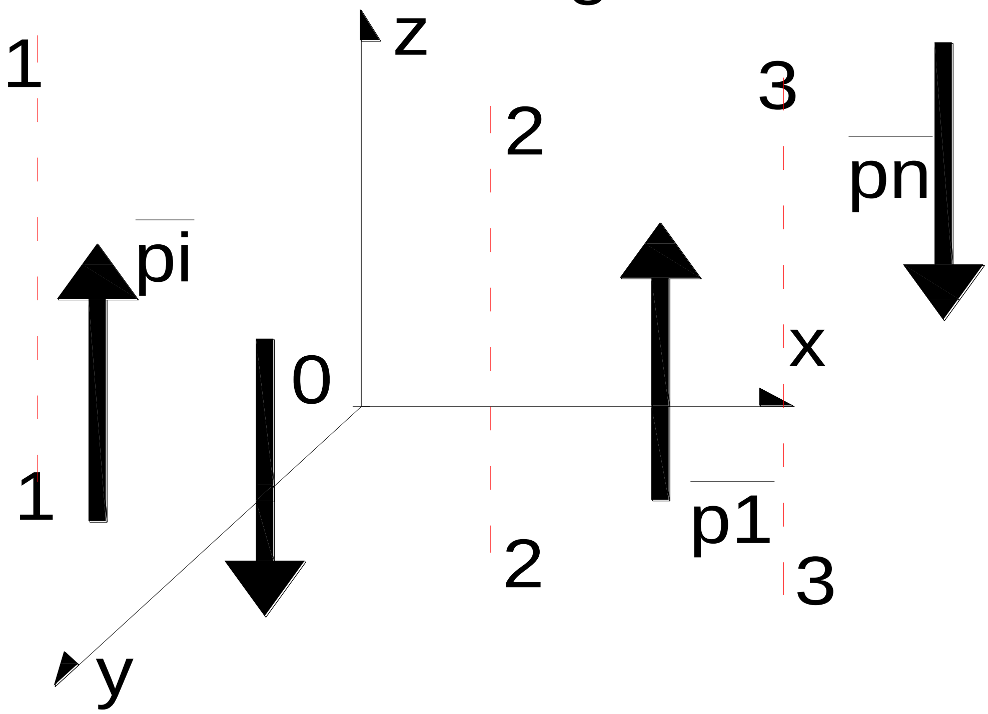
$$(12)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{6} X_j.\cos\alpha_j = 0 \quad ; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{xx}^{pi} + \sum_{j=1}^{6} \mathrm{Mom}_{xx}^{Xj} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i + \sum_{j=1}^{6} X_j.\cos\beta_j = 0 \quad ; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{yy}^{pi} + \sum_{j=1}^{6} \mathrm{Mom}_{yy}^{Xj} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i + \sum_{j=1}^{6} X_j.\cos\gamma_j = 0 \quad ; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{zz}^{pi} + \sum_{j=1}^{6} \mathrm{Mom}_{zz}^{Xj} = 0 \end{cases}$$

2 º) Sistema de fuerzas paralelas

Un sistema de fuerzas paralelas se puede descomponer en 3 fuerzas cuyas direcciones sean paralelas a las fuerzas del sistema con la condición que las mismas no sean coplanares, y conociendo un punto de la recta de acción de los vectores representativos de las mismas.

Sea el sistema de fuerzas paralelas $\overrightarrow{p_i}$ que descomponemos en las direcciones **1-1; 2-2 ; y, 3-3** de la figura n º 4.

