## Respuestas Trabajo Práctico 5. Variables aleatorias multidimensionales

**Ej.1** **a)** $P(X>Y) = 0{,}0028$; $P(X=Y) = 0{,}9710$; $P(X<Y) = 0{,}0262$.

**b)**

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,84 | 0,10 | 0,06 |

| $y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(y)$ | 0,8164 | 0,1160 | 0,0676 |

**c)** $E(X)=0{,}22$; $E(Y)=0{,}2512$; $\sigma_X=0{,}54$; $\sigma_Y=0{,}5686$.

**d)** $P(Y\leq X/X=1)=0{,}9900$; $P(Y\leq X/X\leq 1)=0{,}9721$; **e)** $E(X-Y)=-0{,}0312$.

**f)** No son independientes.

**g)** $Cov(X,X)=0{,}2916$; $Cov(Y,Y)=0{,}3233$; $Cov(Y,X)=0{,}2799$; $Corr(X,Y)=0{,}9116$.

**Ej.2** **a)** 0,15; **b)** 0,40; **c)** 0,22; **d)** 0,17; 0,46;

**e)**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_X(x)$ | 0,19 | 0,30 | 0,25 | 0,14 | 0,12 |

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P_Y(y)$ | 0,19 | 0,30 | 0,28 | 0,23 |

$E(X)$=1,7; $E(Y)$=1,55: $V(X)$=1,59; $V(Y)$=1,0875

**f)** No son independientes; $Cov(X,Y)$=0,695; $Corr(X,Y)\cong$0,5285;

**g)** $E[X+Y]$= 3,25; $V(X+Y)= V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$=4,0675.

**Ej.3** **a)**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 |

| $y$ | 1 | 4 |
|---|---|---|
| $p(y)$ | 0,5 | 0,5 |

**b)** $E(X)=0$; $E(Y)=2{,}5$; $E(XY)=0$; **c)** No son independientes ($Y=X^2$).

**d)**

| $x+y$ | 0 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|
| $p(x+y)$ | 0,25 | 0,50 | 0,25 |

$E(X+Y)=2{,}5$ $V(X+Y)=4{,}75$.

**Ej.4** **b)**

| | | $y$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | $P_X(x)$ |
| | 1 | 1/4 | 1/12 | 0 | 0 | 1/3 |
| $x$ | 2 | 3/16 | 1/8 | 1/48 | 0 | 1/3 |
| | 3 | 9/64 | 9/64 | 3/64 | 1/192 | 1/3 |
| | $P_Y(y)$ | 37/64 | 67/192 | 13/192 | 1/192 | |

**c)** Son independientes si $P_{XY}(x;y) = P_X(x)\cdot P_Y(y) \quad \forall(x;y)$.

$P_{XY}(3;3) \neq P_X(3)\, P_Y(3)$ pues $1/192 \neq 1/192 \cdot 1/3 \Rightarrow$ no son independientes.

**d)** $P_Y(y=0) = 37/64 \approx 0{,}5781$.

**e)** $A$: es el evento que indica que aprobó el examen

$P(A) = P_{XY}(x=1;\, y=0) + P_{XY}(x=2;\, y\leq 1) + P_{XY}(x=2;\, y\leq 2) = 57/64 \approx 0{,}8906$.

**f)** $P_{Y/X=3}(x=3;\, y=2) = P_{XY}(x=3;\, y=2) / P_X(x=3) = 3/64 \,/\, 1/3 \approx 0{,}1406$.

**g)** $P_{X/Y=2}\,(x=3; y=2) = P_{XY}(x=3, y=2) / P_Y(y=2) = 3/64 / 13/192 \approx 0{,}6923$.

**h)** $W = 10\,(X-Y)/X$ ; $R_W = \{0; 10/3; 5; 20/3; 10\}$

| $w$ | 0 | 10/3 | 5 | 20/3 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(w)$ | 7/64 | 3/64 | 1/8 | 9/64 | 37/64 |

$E(W) = 7{,}5$; $V(W) = 275/24 \approx 11{,}4583 \Rightarrow \sigma_W \approx 3{,}385$.

