DIFERENTES FORMAS DE PLANTEAR EL EQUILIBRIO EN LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Existen ecuaciones alternativas para plantear el equilibrio de los sistemas de fuerzas, tanto planos como espaciales. En los mismos se plantean ecuaciones alternativas que sustituyen una o más de las ecuaciones estudiadas en los sistemas de fuerzas, pero, al igual que en estos, las mismas deberán cumplir con ciertas condiciones algebraicas para no formar sistemas con ecuaciones equivalentes.

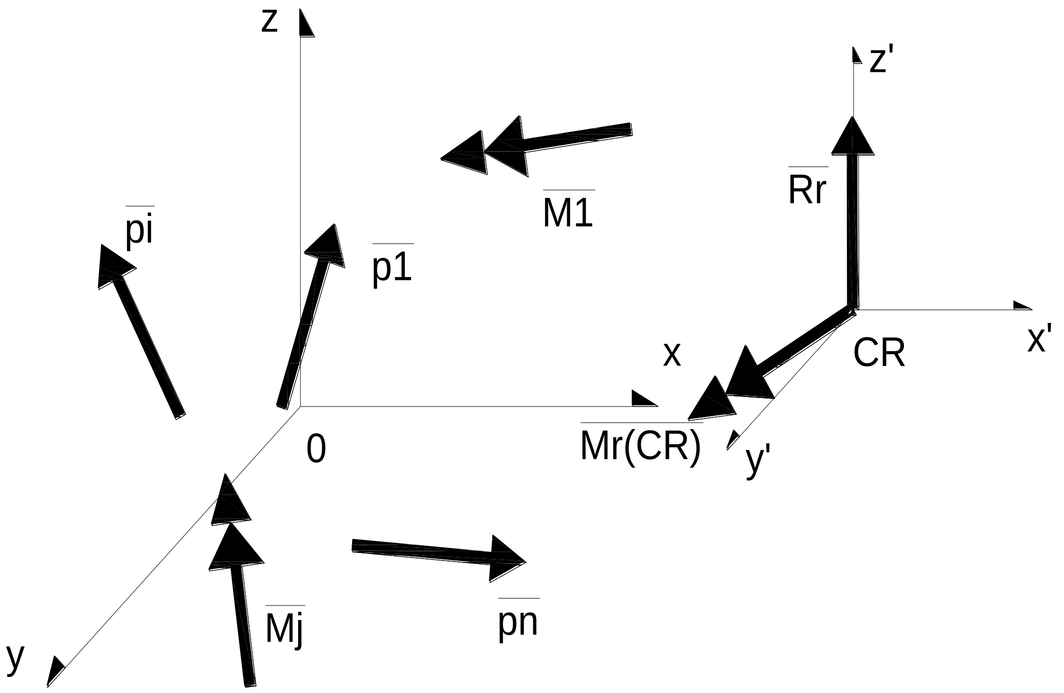
1 º) Sistemas espaciales

*** a) Sistema general de fuerzas**.

Cuando estudiamos el sistema general como el de la figura n º 1, concluimos que las condiciones de equilibrio eran,

$$
(1)\begin{cases}
\sum Proy_{xx} = 0 \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_i = 0 \\
\sum Proy_{yy} = 0 \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_i = 0 \\
\sum Proy_{zz} = 0 \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_i = 0 \\
\sum Mom_{xx} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\beta_i\left(z_{CR}-z_{Ai}\right)-p_i.\cos\gamma_i\left(y_{CR}-y_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\alpha_{Mi} \\
\sum Mom_{yy} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\gamma_i\left(x_{CR}-x_{Ai}\right)-p_i.\cos\alpha_i\left(z_{CR}-z_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\beta_{Mi} \\
\sum Mom_{zz} = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left[p_i.\cos\alpha_i\left(y_{CR}-y_{Ai}\right)-p_i.\cos\beta_i\left(x_{CR}-x_{Ai}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} M_i.\cos\gamma_{Mi}
\end{cases}
$$