figura n º 4



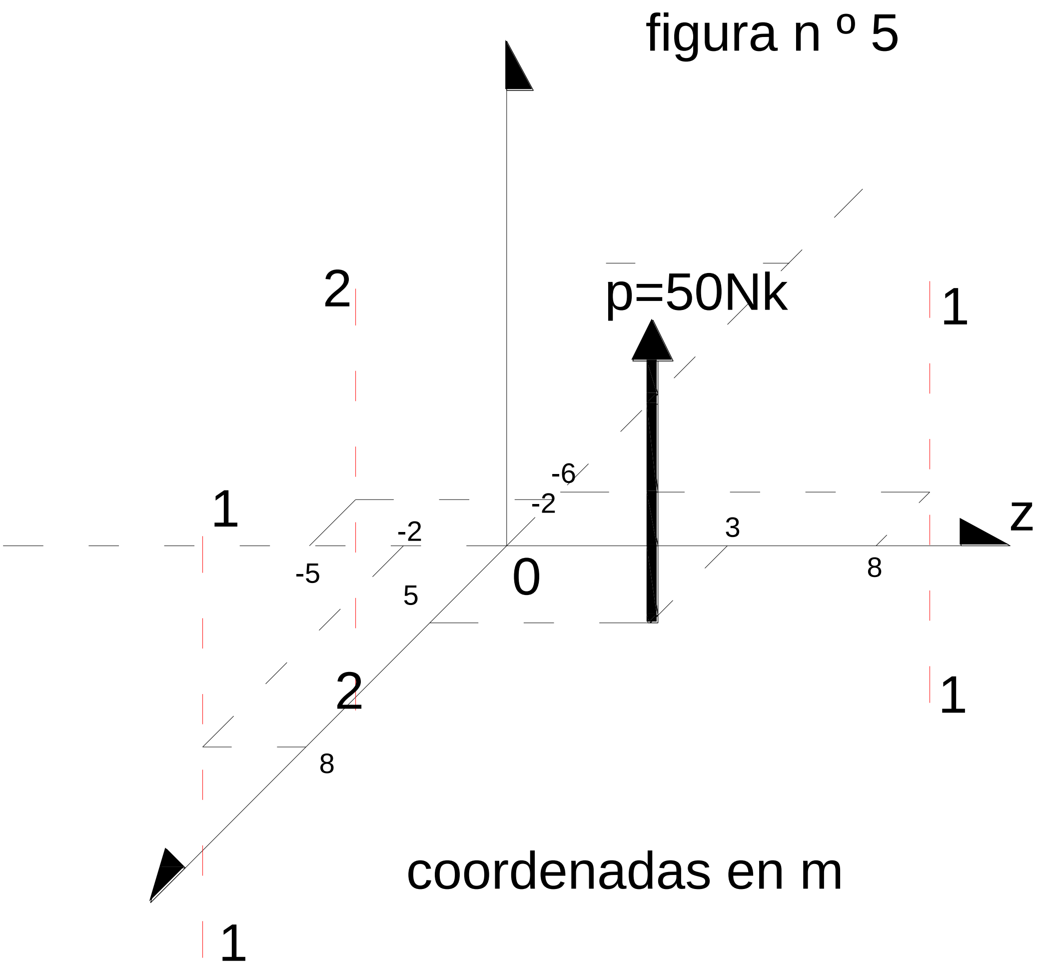
Llamando $\overrightarrow{X_j}$ a las fuerzas desconocidas, para determinar un sistema de 3 fuerzas equivalentes al sistema de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ se deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$(13)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos\gamma_i = \sum_{j=1}^{3} X_j . \cos\gamma_j \\ \sum_{i=1}^{n} Mom_{xx}^{pi} = \sum_{j=1}^{3} Mom_{xx}^{Xj} \\ \sum_{i=1}^{n} Mom_{yy}^{pi} = \sum_{j=1}^{3} Mom_{yy}^{Xj} \end{cases}$$

Para determinar un sistema de fuerzas en equilibrio con el sistema $\overrightarrow{p_i}$, se deberá cumplir,

$$(14)\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i+\sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\gamma_j=0\\ \sum_{i=1}^{n} Mom_{xx}^{pi}+\sum_{j=1}^{3} Mom_{xx}^{Xj}=0\\ \sum_{i=1}^{n} Mom_{yy}^{pi}+\sum_{j=1}^{3} Mom_{yy}^{Xj}=0\end{cases}$$

Ejemplo n º 1: Descomponer la fuerza $\breve{p}=50N\breve{k}$ de la figura n º 5, en las direcciones paralelas a $\vec{p}$, **1-1; 2-2; 3-3**, formando un sistema equivalente.