**Ej.5** **a)**

| | | ***y*** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **−3** | **0** | **2** | ***P_X(x)*** |
| | **−2** | 0,00<br>( ) | 0,00<br>( ) | 3/36<br>(11, 12) | 3/36 |
| ***x*** | **0** | 3/36<br>(2, 3) | 6/36<br>(7) | 12/36<br>(8, 9, 10) | 21/36 |
| | **3** | 7/36<br>(4, 5) | 5/36<br>(6) | 0,00<br>() | 12/36 |
| | ***P_Y(y)*** | 10/36 | 11/36 | 15/36 | |

**b)** $P(A)=P(X>Y)=5/12$; $P(B)=P[(X>Y)\cup(Y>X)]=5/6$; $P(C)=P(X\leq 0)=2/3$; $P(D)=P(Y\geq 0)=13/18$.

**c)** 5/12; **d)** 23/33; **e)** sabiendo que el segundo jugador paga dinero, ¿cuál es la probabilidad de que el primer jugador cobre dinero? 7/10;

**f)** $E(X)=5/6$; $E(Y)=0$; **g)** $Cov(X,Y)=-2{,}083$; $Corr(X,Y)$ $-0{,}628$.

**Ej.6** **a)**

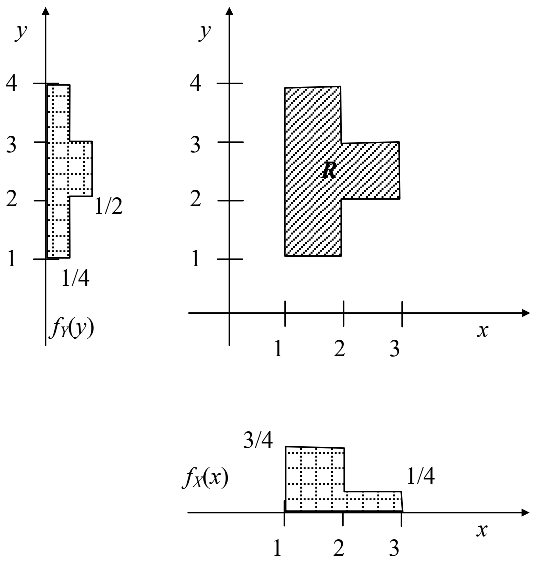
| | | *x* 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 0 | $1{,}6\text{x}10^{-7}$ | $2{,}88\text{x}10^{-5}$ | $1{,}944\text{x}10^{-3}$ | 0,05832 | 0,6561 |
| | 1 | $2{,}56\text{x}10^{-6}$ | $3{,}456\text{x}10^{-4}$ | 0,015552 | 0,23328 | 0 |
| | 2 | $1{,}536\text{x}10^{-5}$ | $1{,}3824\text{x}10^{-3}$ | 0,031104 | 0 | 0 |
| | 3 | $4{,}096\text{x}10^{-5}$ | $1{,}8432\text{x}10^{-3}$ | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | $4{,}096\text{x}10^{-5}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

**b)** $P(X=2;\ Y=1) = 0{,}015552$; $P(X=2) = 0{,}0486$; **c)** $P(Y=0 / X=3) = 0{,}20$.

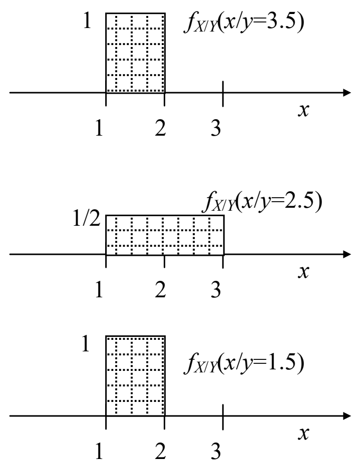
**d)** $E(X) = 3{,}6$; $E(Y) = 0{,}32$; $W$: número de bits inaceptables $\Rightarrow E(W) = 0{,}08$.

**e)** $Cov(X,Y) = -0{,}2903$ ; $Corr(X,Y) = -0{,}8917$; $X$ y $Y$ no son independientes.

**Ej.9** **a)** ¼; **b)** 0,1875; 0,25; **c) y d)** $f_X(x) = \begin{cases} 3/4 & 1<x<2 \\ 1/4 & 2<x<3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ ; $f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & 1<y<2 \\ 1/2 & 2<y<3 \\ 1/4 & 3<y<4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ .




