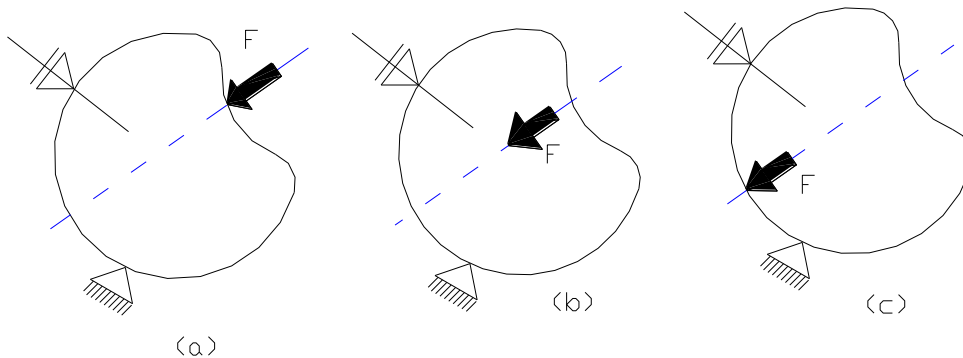


ESTADOS DE TENSION

INTRODUCCIÓN A ESTADOS DE TENSION

Cuando estudiamos en Mecánica los cuerpos, consideramos como rígido ideales a los mismos. Sabemos que en la realidad esta condición es inexistente, pues al aplicarle una fuerza cualquiera a un cuerpo, este sufre una variación de distancia entre dos puntos cualesquiera, implicando esto, una deformación del cuerpo. Nosotros consideramos, generalmente, el desplazamiento por unidad de longitud. Por consiguiente, el teorema de transmisión de las fuerzas en los cuerpos rígidos no será aplicable. Según esto son diferentes los estados de carga representados en la figura n^o 1 con la aplicación de la fuerza F en diferentes puntos de su recta de acción.

figura n^o 1



Si bien los cuerpos son deformables, limitaremos el estudio de estas deformaciones al considerar los mismos, como pequeños respecto de la longitud inicial de la pieza en cuestión. Según esto, los desplazamientos que originan las fuerzas son pequeños considerados con las dimensiones de los cuerpos, consecuentemente, cuando planteamos las condiciones de equilibrio, consideramos que el cuerpo conserva su forma original. Por ejemplo, la ley de Hooke, establece una proporcionalidad entre los desplazamientos y las fuerzas aplicadas.

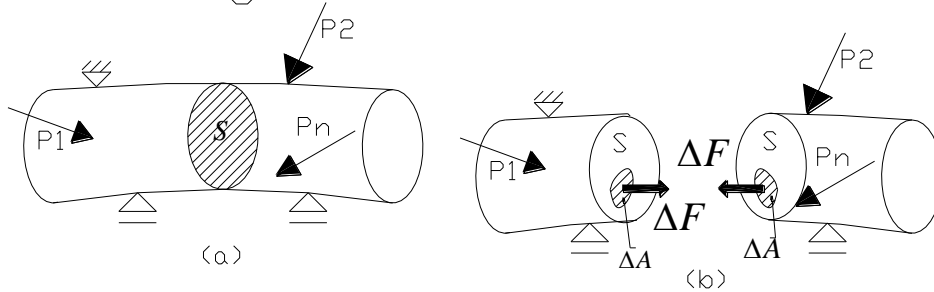
DESARROLLO TEÓRICO

Concepto de esfuerzo: considerando un cuerpo en equilibrio sometido a un sistema de cargas externas P_1, P_2, \dots, P_n , como se indica en la figura 2. Si seccionamos el cuerpo en una determinada sección S , el mismo no continuará en equilibrio, por lo que se deberán restablecer las acciones mecánicas necesarias después del corte de las acciones que ejercen una parte del cuerpo sobre la otra para que ello ocurra.

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

2

figura n ° 2

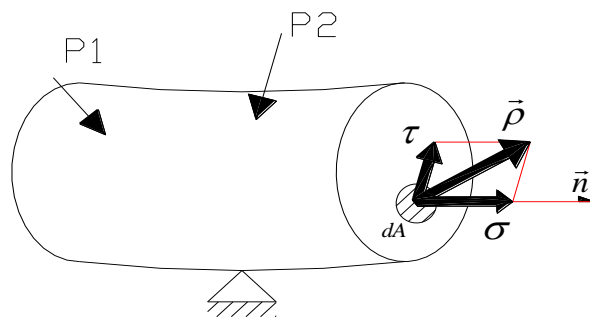


Es decir, las acciones que son las fuerzas elementales que ejercen las partículas de un lado sobre el otro. Entonces, sobre un punto O del elemento de superficie ΔA , actúa una fuerza elemental $\Delta \vec{F}$, y el esfuerzo medio ($\vec{\rho}_m$) en el punto O del elemento de superficie ΔA vendrá expresado por: $\vec{\rho}_m = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$. El esfuerzo en un punto O de la superficie S , será:

$$\vec{\rho} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

El esfuerzo $\vec{\rho}$ se descompone en dos direcciones, una de ellas, normal a la superficie S , que según el sentido de la misma, es decir si el sentido de esta fuerza es saliente, el esfuerzo es de tracción, en cambio si el sentido es entrante a la superficie, el mismo es de compresión. Esta componente se denomina esfuerzo normal, y se lo representa por σ . La componente del esfuerzo ρ en la superficie se lo denomina esfuerzo tangencial o cortante y se lo designa con τ . En la figura n ° 3, mostramos esta descomposición de la fuerza $\vec{\rho}$.

figura n ° 3



Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Debido a que las componentes τ y σ son normales entre si, entonces debe verificarse:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

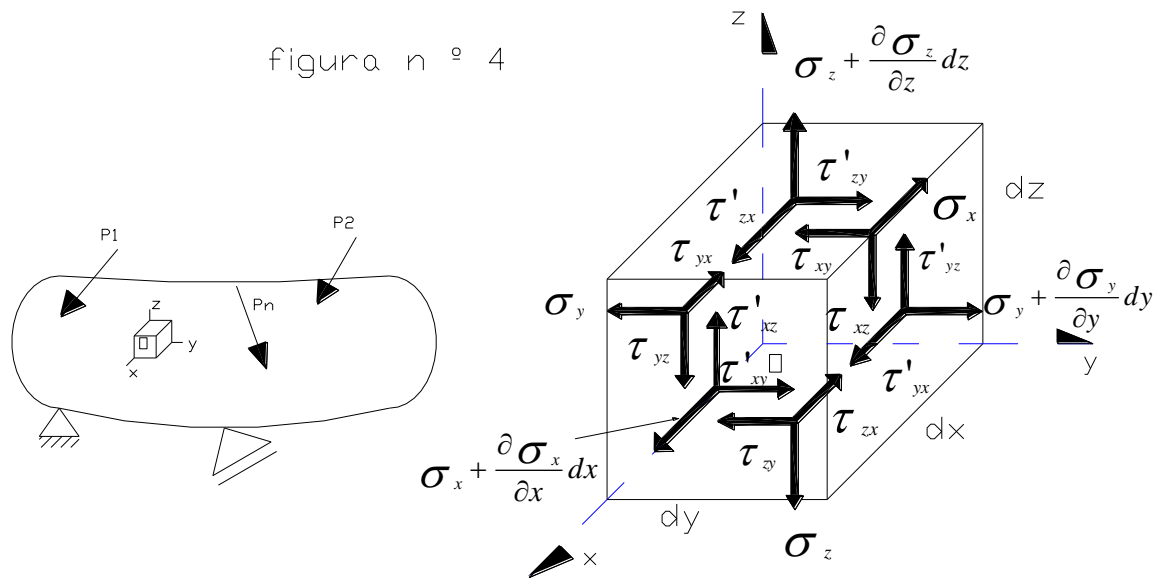
Por el punto O , se pueden hacer pasar infinitos planos, obteniéndose, en consecuencia diferentes valores de esfuerzos $\bar{\rho}$, correspondiendo este conjunto de valores al estado de esfuerzo del punto O .

Equilibrio del paralelepípedo elemental:

Considerando un punto interior O de un cuerpo sometido a una estado cualquiera de sollicitaciones, como se muestra en la figura n° 4. Del mismo, aislamos un paralelepípedo elemental que incluye al punto O en uno de sus vértices, para el posterior análisis de tensiones.

3

figura n° 4



En el límite, todas las caras pasan por el punto O , consideramos los esfuerzos sobre la cara, como esfuerzos en el punto O . Sobre las caras del paralelepípedo actúan los esfuerzos normales y tangenciales. En cuanto a los subíndices, los esfuerzos normales tienen los subíndices de los ejes a los cuales son paralelos; y, en los esfuerzos tangenciales, el primer subíndice corresponde a la dirección del vector normal a la superficie donde actúa este esfuerzo, y el segundo subíndice a la dirección paralela al esfuerzo tangencial considerado. En cuanto al signo de las tensiones normales, las mismas son positivas cuando los sentidos de las mismas son opuestos a los ejes coordenados en los planos en las caras que forman estos ejes coordenados, siendo estos, esfuerzos de tracción. Negativo en caso contrario, siendo estos esfuerzos de compresión.

Los esfuerzos que actúan en las caras opuestas del paralelepípedo, generalmente son diferentes, se decir, se tiene:

$$\sigma_x \text{ y en la cara opuesta } \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

$$\sigma_y \text{ y en la cara opuesta } \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$\sigma_z \text{ y en la cara opuesta } \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$$

$$\tau_{xy} \text{ y en la cara opuesta } \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

De forma análoga con las demás tensiones tangenciales:

$$\tau_{xz} \text{ y en la cara opuesta } \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

$$\tau_{zy} \text{ y en la cara opuesta } \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{yz} \text{ y en la cara opuesta } \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$$

$$\tau_{zx} \text{ y en la cara opuesta } \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{yx} \text{ y en la cara opuesta } \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

Considerando que el paralelepípedo estará en equilibrio por la acción de fuerzas que actúan sobre las caras, y el peso del mismo, representadas estas por \vec{X} ; \vec{Y} ; \vec{Z} , debiéndose multiplicar las mismas por el diferencial de volumen $dx \cdot dy \cdot dz$.

Realizando tres sumatorias de fuerzas según las direcciones de los ejes coordenados, multiplicando las tensiones por las áreas de las caras en donde actúan, tenemos:

$$\sum F_x = 0$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy \cdot dz + (\tau'_{yx} - \tau_{yx}) dx \cdot dz + (\tau'_{zx} - \tau_{zx}) dy \cdot dx + \vec{X} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0$$

de donde extraemos :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \vec{X} = 0 \quad \text{Ecuación a}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy - \sigma_y \right) dx \cdot dz + (\tau'_{zy} - \tau_{zy}) dy \cdot dx + (\tau'_{xy} - \tau_{xy}) dy \cdot dz + \vec{Y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

obteniéndose :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \vec{Y} = 0 \quad \text{Ecuación b}$$

Análogamente para el eje z, obtenemos:

$$\sum F_z = 0$$

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz - \sigma_z \right) dx \cdot dy + (\tau'_{yz} - \tau_{yz}) dx \cdot dz + (\tau'_{xz} - \tau_{xz}) dy \cdot dz + \vec{Z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \vec{Z} = 0 \quad \text{Ecuación c}$$

Estas tres ecuaciones a, b, y c, forman las ecuaciones de equilibrio del paralelepípedo elemental.