Inicialmente, asignamos sentidos arbitrarios a las fuerzas incógnitas. Las mismas, serán asignadas con sentido positivo de eje **z**. Aplicando las ecuaciones (13), resulta,

$$(A1)\begin{cases}\sum_{j=1}^{3} X_j.\cos 0° = 50\text{N} & \rightarrow\ X_1 + X_2 + X_3 = 50N \\ \sum_{i=1}^{3} Mom_{xx}^{Xj} = -50M.3m & \rightarrow\ 6\text{m}.X_1 + 2m.X_2 - 8m.X_3 = -50N.3m \\ \sum_{i=1}^{3} Mom_{yy}^{Xj} = 50M.5m & \rightarrow\ 6\text{m}.X_1 + 2m.X_2 - 8m.X_3 = -50N.3m\end{cases}$$

Del sistema de ecuaciones (A1), obtenemos,

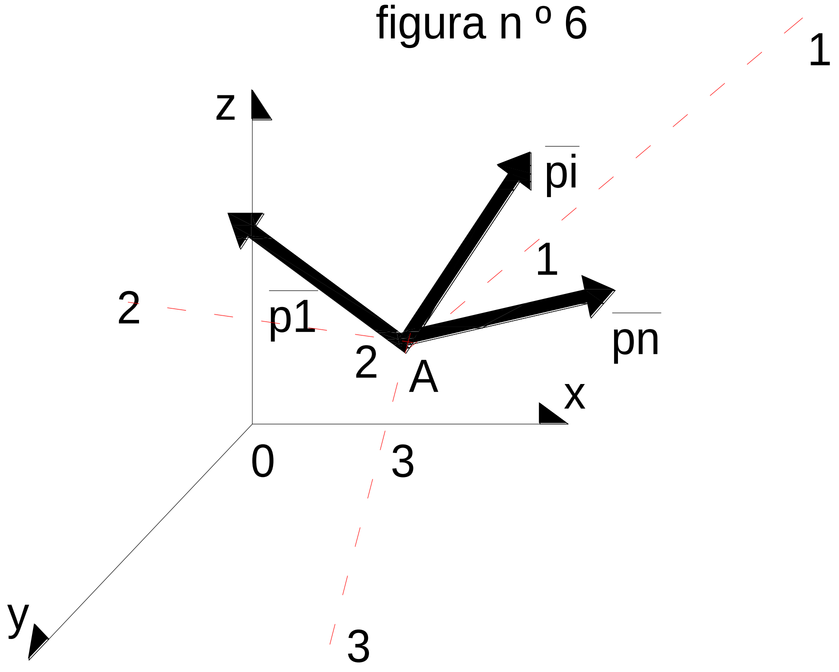
$$(B1)\begin{cases}\overrightarrow{X_1} = 18{,}52N.\breve{k} \\ \overrightarrow{X_2} = -0{,}926N.\breve{k} & \rightarrow\ \text{sentido opuesto al asignado} \downarrow \\ \overrightarrow{X_3} = 32{,}4N.\breve{k}\end{cases}$$

3 º) Sistema de fuerzas concurrentes

Un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio, se puede descomponer en 3 fuerzas concurrentes al mismo punto de direcciones conocidas, con la condición que las direcciones de los vectores representativos de las fuerzas no sean los 3 coplanares.

Sea, por ejemplo, el sistema de fuerzas concurrentes de la figura n º 6, que descomponemos en las direcciones **1-1; 2-2; y 3-3**.

figura n º 6



Llamando $\overrightarrow{X_j}$ a las fuerzas desconocidas, para determinar un sistema de 3 fuerzas equivalentes al sistema de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ se deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$(15)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_i = \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\alpha_j \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i = \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\beta_j \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\gamma_j \end{cases}$$

Para determinar un sistema de fuerzas en equilibrio con el sistema $\overrightarrow{p_i}$, se deberá cumplir,

$$(16)\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\alpha_j = 0\\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i + \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\beta_j = 0\\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i + \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\gamma_j = 0\end{cases}$$

Ejemplo n º 2: Descomponer la fuerza $\vec{p} = 8N\left(\frac{1}{3}\breve{i} + \frac{1}{3}\breve{j} - 0{,}882\breve{k}\right)$, en las direcciones **1-1; 2-2; 3-3**.