figura n º 1



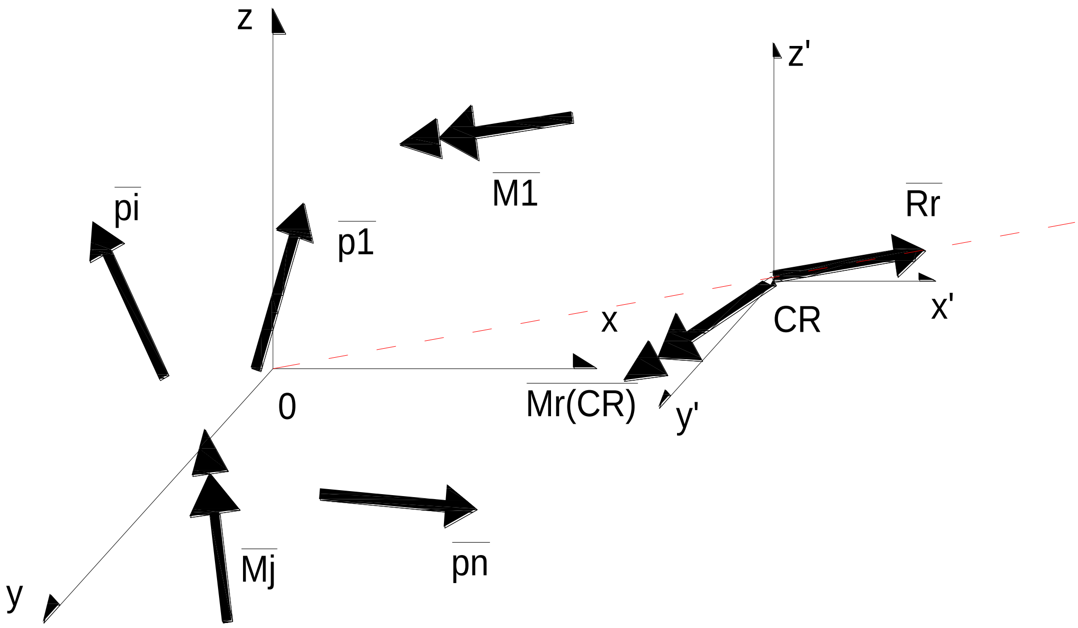
Luego, una alternativa, es plantear ecuaciones de proyecciones de momentos respecto de una terna alternativa $(x';y';z'))$, y reemplazar una ecuación de sumatoria de las proyecciones de componentes de fuerzas, por ejemplo respecto del eje z, transformando el sistema en,

$$(2)\begin{cases} \sum Mom_{x'x'} = 0 \\ \sum Mom_{y'y'} = 0 \\ \sum Mom_{z'z'} = 0 \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{xx} = 0 \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \\ \textit{Sumatoria} \text{ de momentos respecto de un eje no coplanar con la } \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}} \text{ definida por las 5} \\ \text{ecuaciones anteriores igualadas a 0} \end{cases}$$

De las primeras 5 ecuaciones, se deduce, que, de haber resultante de reducción, esta deberá tener la dirección del eje **z** es decir, $\overrightarrow{R_R} \equiv z'z'$. Debido a que la ecuación de sumatoria de las proyecciones respecto de **z** fue sustituida, una alternativa válida es una ecuación de sumatoria de momentos igualada a 0 respecto de un eje no coplanar con el eje **z**.

Otra alternativa, es sustituir las ecuaciones (1), por ecuaciones de sumatoria de momentos respecto a las ternas $(x; y; z)$ y $(x'; y'; z')$, como se indica en la figura n º 2.

figura n º 2



Las ecuaciones de equilibrio quedan,

$$(3)\begin{cases} \sum Mom_{x'x'} = 0 \\ \sum Mom_{y'y'} = 0 \\ \sum Mom_{z'z'} = 0 \\ \sum Mom_{xx} = 0 \\ \sum Mom_{yy} = 0 \\ \textit{Sumatoria} \text{ de momentos respecto de un eje no coplanar con la } \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}} \text{ definida por las 5} \\ \text{ecuaciones anteriores igualadas a 0} \end{cases}$$

De existir resultante de reducción, planteadas las primeras 5 ecuaciones igualadas a 0, la ecuación alternativa, si es una sumatoria de momentos respecto de un eje no coplanar con la posible dirección de la resultante de reducción, siendo esta dirección la de la recta que une los orígenes de las ternas $(x; y; z)$ y $(x'; y'; z')$, es decir **o**, y **CR**, pues la única posibilidad de resultante es que la misma tenga esta dirección

Otra alternativa, es plantear una ecuación de sumatoria de las proyecciones respecto de un eje no perpendicular con la recta que une los orígenes de las ternas mencionadas.