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

5

$$\text{Ecuaciones } 1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{Y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} = 0 \end{array} \right.$$

Considerando sumatorias de momentos con respecto a ejes x', y', z' , cuya terna está aplicada en el baricentro del paralelepípedo como se indica en la figura n° 5, tenemos las siguientes ecuaciones, despreciando infinitésimos de cuarto orden.

$$\sum M_{x'} = 0 \rightarrow (\tau'_{yz} + \tau_{yz}) dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - (\tau'_{zy} + \tau_{zy}) dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

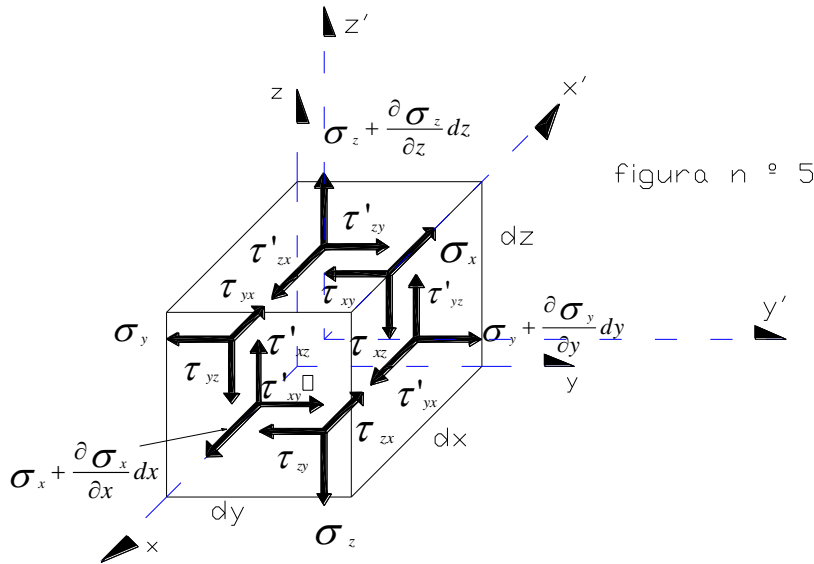
$$\text{resultando } 2\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - 2\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} = 0 \rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\sum M_{y'} = 0 \rightarrow (\tau'_{zx} + \tau_{zx}) dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} - (\tau'_{xz} + \tau_{xz}) dz \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$\rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sum M_{z'} = 0 \rightarrow (\tau'_{xy} + \tau_{xy}) dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - (\tau'_{yx} + \tau_{yx}) dz \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$



Estas expresiones: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$; $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ corresponden a la expresión analítica del teorema de Cauchy.

Teorema de Cauchy: “En dos planos normales entre si, las componentes normales a la arista común de los esfuerzos cortantes que actúan sobre dichos planos son de igual magnitud, y se acercan o se alejan de las aristas”.

Consecuentemente, de las doce componentes de esfuerzos o tensiones actuantes sobre las caras del paralelepípedo, seis son las componentes de tensiones independientes, siendo estas:

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z ; \tau_{xy} ; \tau_{zx} ; \tau_{yz} ;$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

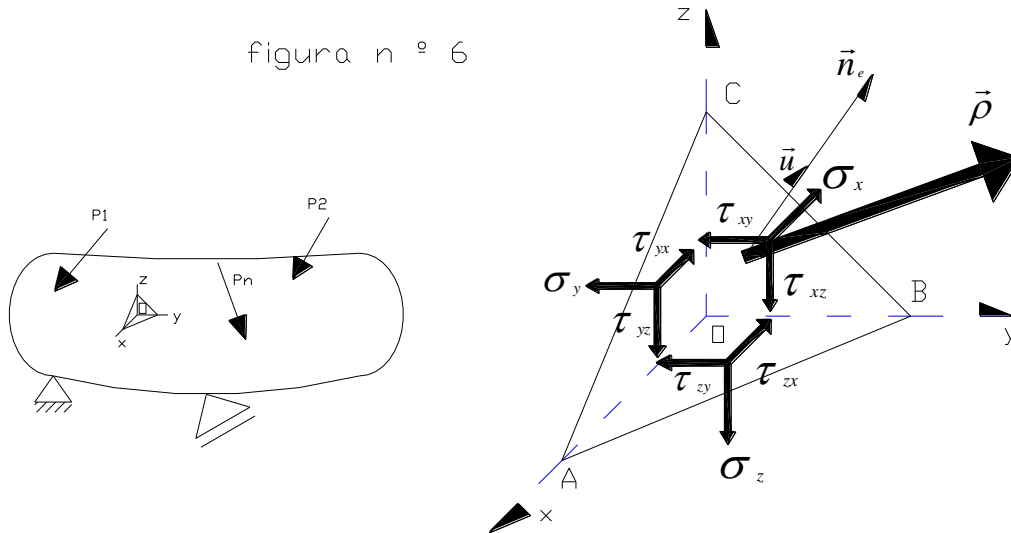
Constituyendo estas, las componentes del estado de tensiones en el punto O del cuerpo considerado.

Tensor de tensiones: Una vez conocidas las componentes de tensiones en un punto O , se podrán determinar las tensiones $\vec{\rho}$ en cualquier superficie que pase por este punto. Para determinar esto, aislamos un elemento de volumen diferencial en forma de tetraedro con vértice en el punto O , como se indica en la figura n.º 6, con las tres caras coincidentes con los planos coordenados, y la restante cara ABC de área dA definida con los cosenos directores l, m, n , siendo este plano de normal exterior \vec{n}_e .

En el límite, podemos considerar que el tetraedro se reduce al punto O , y que todas sus caras pasan por el punto O , perteneciendo estas tensiones a dicho punto.

6

figura n.º 6



Las componentes del tensor $\vec{\rho}$ sobre la cara ABC , son: ρ_x, ρ_y, ρ_z , y, realizando tres ecuaciones de proyecciones sobre los ejes x, y, z , tenemos:

$$\sum F_x = 0 = \rho_x \cdot dA - \sigma_x \cdot (dA \cdot l) - \tau_{yx} \cdot (dA \cdot m) - \tau_{zx} \cdot (dA \cdot n)$$

de donde $\rho_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n$

$$\sum F_y = 0 = \rho_y \cdot dA - \sigma_y \cdot (dA \cdot m) - \tau_{xy} \cdot (dA \cdot l) - \tau_{zy} \cdot (dA \cdot n)$$

$$\rho_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n$$

$$\sum F_z = 0 = \rho_z \cdot dA - \sigma_z \cdot (dA \cdot n) - \tau_{xz} \cdot (dA \cdot l) - \tau_{yz} \cdot (dA \cdot m)$$

$$\rho_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n$$

Conformándose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Ecuaciones 2} \begin{cases} \rho_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n \\ \rho_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n \\ \rho_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{cases}$$

Si llamamos tensor de tensiones a:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Entonces, podemos escribir $\vec{\rho}$ de la siguiente forma:

$$\vec{\rho} = T \cdot \vec{u}$$

donde \vec{u} es el versor cuya dirección es de la normal \vec{n}_e .

En consecuencia, si conocemos las componentes de las tensiones en un punto y los cosenos directores de la normal a una superficie cualquiera que pasa por el punto, se podrá determinar la tensión $\vec{\rho}$ en esta superficie.

La componente normal σ se obtendrá proyectando $\vec{\rho}$ sobre la normal a la superficie ABC.

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{u}, \text{ es decir } \sigma = \rho_x \cdot l + \rho_y \cdot m + \rho_z \cdot n$$

Que teniendo en cuenta las ecuaciones 2, resulta:

$$\sigma = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l \quad \text{Ec. 3}$$

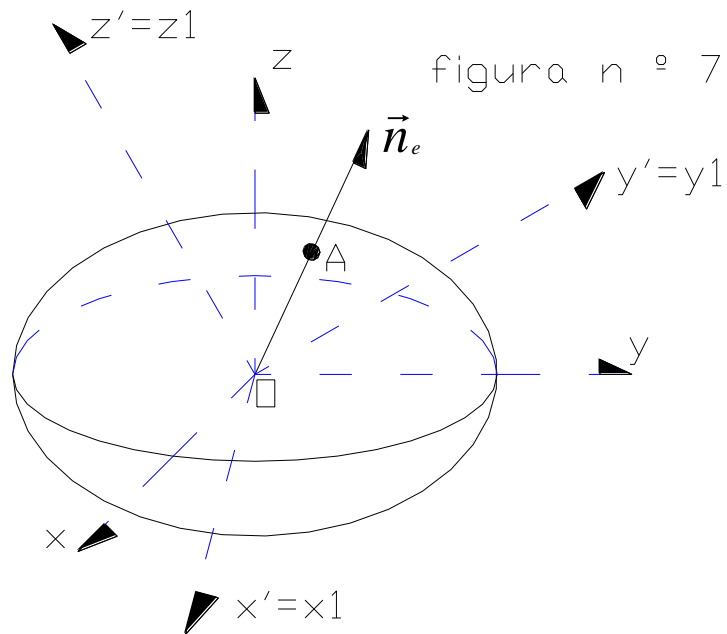
En cuanto a la tensión τ , teniendo que $\rho^2 = \tau^2 + \sigma^2$

$$\text{Entonces: } \tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$$

Tensiones principales: Variando la inclinación de los planos que pasan por el punto en estudio, se obtienen, obviamente, diferentes valores de tensiones $\vec{\rho}$. Existen planos en que las tensiones normales σ son máximas, consecuentemente, en estos planos las tensiones tangenciales τ son nulas. Estas tensiones normales en dichos planos se denominan tensiones principales, y los planos correspondientes se denominan planos principales.

Para estudiar este punto, llevamos un segmento OA en la cuádrica en la dirección de la normal \vec{n}_e , en donde O coincide con el centro de coordenadas y A es un punto de la cuádrica, y cuya longitud

sea $\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}}$ como se indica en la figura n° 7.



Si los cosenos directores de la normal \vec{n}_e son l, m, n , las coordenadas del punto Q son:

$$x = \frac{l}{\sqrt{|\sigma|}} ; y = \frac{m}{\sqrt{|\sigma|}} ; z = \frac{n}{\sqrt{|\sigma|}}$$

Sustituyendo los correspondientes valores de l, m, n , en la ecuación 3, resulta:

$$\sigma = \sigma_x \cdot (x \cdot \sqrt{|\sigma|})^2 + \sigma_y \cdot (y \cdot \sqrt{|\sigma|})^2 + \sigma_z \cdot (z \cdot \sqrt{|\sigma|})^2 + 2\tau_{xy} \cdot x \cdot \sqrt{|\sigma|} \cdot y \cdot \sqrt{|\sigma|} + 2\tau_{yz} \cdot y \cdot \sqrt{|\sigma|} \cdot z \cdot \sqrt{|\sigma|} + 2\tau_{zx} \cdot z \cdot \sqrt{|\sigma|} \cdot x \cdot \sqrt{|\sigma|}$$

que se reduce a :

$$\sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2\tau_{xy} \cdot x \cdot y + 2\tau_{yz} \cdot y \cdot z + 2\tau_{zx} \cdot z \cdot x = 1 \quad \text{Ecuación 4}$$

La ecuación 4 representa la ecuación de la superficie del lugar geométrico de los puntos Q . La cuádrica es un elipsoide de revolución cuyo centro es el punto O , y esta se denomina cuádrica directriz de los esfuerzos. Con la rotación de los ejes coordenados x, y, z , a las posiciones x', y', z' , podemos lograr que las tensiones tangenciales $\tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$ se anulen, estos ejes son los del elipsoide, y se denominan **ejes principales**, siendo las superficies normales a ellos, **superficies principales**. En consecuencia, sobre estos ejes, los esfuerzos ρ_1, ρ_2, ρ_3 son iguales a las tensiones normales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Resumiendo, en todo punto O del cuerpo existen tres superficies normales entre si para las que las tensiones tangenciales τ son nulas, existiendo solamente esfuerzos normales σ . Estas tensiones se denominan tensiones principales, y las respectivas superficies planos principales.