$$(A2)\begin{cases}\overrightarrow{p_1} = p_1\left(-\frac{2}{3}\breve{i} + \frac{1}{5}\breve{j} - 0{,}718\breve{k}\right)\\ \overrightarrow{p_2} = p_2\left(\frac{3}{7}\breve{i} - \frac{1}{4}\breve{j} + 0{,}868\breve{k}\right)\\ \overrightarrow{p_3} = p_3\left(\frac{3}{8}\breve{i} - \frac{2}{5}\breve{j} + 0{,}8363\breve{k}\right)\end{cases}$$

De la aplicación de las expresiones (15), resulta,

$$(B2)\begin{cases}\sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\alpha_j = \frac{8}{3}N \rightarrow -\frac{2}{3}X_1 + \frac{3}{7}X_2 + \frac{3}{8}X_3 = \frac{8}{3}N\\ \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\beta_j = \frac{8}{3}N \rightarrow \frac{1}{5}X_1 - \frac{1}{4}X_2 - \frac{2}{5}X_3 = \frac{8}{3}N\\ \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\gamma_j = -7{,}056N \rightarrow -0{,}718X_1 + 0{,}868X_2 + 0{,}8363X_3 = -7{,}056\mathrm{N}\end{cases}$$

Del sistema (B2) se obtiene,

$$(C2)\begin{cases} \overrightarrow{X}_1 = -19{,}32N\left(-\frac{2}{3}\breve{i}+\frac{1}{5}\breve{j}-0{,}718\breve{k}\right) & \text{sentido opuesto al asignado } \rightarrow \\ \overrightarrow{X}_1 = 19{,}32N\left(\frac{2}{3}\breve{i}-\frac{1}{5}\breve{j}+0{,}718\breve{k}\right) & \\ \overrightarrow{X}_2 = -21{,}06N\left(\frac{3}{7}\breve{i}-\frac{1}{4}\breve{j}+0{,}868\breve{k}\right) & \text{sentido opuesto al asignado } \rightarrow \\ \overrightarrow{X}_2 = 21{,}06N\left(-\frac{3}{7}\breve{i}+\frac{1}{4}\breve{j}-0{,}868\breve{k}\right) & \\ \overrightarrow{X}_3 = -3{,}16N\left(\frac{3}{8}\breve{i}-\frac{2}{5}\breve{j}+0{,}8363\breve{k}\right) & \text{sentido opuesto al asignado } \rightarrow \\ \overrightarrow{X}_3 = 3{,}16N\left(-\frac{3}{8}\breve{i}+\frac{2}{5}\breve{j}-0{,}8363\breve{k}\right) & \end{cases}$$

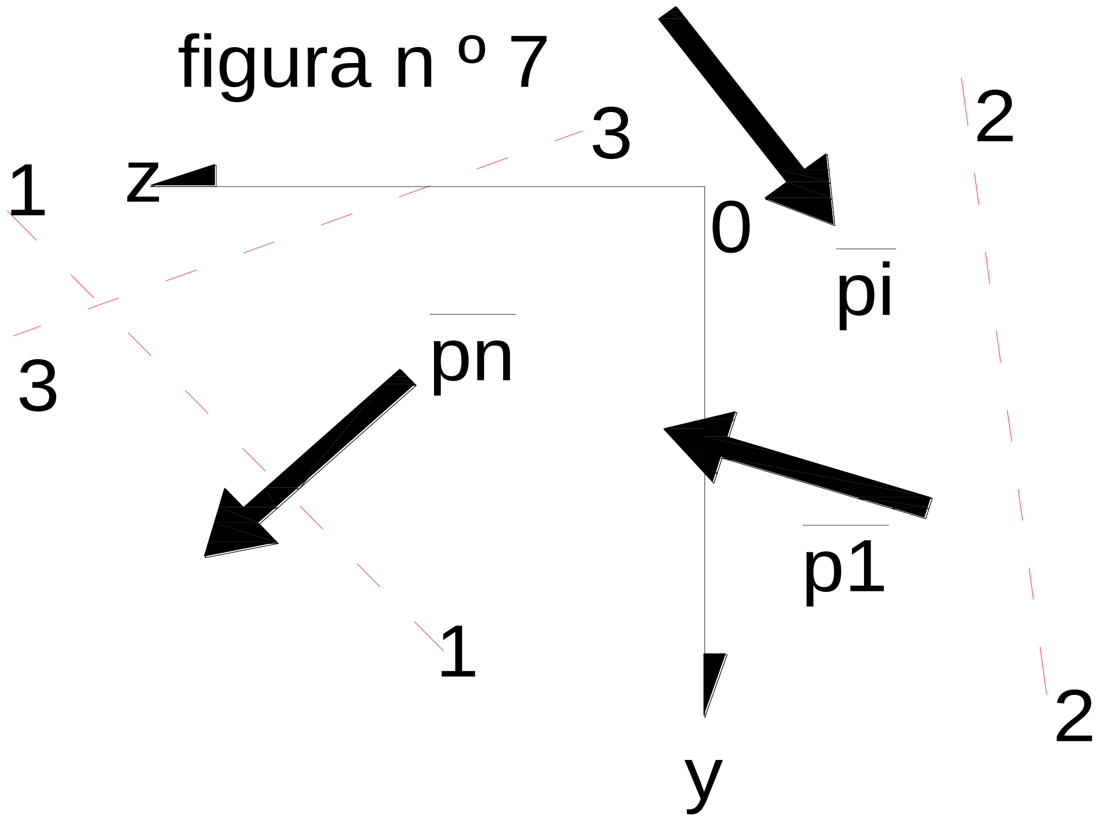
DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN EL PLANO