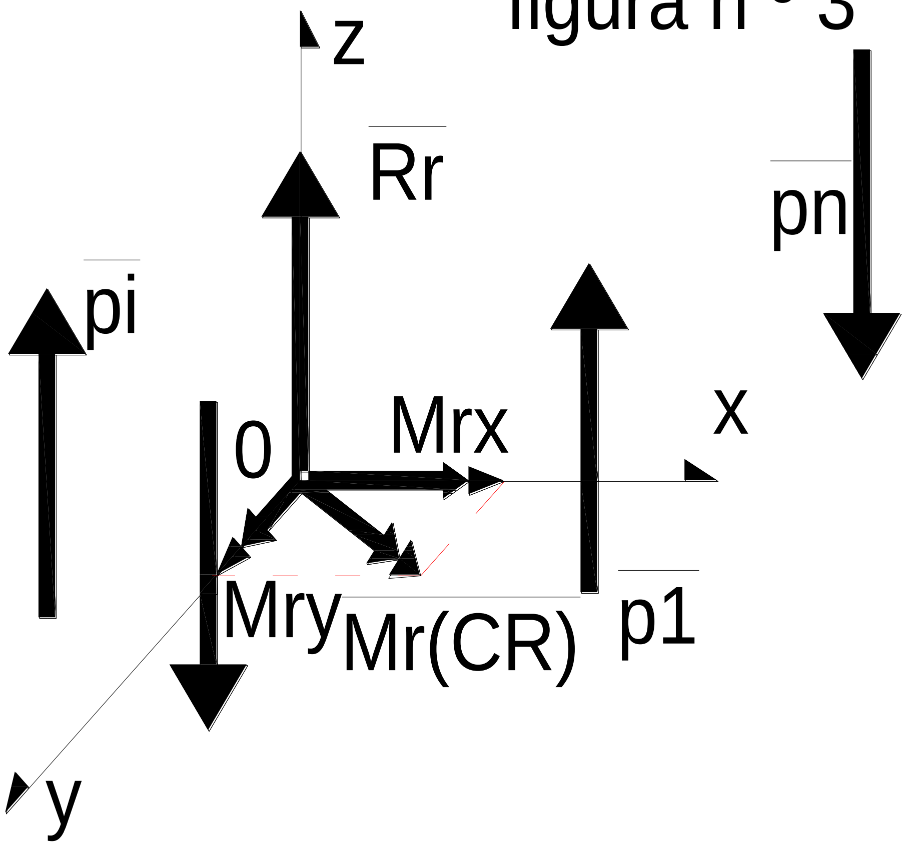
$$(4)\begin{cases} \sum Mom_{x'x'} = 0 \\ \sum Mom_{y'y'} = 0 \\ \sum Mom_{z'z'} = 0 \\ \sum Mom_{xx} = 0 \\ \sum Mom_{yy} = 0 \\ \textit{Sumatoria} \text{ de proyecciones de fuerzas respecto de un eje no } \perp \text{ con la } \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}} \text{ definida por las 5} \\ \text{ecuaciones anteriores igualadas a 0} \end{cases}$$