Siendo \vec{u} el versor en la dirección \vec{n}_e , de componentes l, m, n , y, llamando σ_i a las tensiones principales, tendremos: $\vec{\sigma}_i = \sigma_i \cdot \vec{u}$ o sea $\rho_x = \sigma_i \cdot l ; \rho_y = \sigma_i \cdot m ; \rho_z = \sigma_i \cdot n$ con lo que, la ecuaciones 2 nos quedan:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$\text{Ecuaciones 5} \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma_i)m + \tau_{zy} \cdot n = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma_i)n = 0 \end{cases}$$

Para que este sistema lineal y homogéneo tenga solución diferente de la trivial, es necesario que el determinante siguiente sea nulo.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_i) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_i) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_i) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante, y llamando a $I_1; I_2; I_3$ invariantes del estado de tensión en el punto considerado, nos queda la ecuación cúbica de tensiones principales siguiente:

$$\sigma_i^3 - I_1 \cdot \sigma_i^2 + I_2 \cdot \sigma_i - I_3 = 0 \quad \text{Ecuación 6}$$

$$\text{siendo} \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{yz} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \end{cases}$$

Si el invariante I_3 es nulo, el estado de tensiones será plano. Si los invariantes I_2 , e I_3 son nulos, el estado de tensiones es uniaxial, por tener dos raíces nulas la ecuación 6.

De esta forma, determinamos las tensiones principales $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$, ubicándolas en orden de mayor a menor, corresponde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Para que el determinante tenga una solución diferente de la trivial, es necesario que los cosenos directores l, m, n sean distintos de cero. En consecuencia, a fin de determinar las direcciones principales de las tensiones principales, será necesario reemplazar las tensiones principales en las ecuaciones 5. Por ejemplo, para la tensión principal σ_1 , cuyos cosenos directores son l_1, m_1, n_1 , las ecuaciones 5 nos quedan:

$$\text{Ecuaciones 7} \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx} \cdot m_1 + \tau_{zx} \cdot n_1 = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy} \cdot n_1 = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l_1 + \tau_{yz} \cdot m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0 \end{cases}$$

Si llamamos $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ los menores complementarios de la primer fila del sistema lineal anterior, resulta:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (\sigma_y - \sigma_1) & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_1) \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & (\sigma_z - \sigma_1) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_1) \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la primer fila, nos queda:

$$(\sigma_x - \sigma_1) \cdot \Delta_1 - \tau_{yx} \cdot \Delta_2 + \tau_{zx} \cdot \Delta_3 = 0$$

De la comparación de esta última ecuación con la primera de las ecuaciones 7, surgen las siguientes relaciones:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$\frac{l_1}{\Delta_1} = \frac{m_1}{\Delta_2} = \frac{n_1}{\Delta_3} = cte = C \quad \text{y Ecuaciones 8} \begin{cases} l_1 = C \cdot \Delta_1 \\ m_1 = C \cdot \Delta_2 \\ n_1 = C \cdot \Delta_3 \end{cases}$$

Siendo:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad C^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) = 1$$

$$\text{de donde} \quad C = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}$$

Reemplazando en las ecuaciones 8, resultan las siguientes expresiones de las direcciones principales:

$$\text{Ecuaciones 9} \begin{cases} l_1 = \pm \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ m_1 = \pm \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ n_1 = \pm \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \end{cases}$$

Tensiones tangenciales máximas: Teniendo en cuenta la ecuación 3, y, expresando la misma en función de las tensiones principales, nos queda:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 \quad \text{Ecuación 10}$$

Y, considerando que: $\rho^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2$ Ecuación 11

$$\text{En función de las tensiones principales tenemos:} \begin{cases} \rho_x = \sigma_1 \cdot l \\ \rho_y = \sigma_2 \cdot m \\ \rho_z = \sigma_3 \cdot n \end{cases}$$

Podemos expresar la ecuación 11 de la siguiente forma: $\rho^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2$

Entonces, siendo

$$\tau^2 = \rho^2 - \sigma^2 \quad \text{reemplazando expresiones}$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2)^2$$

Ordenando los términos en forma conveniente llegamos a la siguiente expresión:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 \quad \text{Ecuación 12}$$

recordando que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ podemos expresar la ecuación 12 en función de l y m reemplazando por $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ y operando algebraica mente llegamos a la siguiente expresión

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 - \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2$$

llamamos a esta, ecuación 13

Para hallar las tensiones tangenciales máximas, derivamos la ecuación 13 respecto de l , y de m respectivamente, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau^2}{\partial l} = 2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3](\sigma_1 - \sigma_3)2l \quad \text{ec. a} \\ \frac{\partial \tau^2}{\partial m} = 2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3](\sigma_2 - \sigma_3)2m \quad \text{ec. b} \end{array} \right.$$

Por condición de máximos y mínimos relativos, se deberá cumplir, considerando $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau^2}{\partial l} = 0 \rightarrow \text{obteniéndose como soluciones } l = m = 0 ; \rightarrow n = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_3 \\ \tau = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial \tau^2}{\partial m} = 0 \end{array} \right.$$

Si en la ecuación b, hacemos $l = 0$, llegamos a la siguiente expresión:

$$2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m - 4m(\sigma_2 - \sigma_3)[(\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3] = 0$$

el primer valor $m = 0$, también obtenemos:

$$(\sigma_2 + \sigma_3) = 2[(\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3] \quad \text{operando algebraica mente}$$

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_3}{2(\sigma_2 - \sigma_3)} = m^2 \rightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De haber considerado $m = 0$ en la ecuación a, hubiéramos llegado a idéntico resultado para l . O bien, también para n de realizar las mismas consideraciones.

$$\text{Si reemplazamos en la ecuación 13, por ejemplo, los valores } l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; m = 0 ; n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

obtenemos la tensión tangencial máxima, como comprobaremos a continuación.

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sigma_3^2 - \left[(\sigma_1 - \sigma_3) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sigma_3 \right]^2 \quad \text{Ecuación 14}$$

Desarrollando y simplificando esta última ecuación, resulta:

$$\tau^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \frac{2\sigma_1^2 + 2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_3^2}{4} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4}$$

$$\text{de donde } \tau_{\text{máx}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \text{Ecuación 15}$$

Para la solución $l = 0 ; m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, obtenemos:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

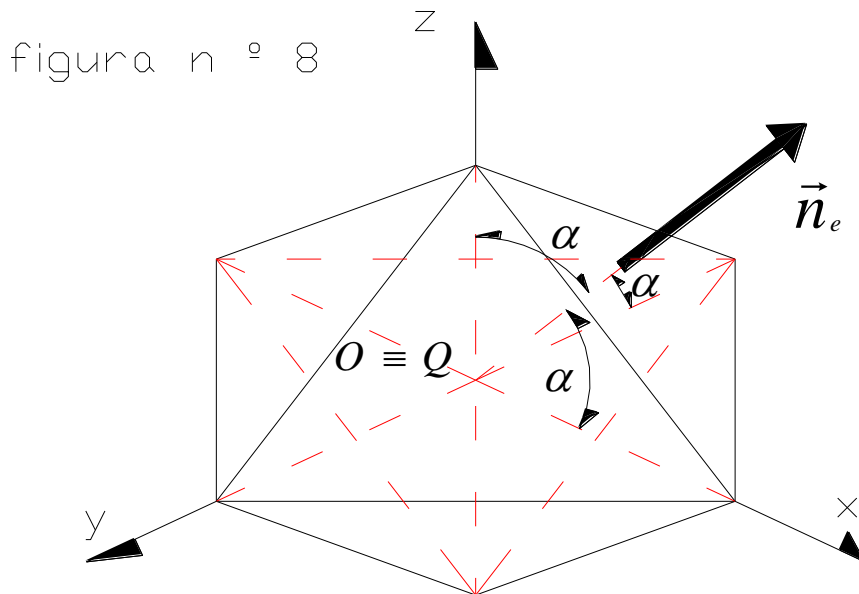
$$\tau_{\text{máx}} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Análogamente obtendremos para $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $n = 0$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

12

Tensiones tangenciales octaédricas: Para desarrollar este punto, consideraremos un punto Q , para el cual las tensiones principales son $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$, y, hacemos coincidir la terna O, x, y, z de forma tal que los ejes coincidan con las direcciones principales. Suponemos ocho planos pasantes por Q , cuyas normales exteriores sean $l = m = n$. Los planos estarán desplazados formando un octaedro como se indica en la figura n^o 8.



Debido a que los ángulos $l = m = n$, entonces se deberá cumplir:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \rightarrow 3 \cdot l^2 = 1 \rightarrow l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Correspondiéndose con un ángulo $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 54^\circ 44' 10''$

Este tema es particularmente importante para el desarrollo de una teoría de rotura. Las tensiones tangenciales y normales octaédricas las indicaremos τ_{oct} , σ_{oct} respectivamente.