Funciones de densidad marginales (c)




Funciones de densidad condicionales (d)

Funciones de densidad condicionales:

$$f_{X/Y}(x/y=3{,}5)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},\ f_{X/Y}(x/y=2{,}5)=\begin{cases}1/2 & 1<x<3\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},\ f_{X/Y}(x/y=1{,}5)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}.$$

**e)** $$E_{X/Y}(X/Y=y)=\begin{cases}1{,}5 & 1\le y<2 \vee 3\le y\le 4\\ 2 & 2\le y\le 3\\ \text{fuera de consideración otro caso}\end{cases}.$$

**Ej.10** **a)** $f_X(x)=2(1-x)$ con $0\le x\le 1$; $f_Y(y)=2y$ con $0\le y\le 1$; nula en otros casos.
**b)** No son independientes; **c)** 1/3; **d)** 1/4; **e)** 2/3; **f)** 1/3; **g)** 1/2; **h)** 1/4; **i)** 1/3; **j)** ½.

**Ej.11.** **a)** 0,40; **b)** 0,50; **c)** 0,045; **d)** 8/9**;** **e)** 0,596575

**Ej.12.** **a)** $E(X)$ = ¾ = 0,75 ; $E(Y)$ = 2/3 ≈ 0,6667; **b)** $f_{XY}(x\ge 0{,}5\ ;\ y\ge 0{,}5)=21/32=0{,}65625$.
**c)** $A$: evento de encontrarse si cada uno de ellos espera a lo sumo 15 minutos.
$P(A)$ = 37/64 ≈ 0,5781.
La región asociada con el evento $A$ es el polígono cerrado formado por los vértices: (0;0);(1/4;0);(1;3/4);(1;1);(3/4;1) y (0;1/4).
**d)** $E(|x-y|)$ = ¼ = 0,25.

**Ej.13.** **a)** $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$.

$$f_{XY}(x;y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\to f_{XY}(x;y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x\ge 0\wedge y\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}.$$

**b)** $P(X\le 1)=1-e^{-1}\cong 0{,}632121$; $P(Y\le 1)=1-e^{-1}\cong 0{,}632121$;

**c)** $P(X+Y\le 2)=1-3e^{-2}\cong 0.593994$

**d)** $P(1\le X+Y\le 2)=(1-3e^{-2})-(1-2e^{-1})=2e^{-1}-3e^{-2}\cong 0{,}32975$.

**e)** $F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-t}-te^{-t} & t\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$. Derivando, $f_T(t)=\begin{cases}te^{-t} & t\ge 0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$.

**Ej.14.** **a)** $f_X(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}\quad x\ge 0$**;** $f_Y(y)=e^{-y}\quad y\ge 0$**;** **b)** no son independientes; **c)** 0,00082625.

**d)** $P(X\ge 2\wedge Y\ge 2/X\ge 1\wedge Y\ge 1)=\dfrac{2}{3e^4}=0{,}0122104$; **e)** $P(0<X<1/Y=0{,}5)=0{,}393469$.

**Ej.15.** **a)** 0,0625; **b)** 0,4140625; **c)** $f_{Y/X}(y/x) = \dfrac{2y+2x}{1+2x}$ con $0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1$, nula en otro caso;

**d)** $E_{Y/X}(Y/x) = \dfrac{2+3x}{3+6x}$ $0 \le x \le 1$, nula en otro caso.

**Ej.16.** **a)** $\begin{pmatrix} 17/9 & -1/27 \\ -1/27 & 13/162 \end{pmatrix}$; **b)** –0,0951; **c)** $f(Y/X) = \dfrac{2(x+y)}{2x+1}$; $P(Y > 1/2 / X = 1) = \dfrac{7}{12}$.

**d)** $E(Y/X) = (3x+2)/(6x+3)$.

**Ej.17.** **a)** 0,1314; **b)** 0,0000; **c)** i. 1,088 litros; ii. 0,07%; iii. –0,903; **d)** i. 2581,5 g; ii. 11,31%.