*** b) Sistema de fuerzas paralelas**

Cuando hemos estudiado las condiciones de equilibrio de sistema de fuerzas paralelas en el espacio como se muestra en la figura n º 3, estas son,

$$(6)\begin{cases} \sum \mathrm{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{\mathrm{p}_{\mathrm{i}}} = 0 \\ \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_{\mathrm{i}} \left(y_{CR} - y_{Ai} \right) \\ \sum Mom_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_{\mathrm{i}} \left(x_{CR} - x_{Ai} \right) \end{cases}$$

figura n º 3



La posibilidad es reemplazar la ecuación de sumatoria de las proyecciones en el eje z por una ecuación de sumatoria de los momentos respecto un eje no coplanar con la posible dirección de $\overrightarrow{R_R}$ definidas por las dos ecuaciones anteriores igualadas a **0**. Es decir, de haber resultante, la posibilidad es que la misma pase por el origen de la terna, de aquí, que la sumatoria de momentos respecto de un eje no coplanar con el eje z satisface la condición de equilibrio en conjunto con las otras 2 ecuaciones de sumatorias de momentos del sistema (5).

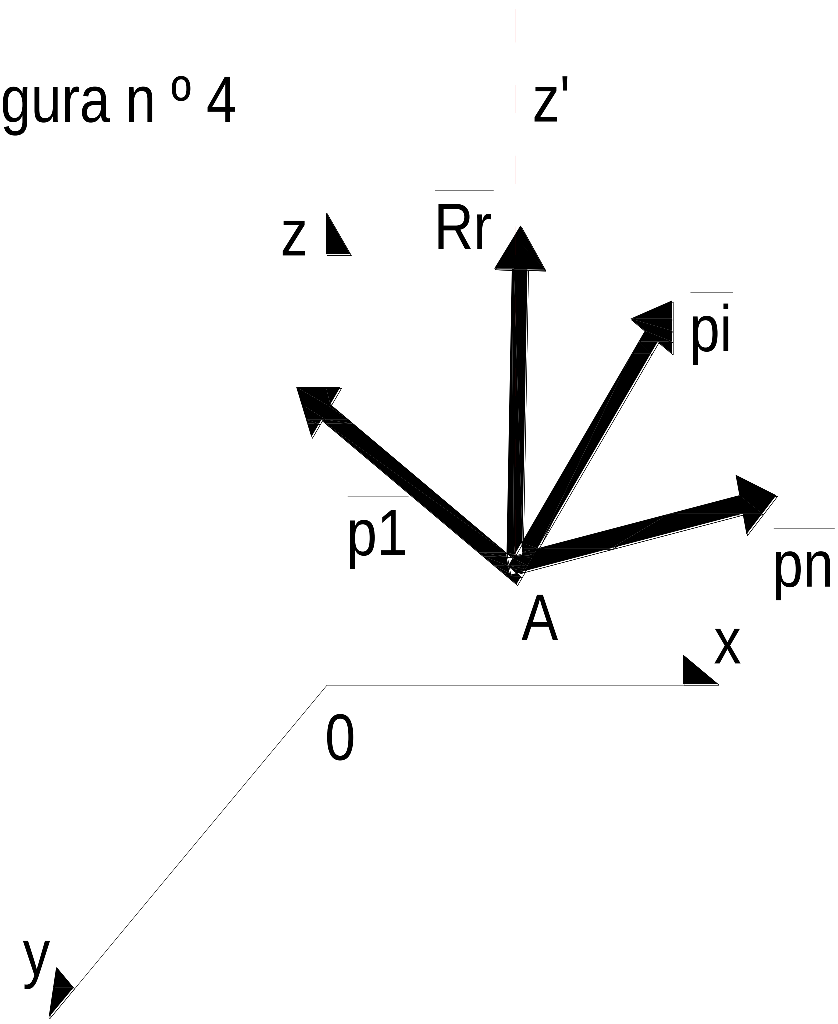
$$(7)\begin{cases} \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow \ 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos\gamma_i (y_{CR} - y_{Ai}) \\ \sum Mom_{yy} = 0 \ \rightarrow \ 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos\gamma_i (x_{CR} - x_{Ai}) \\ \textit{Sumatoria} \text{ de moemntos respecto de un eje no coplanar con la posible dirección } \overrightarrow{R_R} \\ \text{definida por las 2 ecuaciones anteriores igualadas a } 0 \end{cases}$$