Recordando que:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

$$\rho^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad \text{y} \quad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{3}$$

entonces $\rho = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}}$ Ecuación 16

y la expresión de la tensión normal $\sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2$, entonces:

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \text{Ecuación 17}$$

Además, tenemos que:

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2]^2}$$

y, reemplazando l^2, m^2, n^2 nos queda:

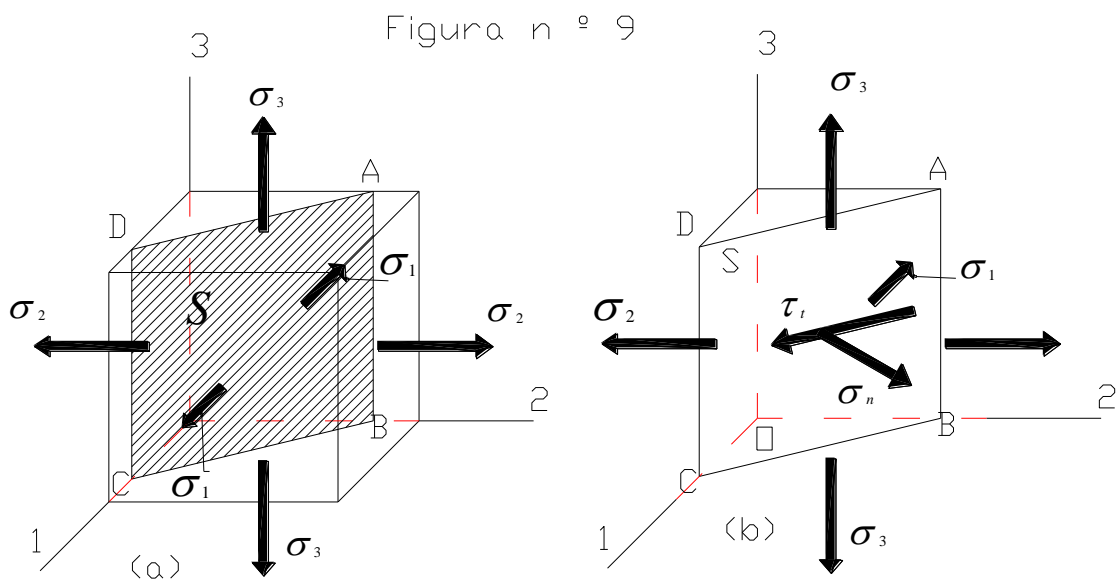
$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2}{9}}$$

expresión que desarrollada y agrupando convenientemente los términos nos queda:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad \text{Ecuación 18}$$

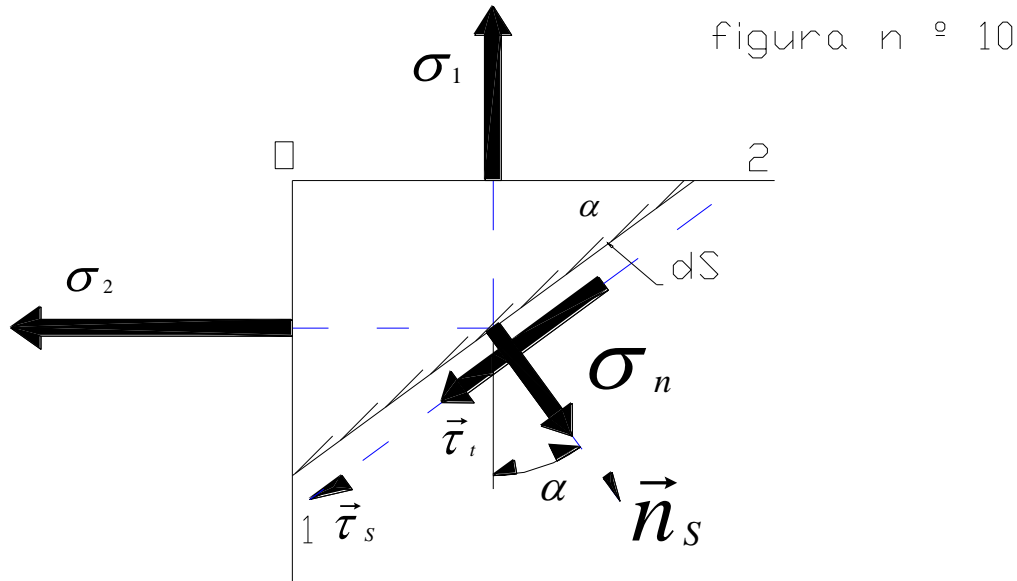
Que es la expresión de la tensión tangencial octaédrica en función de las tensiones principales.

Circunferencia de Mohr: Consideramos un paralelepípedo elemental con las caras del mismo que sean los planos principales, y, cuyas tensiones principales sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ respectivamente. Si un plano S paralelo al eje principal 3, como se indica en la figura n° 9, corta al paralelepípedo elemental formando un ángulo α con respecto al plano coordenado 2;3, obtendremos un prisma elemental. Sobre este prisma actuarán las tensiones normal y tangencial σ_n y τ_t respectivamente.



Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

La tensión tangencial τ_t es paralela a la arista BC. La normal \vec{n}_s al plano considerado, forma un ángulo α con la dirección principal 1, como se indica en la figura n.º 10.



14

Para determinar las expresiones σ_n y τ_t , realizamos dos ecuaciones de equilibrio de sumatoria de fuerzas en las direcciones \vec{n}_s y $\vec{\tau}_s$, para lo cual, tenemos:

$$\sum \vec{F}_{n_s} = 0 = \sigma_n \cdot dS - \sigma_1 \cdot (dS \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha - \sigma_2 \cdot (dS \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$$

de donde obtenemos :

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha \quad \text{Ecuación 19}$$

pero a su vez, también

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{y} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{y, reemplazando en la ecuación 19, resulta :}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} + \sigma_2 \cdot \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{que, desarrollada en forma mas conveniente}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\alpha) \quad \text{Ecuación 20}$$

$$\sum \vec{F}_{\tau_t} = 0 = \tau_t \cdot dS - \sigma_1 \cdot (dS \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha + \sigma_2 \cdot (dS \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha$$

siendo $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$, por lo que, de la sumatoria de proyecciones de fuerzas anterior,

$$\text{nos queda : } \tau_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha) \quad \text{Ecuación 21}$$

Estas ecuaciones nos permiten obtener las tensiones σ_n y τ_t correspondientes a un plano que forma un ángulo α cualquiera con el plano principal 2;3. En el caso que no tengamos en cuenta las tensiones principales, y consideremos el caso general de un elemento diferencial como el indicado en la figura n.º 11, las ecuaciones 20 y 21 cambian sustancialmente, como estudiaremos a continuación.

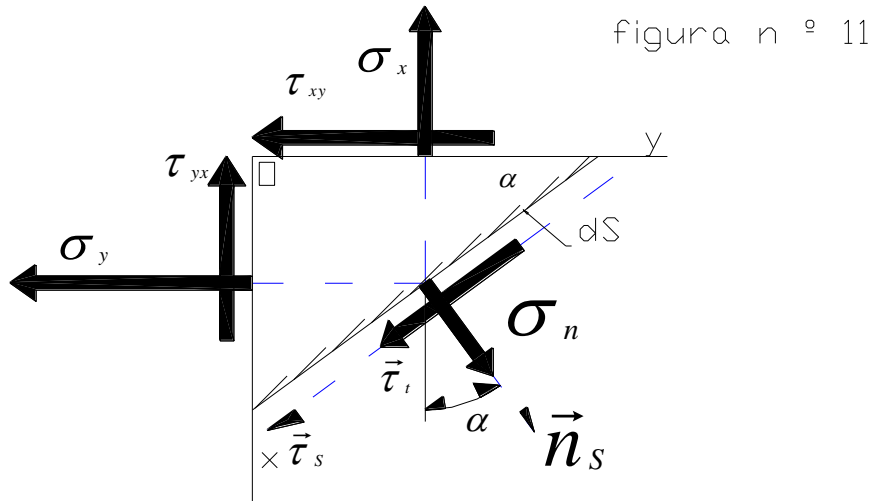


figura n ° 11

De las sumatorias de proyecciones de fuerzas, resulta:

$$\sum F_{n_s} = 0 = \sigma_n \cdot dS - \sigma_x (dS \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha - \sigma_y (dS \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha - \tau_{xy} (dS \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha - \tau_{yx} (dS \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha$$

como $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ entonces $\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

de las consideraciones anteriores respecto a las funciones trigonométricas, obtenemos :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \quad \text{Ecuación 22}$$

$$\sum F_{\tau_s} = 0 = \tau_t \cdot dS - \sigma_x (dS \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha + \sigma_y (dS \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha - \tau_{xy} (dS \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha + \tau_{yx} (dS \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha$$

entonces :

$$\tau_t = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{yx} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad \text{quedándonos :}$$

$$\tau_t = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{yx} \cos(2\alpha) \quad \text{Ecuación 23}$$

Como se observa en la ecuación 23, la tensión tangencial τ_t se encuentra desplazada en su ordenada la cantidad τ_{yx} , sin quedar afectada la forma de la tensión normal.

Si escribimos la ecuación 20 de la siguiente forma:

$$\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\alpha) \quad \text{Ecuación 24}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones 21 y 24, luego, sumando miembro a miembro las ecuaciones transformadas, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_t^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad \text{Ecuación 25}$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

La ecuación 25, representa la ecuación paramétrica de una circunferencia con centro en el punto

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; 0 \right) \text{ y radio } \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

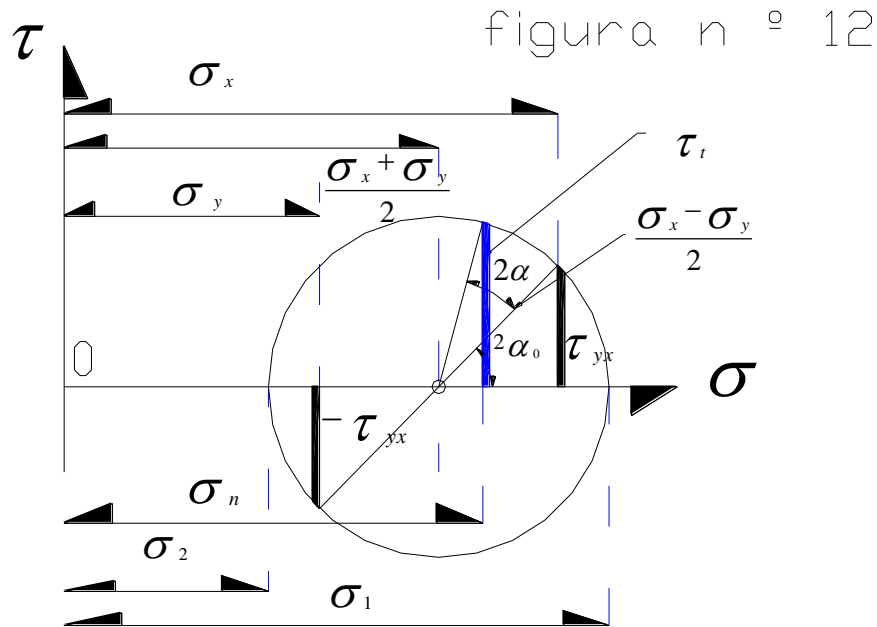
Por medio de un procedimiento análogo al anterior con las ecuaciones 22 y 23, considerando un ángulo α de inclinación, y para un plano que forma un ángulo α_0 respecto del anterior, llegamos a las siguientes expresiones de las fórmulas 22 y 23:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos[2(\alpha + \alpha_0)] - \tau_{xy} \sin[2(\alpha + \alpha_0)] && \text{Ecuación 22'} \\ \tau_t &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin[2(\alpha + \alpha_0)] + \tau_{yx} \cos[2(\alpha + \alpha_0)] && \text{Ecuación 23'} \end{aligned} \right.$$

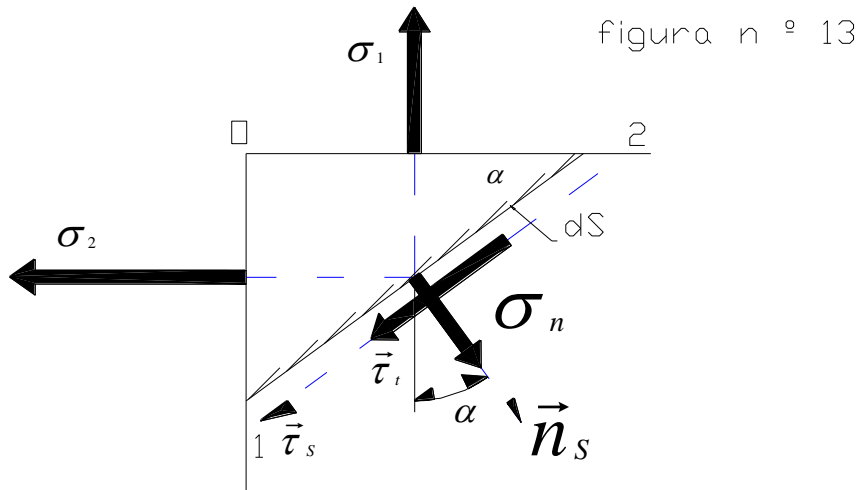
Esta situación puede representar en la circunferencia de Mohr, cuyo centro se encuentra en el punto