1 º) Sistema de fuerzas generales

Un sistema de fuerzas generales en el plano, se puede descomponer en 3 direcciones no concurrentes a un punto, conociendo las direcciones de los vectores representativos de las rectas de acción de las fuerzas, y un punto de sus rectas de acción.

Sea, por ejemplo, el sistema de fuerzas generales plano $\overrightarrow{p}_i$ de la figura n º 7, que queremos descomponer en tres fuerzas según las direcciones **1-1; 2-2; y 3-3**.

figura n º 7



Llamando $\overrightarrow{X}_j$ a las fuerzas desconocidas, para determinar un sistema de 3 fuerzas equivalentes al sistema de fuerzas $\overrightarrow{p}_i$ se deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$(17)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\gamma_j \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i = \sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\beta_j \\ \sum_{i=1}^{n} Mom_{pi}^{c} = \sum_{j=1}^{3} Mom_{Xj}^{c} \end{cases}$$

Para determinar un sistema de fuerzas en equilibrio con el sistema $\overrightarrow{p}_i$, se deberá cumplir,

$$(18)\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i+\sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\gamma_j=0\\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i+\sum_{j=1}^{3} X_j.\cos\beta_j=0\\ \sum_{i=1}^{n} Mom_{pi}^{c}+\sum_{j=1}^{3} Mom_{Xj}^{c}=0\end{cases}$$

Ejemplo n º 3: Una fuerza $\vec{p}=10t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\breve{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\breve{j}\right)$ con un punto de su recta de acción $A(4;8)m$ se debe descomponer en las direcciones de las fuerzas cuyos direcciones son:

$$(A3)\begin{cases}\overrightarrow{X_1}=X_1\left(\frac{1}{2}\breve{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\breve{k}\right) & \text{punto de su recta de acción } A_1(2;-4)m\\ \overrightarrow{X_2}=X_2\left(-\frac{1}{3}\breve{j}+\frac{\sqrt{8}}{3}\breve{k}\right) & \text{punto de su recta de acción } A_2(-7;2)m\\ \overrightarrow{X_3}=X_3\left(-\frac{3}{5}j-\frac{4}{5}k\right) & \text{punto de su recta de acción } A_3(9;3)m\end{cases}$$

de manera tal que se forme un sistema en equilibrio con $\vec{p}$. Determinar el valor de estas fuerzas.