*** c) Sistema de Fuerzas concurrentes**

Al estudiar las condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas cuyos vectores representativos comparten un punto de su recta de acción, como se indica en la figura n º 4, las mismas son,

$$(8)\begin{cases}\sum \mathrm{Pr}oy_{xx}=0 \rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p_i}.\cos\alpha_i\\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy}=0 \rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p_i}.\cos\beta_i\\ \sum \mathrm{Pr}oy_{zz}=0 \rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p_i}.\cos\gamma_i\end{cases}$$

figura n º 4

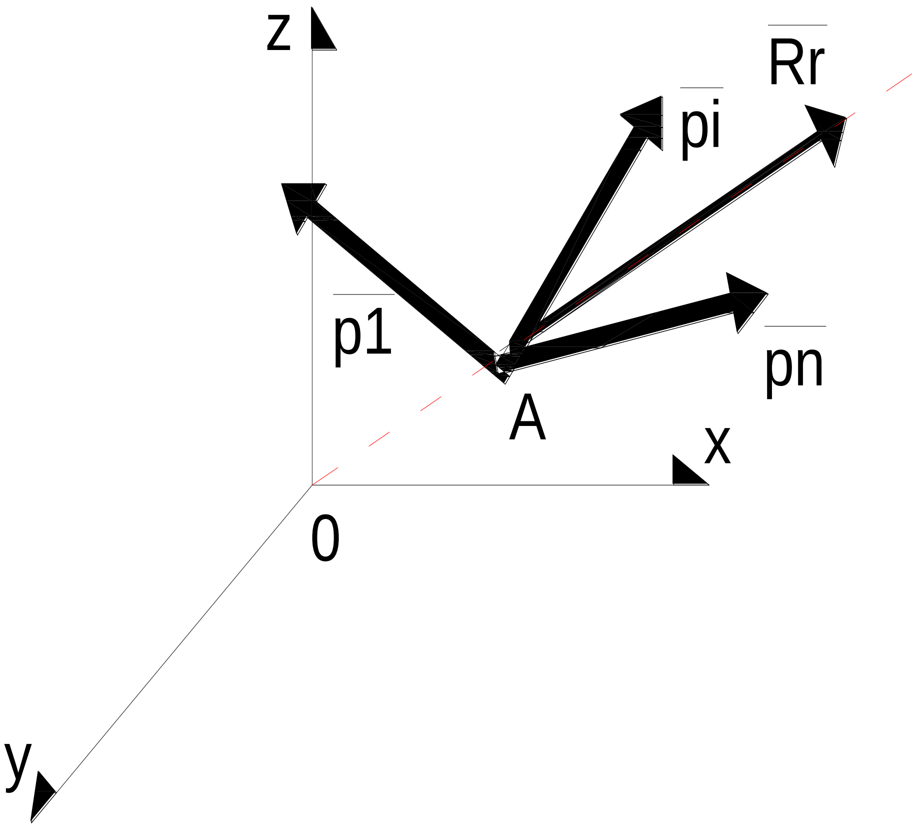


Podemos reemplazar una ecuación de sumatoria de las proyecciones, por ejemplo respecto al eje z, por una ecuación de sumatoria de los momentos respecto de un eje no coplanar con la posible dirección de la resultante, pues, de las dos primeras ecuaciones (8), la posibilidad de resultante es que la misma pase por el punto de concurrencia y sea paralela a z, por consiguiente, este eje respecto del cual se efectúa la sumatoria de los momentos no deberá tener un punto en común con el de concurrencia.

$$(9)\begin{cases} \sum Proy_{xx} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} P_i . \cos\alpha_i \\ \sum Proy_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} P_i . \cos\beta_i \\ \textit{Sumatoria} \text{ de moemntos respecto de un eje no coplanar con la posible dirección de } \overrightarrow{R_R} \\ \textit{definida} \text{ por las dos ecuaciones anteriores igualadas a } 0 \end{cases}$$

Otra alternativa posible, es considerar 2 ecuaciones de sumatorias de momentos con respecto dos ejes de la terna, y la restante, una ecuación de proyecciones de fuerzas respecto de un eje no perpendicular con la posible dirección de la resultante. siendo así, la posible dirección de la resultante es la de la recta que une el origen de la terna con el punto de concurrencia de las fuerzas del sistema(figura n º 5).