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; 0 \right) \text{ y radio } \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.$$

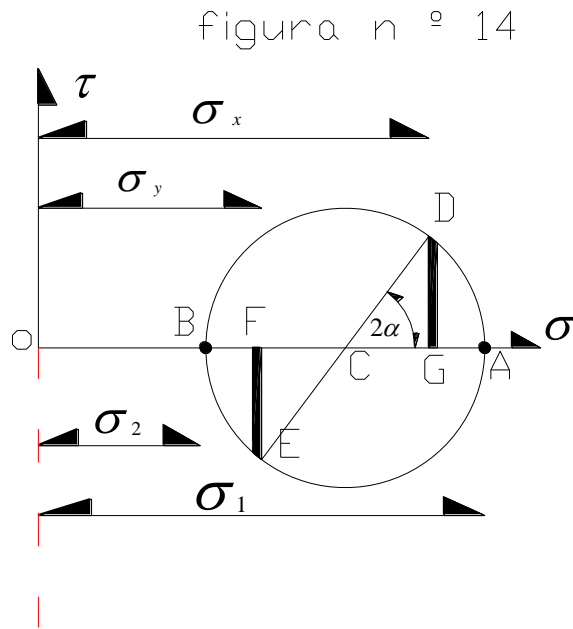
Esta situación se podrá representar gráficamente en una circunferencia como la indicada en la figura n° 12.



Para desarrollar este punto, consideramos el caso indicado en la figura n° 13.



Determinaremos la correspondencia entre las tensiones sobre el plano considerado que forma un ángulo α con la dirección principal 1, y la circunferencia de Mohr. Para ello mostramos la circunferencia de Mohr en la figura n ° 14, luego desarrollaremos nuestra explicación.



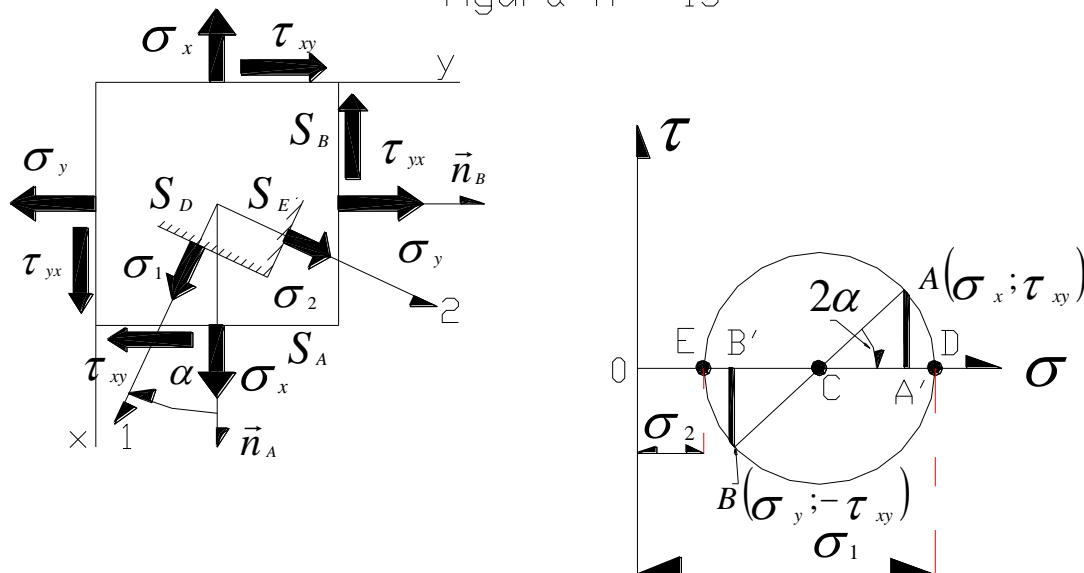
La normal \vec{n}_S al plano S, forma un ángulo α con la dirección principal 1, correspondiéndose en la circunferencia con el punto D que forma un ángulo 2α , y en la circunferencia este ángulo es $\widehat{ACD} = 2\alpha$. La abscisa \overline{OG} representa la tensión normal σ_n , mientras que la ordenada \overline{GD} representa la tensión tangencial τ_t . La tensión principal máxima σ_1 cuya dirección principal es 1, es decir, $\alpha = 0$, le corresponde la abscisa \overline{OA} , siendo, consecuentemente la tensión tangencial nula en este punto ($\tau_t = 0$). Al plano principal 2, cuya dirección principal es 2, $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, le corresponde el punto B en el eje de abscisa, y la tensión principal mínima σ_2 estará representada por la abscisa \overline{OB} ,

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

siendo, aquí, también nula la tensión tangencial en el punto F ($\tau_t = 0$). A la superficie normal a S que estamos considerando que forma un ángulo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ con la dirección principal 1, le corresponde el punto E en la circunferencia definido por el ángulo $\widehat{ACE} = 2\alpha + \pi$, es decir, punto diametralmente opuesto al D . La abscisa \overline{OF} representa la tensión normal σ'_n correspondiente a este plano; y, la ordenada \overline{EF} representa la tensión tangencial τ'_t que es igual y de sentido opuesto a τ_f , concordando con el teorema de Cauchy. Es decir, a dos planos perpendiculares entre sí, le corresponden puntos diametralmente opuestos en la circunferencia de Mohr.

Cuando se conocen las tensiones normales y tangenciales en dos planos perpendiculares entre sí, podemos graficar la circunferencia de Mohr en un sistema de ejes coordenados $\sigma; \tau$, como indicamos en la figura n° 15. Para ello, representamos el punto D de coordenadas $(\sigma_x; \tau_{xy})$, luego el punto E de coordenadas $(\sigma_y; -\tau_{xy})$. El centro C de la circunferencia de Mohr se encuentra en la intersección del segmento \overline{DE} con el eje de abscisa τ , siendo su radio $\overline{CD} = \overline{CE}$.

figura n° 15



Primeramente representamos los puntos $A(\sigma_x; \tau_{xy})$ y $B(\sigma_y; -\tau_{xy})$. Los puntos D y E representan las tensiones máxima σ_1 y mínima σ_2 respectivamente. Para determinar el plano principal S_D , será necesario girar la circunferencia de Mohr hasta hacer coincidir el segmento \overline{CA} con \overline{CD} un ángulo 2α , girando, consecuentemente, la normal \vec{n}_A al plano S_A , un ángulo α , coincidiendo así con el eje principal 1, que es normal al plano S_D . En forma análoga, determinamos el eje principal 2 normal al plano S_E .

Para determinar en forma analítica las tensiones principales, consideramos la circunferencia de Mohr de la figura n° 15. De la misma se obtiene:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$\sigma_1 = \overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD}$$

$$\text{pero } \overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{y} \quad \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \overline{CE}$$

$$\text{entonces } \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{pudiendo ser escrita también}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{Ecuación 26}$$

$$\text{análogamente: } \sigma_2 = \overline{OE} = \overline{OC} - \overline{CE}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{Ecuación 27}$$

De la circunferencia de Mohr, podemos deducir también:

$$\text{tg}(2\alpha) = -\frac{AA'}{CA'} = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \text{o lo que es igual} \quad \text{tg}(2\alpha) = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{Ecuación 28}$$

Este ángulo define (medido en sentido sinextrorsum) a partir del eje x, el eje principal, correspondiéndose con la tensión principal más próxima a σ_x . Analíticamente determinamos este ángulo correspondiente a la tensión normal máxima, o bien, igualando a 0 la ecuación 23, como derivando respecto de 2α la ecuación 22, e igualando esta derivada a 0 por condición de máximos y mínimos relativos, como pasamos a demostrar seguidamente.

Primeramente igualamos a 0 la ecuación 23, quedándonos:

$$0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen}(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha) \quad \text{de donde} \quad -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen}(2\alpha) = \tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha)$$

$$\frac{\text{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \text{quedándonos} \quad \text{tg}(2\alpha) = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

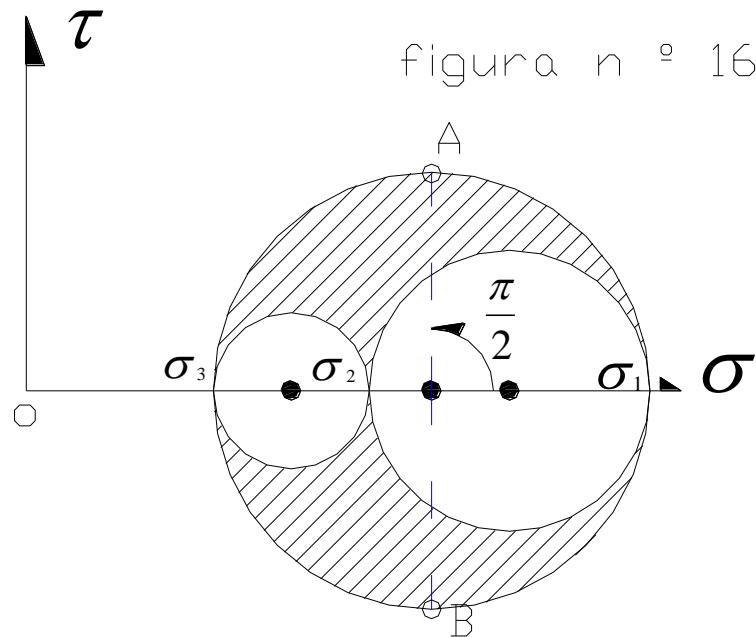
2º) Por condición de máximos y mínimos relativos en la ecuación 22;

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0 = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen}(2\alpha) - 2\tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha)$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\text{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \text{tg}(2\alpha) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Ahora bien, la circunferencia de Mohr cuyo diámetro es $|\sigma_1 - \sigma_2|$ es representativa de las tensiones σ y τ sobre planos paralelos al eje principal 3; la circunferencia de Mohr de diámetro $|\sigma_2 - \sigma_3|$ es representativa de las tensiones σ y τ en planos paralelos al eje principal 1; y, la circunferencia de Mohr de diámetro $|\sigma_1 - \sigma_3|$ será representativa de las tensiones σ y τ en los planos paralelos al eje principal 2. En la figura nº 16 mostramos estas situaciones.