De acuerdo a las ecuaciones (18), se debe cumplir,

$$(B3)\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}X_1+\frac{\sqrt{8}}{3}X_2-\frac{4}{5}X_3+\frac{\sqrt{2}}{2}.10t=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}.10t+\frac{1}{2}X_1-\frac{1}{3}X_2-\frac{3}{5}X_3=0\end{cases}$$

En cuanto a la ecuación de sumatoria de los momentos, consideramos centro de momentos el origen de coordenadas, entonces,

$$(C3)\quad \begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & (0-4) & (0-8)\end{vmatrix}10t+\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & (0-2) & (0+4)\end{vmatrix}X_1+\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3}\\ 0 & (0+7) & (0-2)\end{vmatrix}X_2+$$

$$+\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & (0-9) & (0-3)\end{vmatrix}X_3=0$$

De (C3) surge,

$$-28{,}28tm + 0{,}268\, X_1 m - 5{,}933\, X_2 .m + \frac{27}{5} X_3 m = 0 \qquad (\mathrm{D3})$$

Del sistema formado por las ecuaciones (B3) y (D3), resultan,

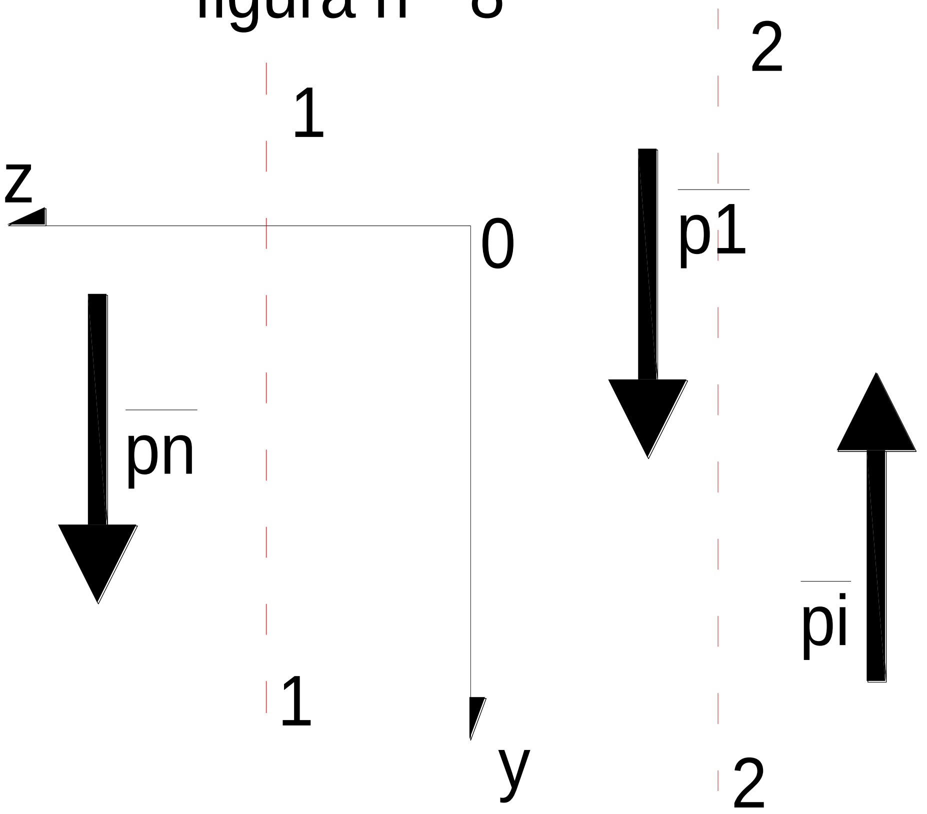
$$(E3)\begin{cases} X_1 = 5{,}05t \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{X_1} = 5{,}05t\left(\dfrac{1}{2}\breve{j} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\breve{k}\right) \\ X_2 = 20{,}27t \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{X_1} = 20{,}27t\left(-\dfrac{1}{3}\breve{j} + \dfrac{\sqrt{8}}{3}\breve{k}\right) \\ X_3 = 32{,}4t \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{X_3} = 32{,}4t\left(-\dfrac{3}{5}\breve{j} - \dfrac{4}{5}\breve{k}\right) \end{cases}$$

2 º) Sistema de fuerzas paralelas

Un sistema de fuerzas paralelas en el plano $\overrightarrow{p_i}$ se puede descomponer en 2 fuerzas cuyos vectores representativos tienen direcciones paralelas a las fuerzas del sistema, conociendo un punto de las rectas de acción de las fuerzas incógnitas.