figura n º 5



$$(10)\begin{cases} \sum Mom_{xx} = 0 \\ \sum Mom_{yy} = 0 \\ \textit{Sumatoria} \text{ de proyecciones de fuerzas respecto de un eje no } \perp \text{ con la posible dirección} \\ \text{de } \overrightarrow{R_R} \text{ definida por las dos ecuaciones anteriores igualadas a } 0 \end{cases}$$

La otra alternativa de este punto, es una ecuación de momentos respecto de un eje no coplanar con la posible dirección de la resultante de reducción, es decir, este eje debe ser una recta alabeada respecto de la recta que une el origen de coordenadas y el eje de concurrencia,

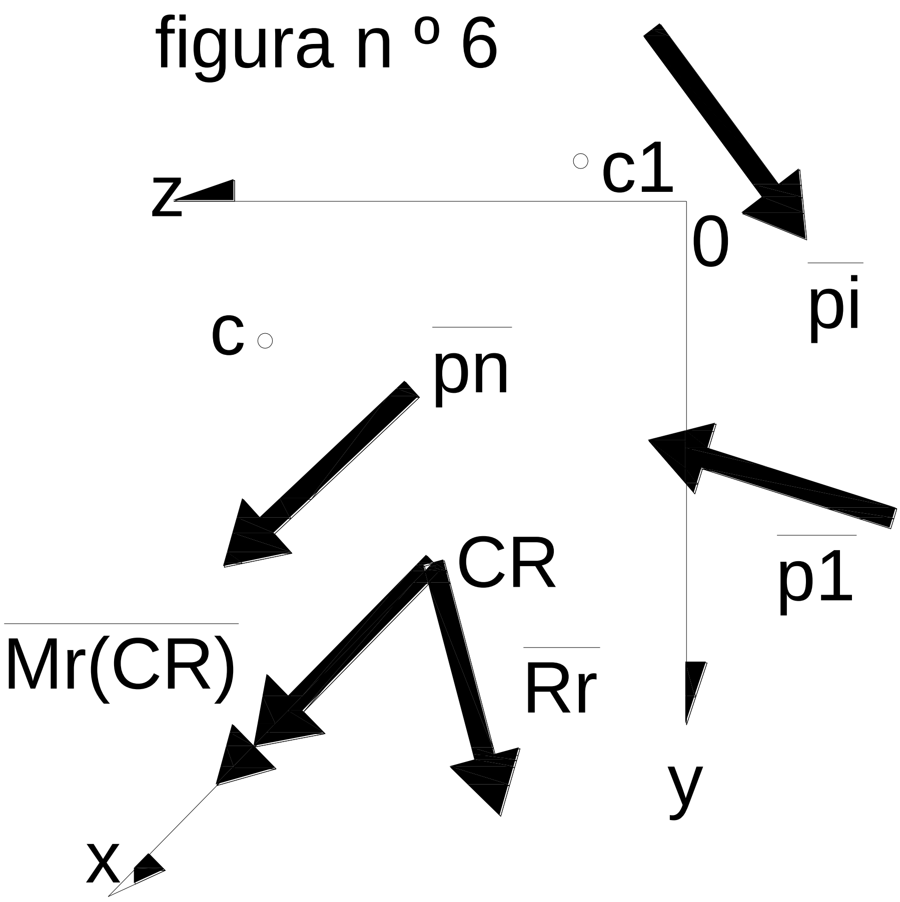
$$(11)\begin{cases} \sum Mom_{xx} = 0 \\ \sum Mom_{yy} = 0 \\ \textit{Sumatoria} \text{ de nomentos respecto de un eje no } \textit{coplanar} \text{ con la posible dirección} \\ \text{de } \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}} \text{ definida por las dos ecuaciones anteriores igualadas a 0} \end{cases}$$

2 º) Sistemas de fuerzas planos

*** a) Sistema general de fuerzas en el plano**

Según hemos estudiado al tratar los sistemas planos (figura n º 6), las condiciones de equilibrio son,

$$(12)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i} . \cos \gamma_i \\ \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i} . \cos \beta_i \\ \sum Mom_{CR} = \vec{0} \end{cases}$$