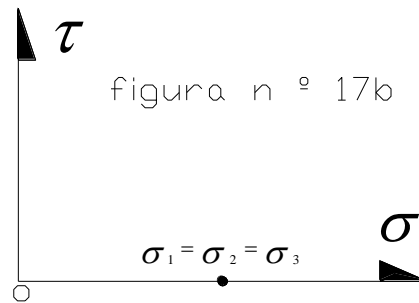
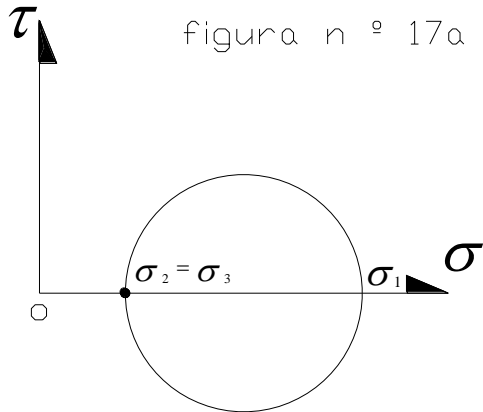
Evidentemente, la mayor tensión tangencial se corresponde con el mayor de los radios de las tres circunferencias de Mohr, su magnitud es:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Actuando con sentidos opuestos sobre las superficies S_A y S_B . Esto implica que, debemos girar el eje principal 1, en el plano perpendicular al eje principal 2, en un ángulo $\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, en sentido sinextrorsum, obteniéndose la superficie cuya normal es \vec{n}_A al plano S_A . Cuando el giro es de sentido dextrorsum, obtenemos la normal \vec{n}_B al plano S_B .

Cuando dos tensiones principales son iguales, por ejemplo $\sigma_2 = \sigma_3$, el diámetro $|\sigma_2 - \sigma_3|$ se reduce a un punto, siendo nulos las tensiones tangenciales en esta circunferencia, consecuentemente, son principales todos los planos paralelos a la dirección principal 1. Esta situación se representa en la figura n ° 17 a.

Cuando $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, las tres circunferencias de Mohr se reducen a un punto, entonces las tensiones tangenciales que actúan sobre cualquier plano son nulas, siendo todos los planos principales. La figura n ° 17b nos representa esta situación.



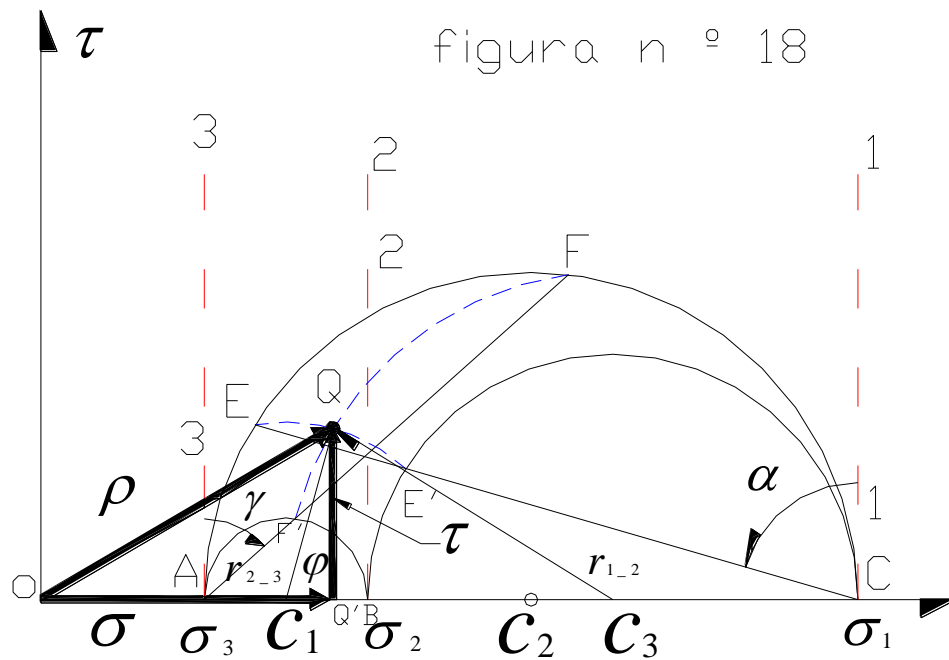
A continuación, demostraremos que un punto representativo de las tensiones normales y tangenciales situado en un plano cualquiera que no sea paralelo a un eje principal, estará ubicado en el área rayada de la figura n ° 16, limitada por las tres circunferencias.

Para ello, nos ayudamos con la figura n ° 18, que representa las tensiones τ , σ , y ρ representadas en un punto Q de un plano cuya normal de cosenos directores l , m , n , forman los ángulos α , β , γ con las direcciones principales 1 , 2 , 3 , respectivamente.

Para nuestro análisis, nos ayudará determinar las expresiones de los radios de las circunferencias. Para esto, sabemos:

$$\begin{cases} \rho^2 = \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \\ \sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ 1 = l^2 + m^2 + n^2 \end{cases}$$

Siendo nuestras incógnitas $l^2; m^2; n^2$.



Por el método de determinantes tenemos:

$$l^2 = \frac{\Delta l^2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

desarrollando en forma adecuada el determinante anterior llegamos a :

$$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2 \cdot \sigma_3 = l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{Ecuación 29}$$

sumando y restando el término $\frac{(\sigma_2 + \sigma_3)^2}{4}$, y operando convenientemente, resulta :

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3^2 + 4\sigma_2 \cdot \sigma_3}{4} = l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\text{o, también } \tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{Ecuación 30}$$

Siendo la ecuación 30, correspondiente a la familia de circunferencias de coseno director l , cuyo radio

es: $r_{2,3} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$, y cuyo centro se encuentra en el punto

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; 0 \right).$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

Análogamente para m^2 y n^2 , resultará:

para m^2 , resulta :

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 + m^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \quad \text{Ecuación 31}$$

para n^2

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \quad \text{Ecuación 32}$$

Resultando sus respectivos radios:

$$r_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

$$r_{1,3} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 + m^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

En forma gráfica, una vez construidas las circunferencias fundamentales, siendo los datos los cosenos directores l, m, n , de los ángulos α, β , y γ , trazamos un segmento \overline{CE} que forma un ángulo α con la dirección principal 1, interceptando a la circunferencia de centro C_3 en el punto E' . Análogamente, trazamos un segmento \overline{AF} que forma un ángulo γ con la dirección principal 3, interceptando a la circunferencia de centro C_2 en el punto F' .

Siendo $\overline{AC} = \sigma_1 - \sigma_3$ y $\overline{EC} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha = (\sigma_1 - \sigma_3) \text{sen } \alpha$

En el triángulo $\hat{E}C_1C$, resulta: $\overline{C_1C} = \overline{OC} - \overline{OC_1} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

Aplicando el teorema del coseno, nos queda:

$$\overline{C_1E}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{C_1C}^2 - 2 \cdot \overline{CE} \cdot \overline{C_1C} \cdot \cos \alpha \quad \text{como } \overline{C_1E} = \overline{C_1Q}$$

obtenemos, reemplazando en teorema del coseno :

$$\overline{C_1Q}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \text{sen}^2 \alpha + \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3) \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \text{sen}^2 \alpha$$

Realizando ciertas transformaciones algebraicas, nos queda:

$$\overline{C_1Q}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3) \text{sen}^2 \alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

de donde, desarrollando esta última expresión, luego, sumamos y restamos el término :

$$\frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)}{4}, \text{ y operando, llegamos a :}$$

$$\overline{C_1Q}^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4} + (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - \text{sen}^2 \alpha) \quad \text{ó}$$

$$\overline{C_1Q}^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4} + (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)l^2$$

como $\overline{C_1Q} = r_{2,3}$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

Análogamente

$$\overline{C_3 Q} = r_{1-2} \quad \text{y} \quad \overline{C_2 Q} = r_{1-3}$$

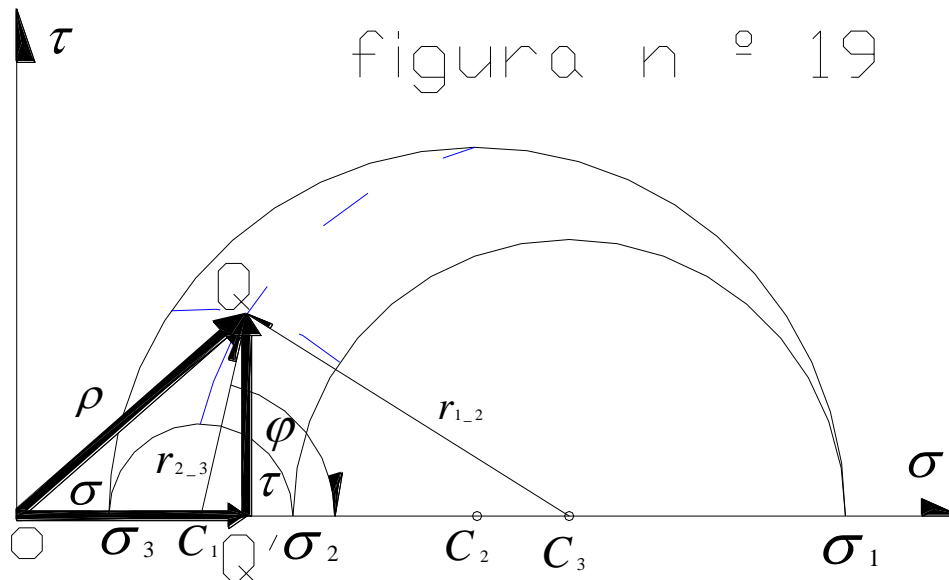
Además, se tiene:

$$\overline{C_3 C_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

En el triángulo $C_1 Q C_3$, que detallamos en la figura n° 19, se tiene:

$$r_{1-2}^2 = r_{2-3}^2 + \overline{C_1 C_3}^2 - 2\overline{C_1 C_3} \cdot r_{2-3} \cdot \cos \varphi \quad \text{Ecuación 33}$$

24



Por otra parte, en el triángulo $OQ C_1$ tenemos:

$$\overline{OQ}^2 = r_{2-3}^2 + \overline{OC_1}^2 - 2r_{2-3} \cdot \overline{OC_1} \cdot \cos(\pi - \varphi) \quad \text{y} \quad \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$$

llegamos a la siguiente expresión:

$$\overline{OQ}^2 = r_{2-3}^2 + \overline{OC_1}^2 + 2r_{2-3} \cdot \overline{OC_1} \cdot \cos \varphi \quad \text{Ecuación 34}$$

despejando $\cos \varphi$ de la ecuación 33, resulta :

$$\cos \varphi = \frac{r_{2-3}^2 - r_{1-2}^2 + \overline{C_1 C_3}^2}{2r_{2-3} \cdot \overline{C_1 C_3}}$$

Reemplazando esta expresión del $\cos \varphi$ en la ecuación 34, resulta:

$$\overline{OQ}^2 = r_{2-3}^2 + \overline{OC_1}^2 + 2r_{2-3} \cdot \overline{OC_1} \cdot \frac{r_{2-3}^2 + \overline{C_1 C_3}^2 - r_{1-2}^2}{2r_{2-3} \cdot \overline{C_1 C_3}}$$

Que, luego de realizar ciertas operaciones algebraicas resulta la siguiente expresión:

$$\overline{C_1 C_3} \cdot \overline{OQ}^2 = (\overline{OC_1} + \overline{C_1 C_3})r_{2-3}^2 + \overline{OC_1} \cdot \overline{C_1 C_3} - \overline{OC_1} \cdot r_{1-2}^2$$

Y, reemplazando $\overline{OC_1} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ y $\overline{C_1 C_3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