Sea, por ejemplo, el sistema de fuerzas paralelas $\overrightarrow{p_i}$ de la figura n º 8, que queremos descomponer en las direcciones **1-1, y 2-2**.

figura n º 8



Llamando $\overrightarrow{X_j}$ a las fuerzas desconocidas, para determinar un sistema de 2 fuerzas equivalentes al sistema de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ se deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$(19)\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = \sum_{j=1}^{2} X_j.\cos\gamma_j \\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{pi}^{c} = \sum_{j=1}^{2} Mom_{Xj}^{c}\end{cases}$$

Para determinar un sistema de fuerzas en equilibrio con el sistema $\overrightarrow{p_i}$, se deberá cumplir,

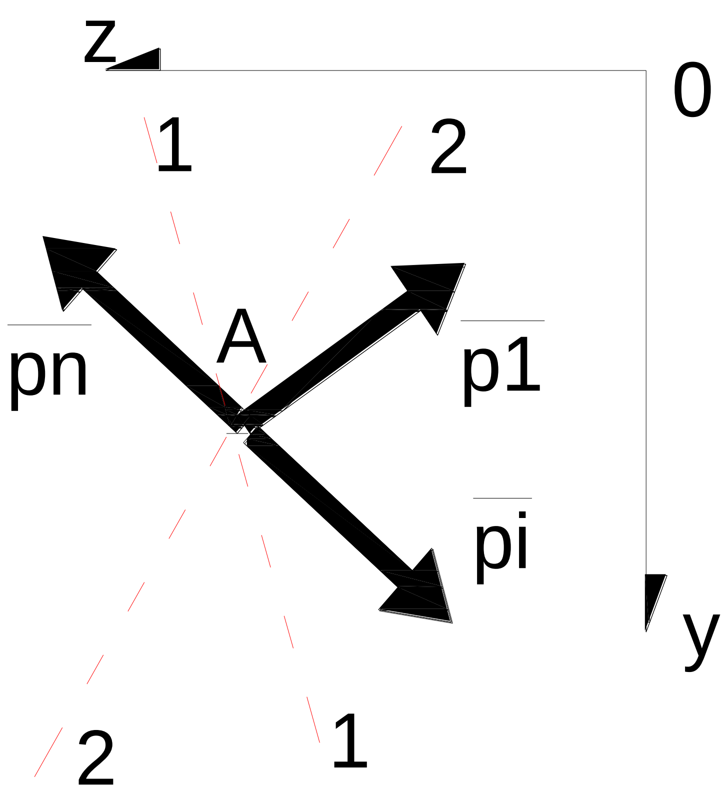
$$(20)\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i + \sum_{j=1}^{2} X_j.\cos\gamma_j = 0\\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Mom}_{pi}^{c} + \sum_{j=1}^{2} Mom_{Xj}^{c} = 0\end{cases}$$

3 º) Sistema de fuerzas concurrentes

Un sistema de fuerzas concurrentes en el plano $\overrightarrow{p_i}$ se puede descomponer en 2 fuerzas cuyos vectores representativos tengan direcciones que compartan el punto de concurrencia de las fuerzas del sistema $\overrightarrow{p_i}$, para lo cual se deben conocer las direcciones de los vectores de estas fuerzas.

Sea, por ejemplo, el sistema de fuerzas concurrentes $\overrightarrow{p_i}$ de la figura n º 9, que descomponemos en las direcciones 1-1, y 2-2.

figura n º 9



Llamando $\overrightarrow{X_j}$ a las fuerzas desconocidas, para determinar un sistema de 2 fuerzas equivalentes al sistema de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$ se deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$(21)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = \sum_{j=1}^{2} X_j.\cos\gamma_j \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i = \sum_{j=1}^{2} X_j.\cos\beta_j \end{cases}$$

Para determinar un sistema de fuerzas en equilibrio con el sistema $\overrightarrow{p_i}$, se deberá cumplir,

$$(22)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_{\mathrm{i}} + \sum_{j=1}^{2} X_j.\cos\gamma_{\mathrm{j}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_{\mathrm{i}} + \sum_{j=1}^{2} X_j.\cos\beta_{\mathrm{j}} = 0 \end{cases}$$