Una alternativa, es reemplazar una ecuación de sumatoria de proyecciones de fuerzas con una ecuación de sumatoria de momento respecto de un punto **c**. La condición que debe cumplir **c** junto con **CR**, es que no formen una recta normal al eje de proyección, pues en ese caso, se tendrán 2 ecuaciones equivalentes o proporcionales entre sí . Por ejemplo, si sustituimos la ecuación de sumatoria de las proyecciones en el eje **y**, los puntos **c** y **CR**, no deben formar una recta normal al eje **z**.

$$(13)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i . \cos \gamma_i \\ \sum Mom_C = 0 \\ \sum Mom_{CR} = \vec{0} \end{cases}$$

La otra alternativa posible, es reemplazar la restante ecuación de sumatoria de las proyecciones con otra ecuación de sumatoria de momentos respecto de un c_1 . La condición que se deberá cumplir para que las ecuaciones no sean equivalentes o proporcionales entre sí, es que **c**, C_1 y **CR** no estén alineados, o sea que no pertenezcan a una misma recta.

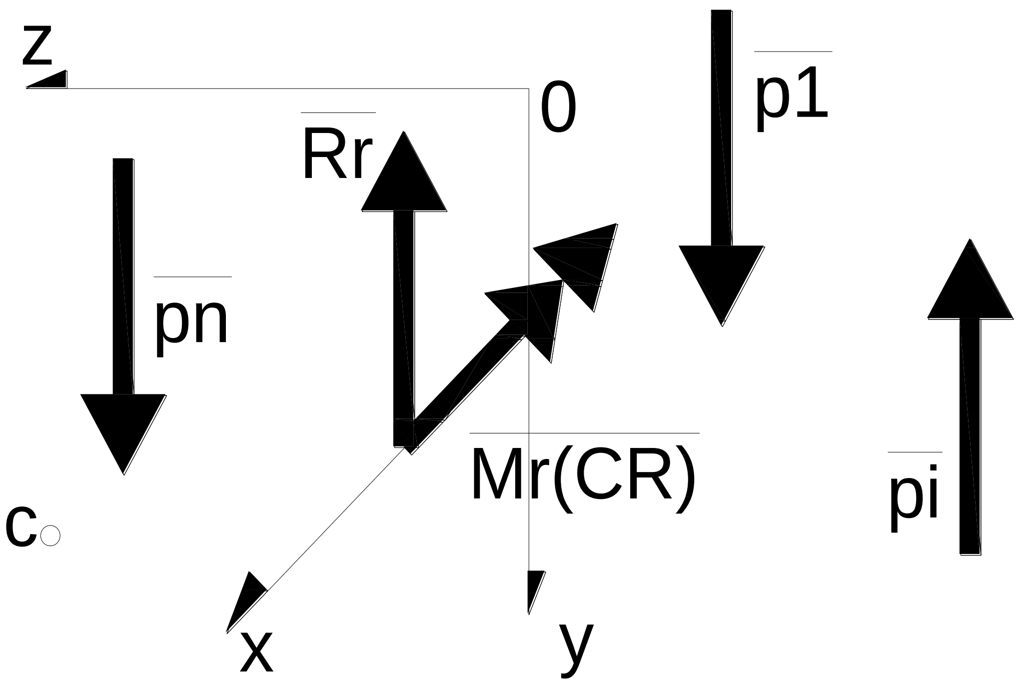
$$(14)\begin{cases}\sum Mom_{C1} = 0 \\ \sum Mom_{C} = 0 \\ \sum Mom_{CR} = \vec{0}\end{cases}$$

*** b) Sistemas de fuerzas paralelas**.

Como hemos estudiado, al tratar un sistema de fuerzas paralelas en el plano (figura n º 7), las condiciones de equilibrio son,

$$(15)\begin{cases}\sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i}.\cos \beta_\mathrm{i} \quad \text{siendo los ángulos } \beta_\mathrm{i} = 0 \text{ o } \beta_\mathrm{i} = \pi \\ \sum Mom_{CR} = 0\end{cases}$$

figura n º 7



Se puede reemplazar la ecuación de sumatoria de las proyecciones en y con una ecuación de sumatoria de momentos respecto de un punto c, con la condición que **c** y **CR** no formen una recta paralela a la dirección de las fuerzas, pues en ese caso se obtendrían dos ecuaciones equivalentes o proporcionales de sumatoria de momentos.