Y las expresiones $r_{1,2}$ y $r_{2,3}$ de las páginas 20 y 21, nos queda la siguiente ecuación:

$$\overline{C_1 C_3} \cdot \overline{OQ}^2 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \left[\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + l^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right] - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \right] \quad \text{Ecuación 35}$$

Desarrollando la ecuación 35, y, agrupando términos en forma conveniente (recuérdese que $1 - l^2 - n^2 = m^2$), se llega a la siguiente ecuación:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \overline{OQ}^2 = \frac{4\sigma_2^2 \cdot m^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + 4\sigma_1^2 \cdot l^2 (\sigma_1 - \sigma_3) + 4\sigma_3^2 \cdot n^2 (\sigma_1 - \sigma_3)}{4}$$

simplificando se llega a :

$$\overline{OQ}^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 = \rho^2 \quad \text{Ecuación 36}$$

que era lo que se pretendía demostrar

Igualmente, se puede demostrar $\overline{OQ}' = \sigma$

Para lo cual, observamos de la figura n° 19:

$$\overline{OQ}' = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + r_{2,3} \cdot \cos \varphi \quad \text{que, reemplazando } \cos \varphi, \text{ se llega a :}$$

$$\overline{OQ}' = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{r_{2,3}^2 + \overline{C_1 C_3}^2 - r_{1,2}^2}{2\overline{C_1 C_3}} \quad \text{que reemplazando expresiones y realizando}$$

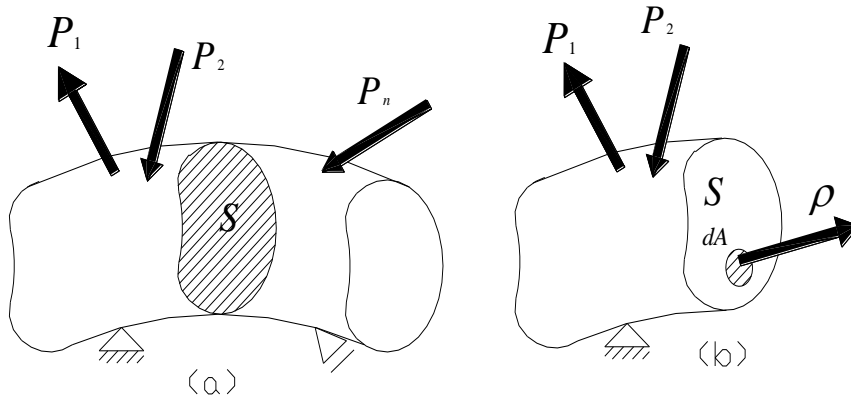
algunas operaciones algebraicas se llega a

$$\overline{OQ}' = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 = \sigma \quad \text{Ecuación 37}$$

Relaciones entre solicitaciones y tensiones:

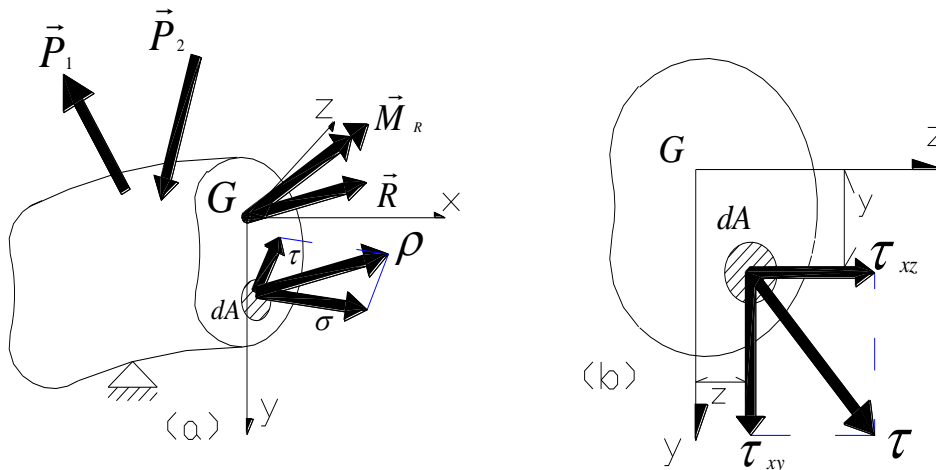
Consideremos un tramo de una pieza en equilibrio cuyo eje neutro permanece normal a la sección de la pieza en toda su extensión, como indica la figura n° 20.

figura n ° 20



Si seccionamos la pieza en dos partes en una sección S , se ponen en evidencia el esfuerzo $\vec{\rho}$. Las acciones mecánicas, o el esfuerzo $\vec{\rho}$ que las partículas ejercen sobre el elemento de superficie dA de la sección S , originan un sistema de fuerzas internas que restablecen el equilibrio de la parte de la parte izquierda de la pieza, tal como mostramos en la figura n ° 21.

figura n ° 21



Cuando reducimos el sistema de fuerzas que actúa en la sección transversal derecha S al centro de gravedad G de esta sección, se obtendrán una resultante de fuerzas \vec{R} , y un momento de reducción \vec{M}_R como indica la figura n ° 21 a. Proyectando la resultante \vec{R} sobre el eje x de la terna x, y, z , y sobre al plano zy , de la sección S , se obtiene, una fuerza normal N y un esfuerzo cortante τ respectivamente. Cuando descomponemos este esfuerzo cortante τ sobre los ejes z e y , se obtienen sus componentes T_z y T_y . En forma similar, al proyectar el momento de reducción \vec{M}_R sobre el eje

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

x , y sobre el plano zy , se obtendrán el momento torsor \vec{M}_t y el momento flector M , cuyas componentes en los ejes z e y son \vec{M}_z y M_y respectivamente.

En consecuencia, las sollicitaciones de la sección transversal S son:

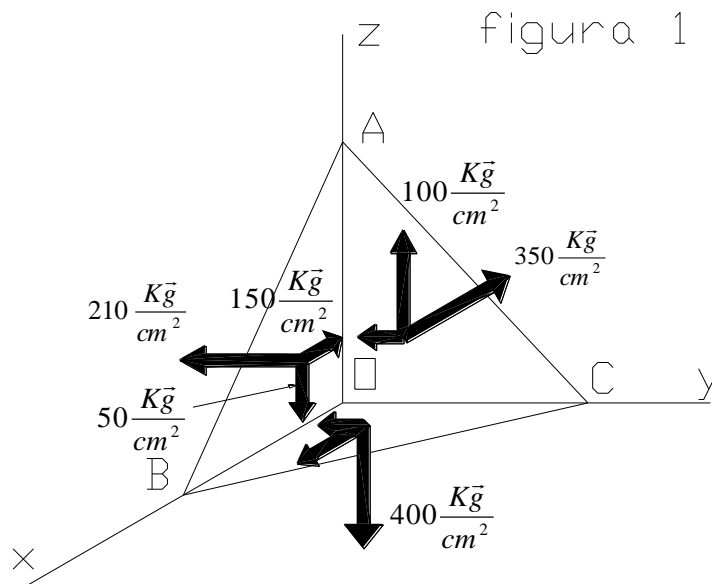
$$N; T_y; T_z; M_t; M_y; M_z$$

Estas sollicitaciones formaran un sistema equivalente al sistema de fuerzas internas elementales $\vec{\rho} \cdot dA$ actuantes sobre la sección transversal S , como se indica en la figura n^o 21b. De aquí, deducimos las siguientes relaciones entre tensiones y sollicitaciones:

Ecuaciones 38

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_S \sigma_x \cdot dA \\ T_y = \int_S \tau_{xy} \cdot dA \\ T_z = \int_S \tau_{xz} \cdot dA \\ M_t = \int_S (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA \\ M_y = \int_S \sigma_x \cdot z \cdot dA \\ M_z = \int_S \sigma_x \cdot y \cdot dA \end{array} \right.$$

Problema n^o 1: En la figura 1 se representa un estado tensional cuya normal al plano tiene los siguientes cosenos directores $l = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $n = \frac{1}{2}$. Determinéense las tensiones σ , τ , y el esfuerzo p en el plano ABC.



Solución

Determinaremos el coseno director m faltante. De álgebra sabemos que:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{de donde extraemos : } m = \sqrt{1 - l^2 - n^2}$$

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{20}}$$

De la figura 1 extraemos los datos de las tensiones.

$$\begin{cases} \sigma_x = 350 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_y = 210 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_z = 400 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xy} = 150 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xz} = 50 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{yz} = -100 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

De acuerdo a las ecuaciones 2, tenemos:

$$\begin{cases} \rho_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot n + \tau_{zx} \cdot m \\ \rho_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n \\ \rho_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{cases}$$

Y, en nuestro problema

$$\begin{cases} \rho_x = 350 \frac{1}{\sqrt{5}} + 150 \sqrt{\frac{11}{20}} + 50 \cdot \frac{1}{2} = 292,76 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_y = 150 \frac{1}{\sqrt{5}} + 210 \sqrt{\frac{11}{20}} - 100 \cdot \frac{1}{2} = 172,82 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_z = 50 \frac{1}{\sqrt{5}} - 100 \sqrt{\frac{11}{20}} + 400 \cdot \frac{1}{2} = 148,2 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

A su vez, sabemos que:

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} = \sqrt{(292,76)^2 + (172,82)^2 + (148,2)^2} = 370,86 \frac{Kg}{cm^2}$$

Seguidamente, determinamos la tensión normal σ mediante la ecuación 3.

$$\sigma = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2 \tau_{xy} \cdot l \cdot m + 2 \tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2 \tau_{zx} \cdot n \cdot l$$

O sea:

$$\sigma = 350 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 210 \left(\sqrt{\frac{11}{20}}\right)^2 + 400 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot 150 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{11}{20}} - 2 \cdot 100 \cdot \sqrt{\frac{11}{20}} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sigma = 333,19 \frac{Kg}{cm^2}$$

Y, finalmente determinamos la tensión tangencial τ mediante:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} = \sqrt{(370,86)^2 - (333,19)^2} = 162,85 \frac{Kg}{cm^2}$$

Problema n.º 2: Determinar los valores de las tensiones principales correspondientes al problema n.º 1, indicando los cosenos directores de estas.

Solución

Para determinar las tensiones principales, recurrimos a la ecuación 6, determinando los invariantes del mismo.

$$\sigma_i^3 - I_1 \cdot \sigma_i^2 + I_2 \cdot \sigma_i - I_3 = 0 \quad \text{Ecuación 6}$$

$$\text{siendo} \begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{yz} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \end{cases}$$

En nuestro caso resulta:

$$\begin{cases} I_1 = 350 + 210 + 400 = 960 \frac{Kg}{cm^2} \\ I_2 = 350 \cdot 400 + 400 \cdot 210 + 350 \cdot 210 - 50^2 - 150^2 - (-100)^2 = 262500 \frac{Kg^2}{cm^4} \\ I_3 = 350 \cdot 210 \cdot 400 + 2 \cdot 50 \cdot 150 \cdot (-100) - 350 \cdot 150^2 - 210 \cdot 50^2 - 400 \cdot (-100)^2 = \\ I_3 = 15500000 \frac{Kg^3}{cm^6} \end{cases}$$

Y, la ecuación 6 nos queda:

$$\sigma_i^3 - 960 \cdot \sigma_i^2 + 262500 \sigma_i - 15500000 = 0$$

La solución de esta ecuación cúbica nos conduce a las siguientes raíces:

$$\sigma_{i-1} = 482,752 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{i-2} = 81,0365 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{i-3} = 396,2114 \frac{Kg}{cm^2}$$

Ordenando estas tensiones de mayor a menor de la siguiente forma:

$$\sigma_1 = 482,752 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_2 = 396,2114 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_3 = 81,0365 \frac{Kg}{cm^2}$$

Seguidamente, determinaremos sus direcciones. Para ello emplearemos las ecuaciones 5 y 9, para cada una de las tensiones principales determinadas anteriormente.