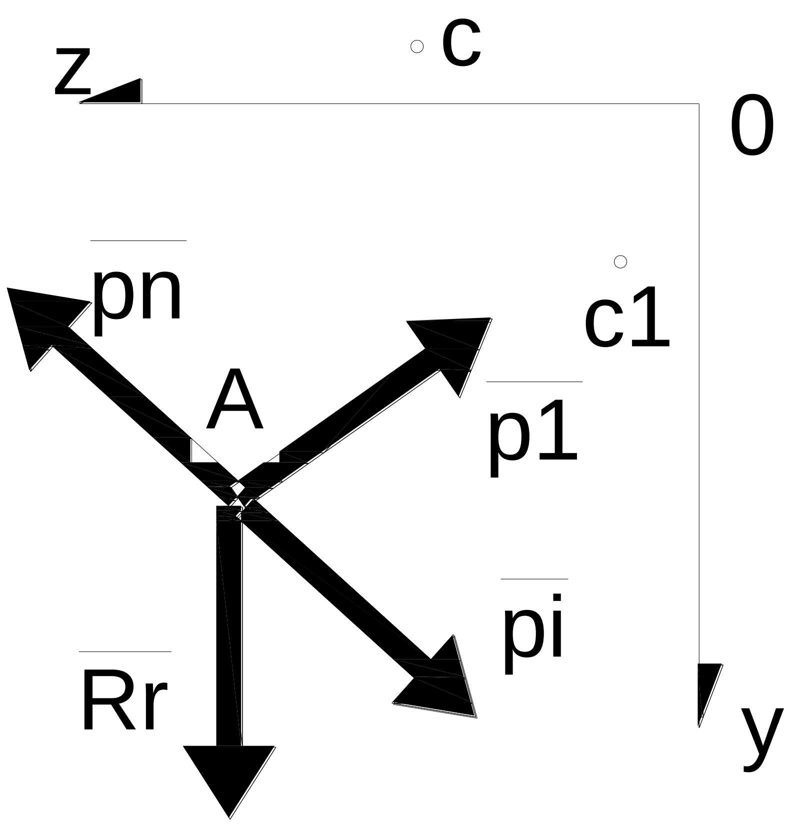
$$(16)\begin{cases}\sum Mom_C = 0\\ \sum Mom_{CR} = 0\end{cases}$$

*** c) Sistema de fuerzas concurrentes**

Como hemos estudiado, las condiciones de equilibrio en el sistema de fuerzas concurrentes en el plano (figura n º 8), son,

$$
(17)\begin{cases} \sum Proy_{zz} = 0 \quad \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \gamma_i \\ \sum Proy_{yy} = 0 \quad \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} p_i . \cos \beta_i \end{cases}
$$

figura n º 8



En una primer alternativa, reemplazamos una ecuación de sumatoria de proyecciones de fuerzas, por ejemplo, sumatoria de fuerzas sobre eje **y** por una sumatoria de momentos respecto de un punto **c**, con la condición que c no debe formar con el punto de concurrencia A una recta normal al eje de proyección restante, es decir **z**, por idénticas condiciones al caso a) de sistema plano de fuerzas generales.

$$(18)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 & \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i}.\cos\gamma_i \\ \sum Mom_C = 0 \end{cases}$$

La alternativa restante, es reemplazar la restante ecuación de sumatoria de proyecciones de fuerzas con respecto al eje **z**, por otra ecuación de sumatoria de momentos con respecto a un segundo punto C_1, con la condición que **c**, C_1 y **A** no estén alineados, es decir que no pertenezcan a la misma recta.

$$(18)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{zz} = 0 & \rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p_i}.\cos\gamma_i \\ \sum Mom_C = 0 \end{cases}$$