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma_i)m + \tau_{zy} \cdot n = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma_i)n = 0 \end{cases}$$

Comenzaremos con la tensión principal σ_1 cuyos cosenos directores llamaremos $l_1; m_1; n_1$.

Para ello reemplazamos en la ecuación 5 los datos y el valor de la tensión principal σ_1 .

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$\begin{cases} (350 - 482,752)l_1 + 150 \cdot m_1 + 50 \cdot n_1 = 0 \\ 150 \cdot l_1 + (210 - 482,752)m_1 - 100 \cdot n_1 = 0 \\ 50 \cdot l_1 - 100 \cdot m_1 + (400 - 482,752)n_1 = 0 \end{cases}$$

Con las ecuaciones 9, determinaremos los menores del determinante anterior, y luego los cosenos directores.

$$\begin{cases} l_1 = \pm \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ m_1 = \pm \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \\ n_1 = \pm \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \end{cases}$$

Determinación de los menores

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (210 - 482,752) & -100 \\ -100 & (400 - 482,752) \end{vmatrix} = 12570,773$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 150 & -100 \\ 50 & (400 - 482,752) \end{vmatrix} = -7412,8 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 150 & (210 - 482,752) \\ 50 & -100 \end{vmatrix} = -1362,4$$

Entonces,

$$l_1 = \pm \frac{12570,773}{\sqrt{(12570,773)^2 + (-7412,8)^2 + (-1362,4)^2}} = \pm 0,85766$$

$$m_1 = \pm \frac{7412,8}{\sqrt{(12570,773)^2 + (-7412,8)^2 + (-1362,4)^2}} = \pm 0,50575$$

$$n_1 = \pm \frac{1362,4}{\sqrt{(12570,773)^2 + (-7412,8)^2 + (-1362,4)^2}} = \pm 0,093$$

Las direcciones con respecto a los ejes coordenados serán:

$$\alpha_1 = \arccos 0,85766 = 30^\circ 56' 2''$$

$$\beta_1 = \arccos 0,50575 = 59^\circ 37' 8''$$

$$\gamma_1 = \arccos 0,093 = 84^\circ 39' 49''$$

Con respecto a la tensión principal σ_2 , tenemos:

$$\begin{cases} (350 - 396,2114)l_2 + 150 \cdot m_2 + 50 \cdot n_2 = 0 \\ 150 \cdot l_2 + (210 - 396,2114)m_2 - 100 \cdot n_2 = 0 \\ 50 \cdot l_2 - 100 \cdot m_2 + (400 - 396,2114)n_2 = 0 \end{cases}$$

Y los menores complementarios correspondientes son:

**Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián
Pérgola**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (210 - 396,2114) & -100 \\ -100 & (400 - 396,2114) \end{vmatrix} = -10705,48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 150 & -100 \\ 50 & (400 - 396,2114) \end{vmatrix} = 5568,29$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 150 & (210 - 396,2114) \\ 50 & -100 \end{vmatrix} = -5689,43$$

Cosenos directores:

$$l_2 = \pm \frac{10705,48}{\sqrt{(-10705,48)^2 + (5568,29)^2 + (-5689,73)^2}} = \pm 0,8024$$

$$m_2 = \pm \frac{5568,290}{\sqrt{(-10705,48)^2 + (5568,29)^2 + (-5689,73)^2}} = \pm 0,41737$$

$$n_2 = \pm \frac{5689,43}{\sqrt{(-10705,48)^2 + (5568,29)^2 + (-5689,73)^2}} = \pm 0,42645$$

Y, las respectivas direcciones serán:

$$\alpha_2 = \arccos 0,8024 = 36^\circ 38' 24''$$

$$\beta_2 = \arccos 0,41737 = 65^\circ 19' 52''$$

$$\gamma_2 = \arccos 0,42645 = 64^\circ 45' 27''$$

Con respecto a la tensión principal σ_3 , resulta:

$$\begin{cases} (350 - 81,0365)l_3 + 150 \cdot m_3 + 50 \cdot n_3 = 0 \\ 150 \cdot l_3 + (210 - 81,0365)m_3 - 100 \cdot n_3 = 0 \\ 50 \cdot l_3 - 100 \cdot m_3 + (400 - 81,0365)n_3 = 0 \end{cases}$$

Determinación de los menores complementarios.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (210 - 81,0365) & -100 \\ -100 & (400 - 81,0365) \end{vmatrix} = 31134,649$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 150 & -100 \\ 50 & (400 - 81,0365) \end{vmatrix} = 52844,525$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 150 & (210 - 81,0365) \\ 50 & -100 \end{vmatrix} = -21448,175$$

Entonces, los cosenos directores nos quedan:

$$l_3 = \pm \frac{31134,649}{\sqrt{(31134,649)^2 + (52844,625)^2 + (-21448,175)^2}} = \pm 0,4792$$

$$m_3 = \pm \frac{52844,525}{\sqrt{(31134,649)^2 + (52844,625)^2 + (-21448,175)^2}} = \pm 0,81329$$

$$n_3 = \pm \frac{21448,175}{\sqrt{(31134,649)^2 + (52844,625)^2 + (-21448,175)^2}} = \pm 0,33$$

Las direcciones correspondientes son:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

$$\alpha_3 = \arccos 0,4792 = 61^\circ 22'$$

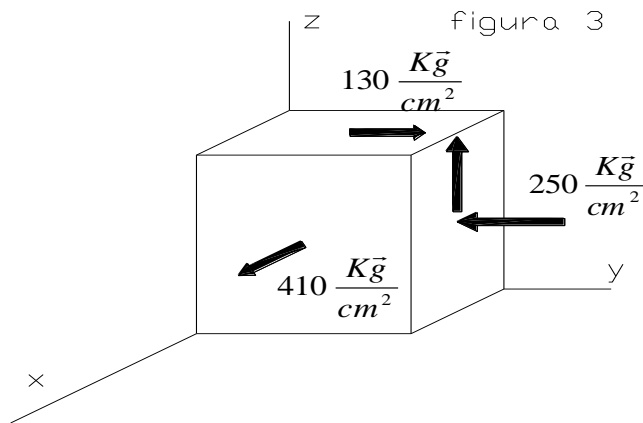
$$\beta_3 = \arccos 0,81329 = 35^\circ 34' 52''$$

$$\gamma_3 = \arccos 0,33 = 70^\circ 43' 52''$$

Problema n.º 3: En la figura 3 está representado un estado tensional, para el que se deberá determinar:

- a) Las tensiones principales;
- b) Los cosenos directores de estas tensiones principales;
- c) Las tensiones normales y tangenciales para un plano cuya normal exterior es

$$\vec{n} \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{23}{36} \right)$$



Solución

De la figura 3 podemos extraer los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 410 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_y = -250 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} = 130 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xz} = 0 \end{array} \right.$$

a) Determinación de las tensiones principales.

La tensión normal σ_x es una tensión principal, debido que en el plano yz no actúa tensión tangencial alguna. Para determinar las restantes tensiones principales debemos considerar las ecuaciones 26 y 27, debido a que se reduce a un estado plano. De las mismas obtenemos:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$\sigma' = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2}$$

Reemplazando datos, resulta:

$$\sigma' = \frac{-250 + 0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-250 - 0)^2 + 4 \cdot 130^2} = 55,347 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{-250 + 0}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-250 - 0)^2 + 4 \cdot 130^2} = -305,347 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

A continuación ubicamos estas tensiones en orden de mayor a menor.

$$\sigma_1 = 410 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} ; \sigma_2 = 55,347 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} ; \sigma_3 = -305,347 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

b) Cosenos directores de las tensiones principales.

Comenzando por la tensión σ_1 , es evidente que la dirección del versor normal coincide con la dirección de la tensión σ_x , por tanto, los cosenos directores serán $l_1 = 1; m_1 = 0; n_1 = 0$

Para la tensión principal σ_2 , con ayuda de las ecuaciones 5 y 9 determinamos los mismos.

$$\begin{cases} (410 - 55,347)l_2 + 0 \cdot m_2 + 0 \cdot n_2 = 0 \\ 0 \cdot l_2 + (-250 - 55,347)m_2 + 130 \cdot n_2 = 0 \\ 0 \cdot l_2 + 130 \cdot m_2 + (0 - 55,347) \cdot n_2 = 0 \end{cases}$$

Deberá ser $l_2 = 0$, pues la dirección de esta tensión es normal a σ_1 que lleva la dirección x .

Determinamos los menores complementarios Δ_2, Δ_3 . Pues $\Delta_1 = 0$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 130 \\ 0 & (0 - 55,347) \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & (-250 - 55,347) \\ 0 & (0 - 55,347) \end{vmatrix} = 0$$

Y, como se nos plantea una incompatibilidad en la resolución del punto, pues resulta

$m_2 = n_2 = 0$, entonces debemos recurrir a $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ para resolver lo pedido.

De la segunda ecuación obtenemos:

$$m_2 = \frac{130}{305,347} n_2 = 0,4257 n_2$$

Y, reemplazando en la ecuación de la suma de los cuadrados de los cosenos directores se obtiene:

$$0^2 + (0,4257 n_2)^2 + n_2^2 = 1 \rightarrow n_2 = 0,92 ; m_2 = 0,391$$

Con lo que el versor de esta tensión es $\vec{u}(0; 0,391; 0,92)$

Para la tensión principal σ_3 , tenemos:

$$\begin{cases} (410 + 305,347)l_3 + 0 \cdot m_3 + 0 \cdot n_3 = 0 \\ 0 \cdot l_3 + (-250 + 305,347)m_3 + 130 \cdot n_3 = 0 \\ 0 \cdot l_3 + 130 \cdot m_3 + (0 + 305,347) \cdot n_3 = 0 \end{cases}$$

Por razones análogas a la tensión principal σ_3 corresponde $l_3 = 0$.

De la segunda ecuación del sistema anterior obtenemos:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$m_3 = -\frac{130}{-250 + 305,347} n_3 = -2,3488 n_3$$

Entonces,

$$0^2 + (-2,3488 n_3)^2 + n_3^2 = 1 \rightarrow n_3 = 0,3917 \rightarrow m_3 = -2,3488 \cdot 0,3917 = -0,92$$

Y, en versor de esta tensión es $\vec{u}(0; -0,92; 0,3917)$

c) tensiones normal y tangencial para un plano cuya normal es $\vec{n}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{23}{36}\right)$.

Tensión normal. De acuerdo a la fórmula de la ecuación 3,

$$\sigma = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l$$

Reemplazando datos nos queda:

$$\sigma = 410 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 250 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 \cdot \left(\frac{23}{36}\right)^2 + 2 \cdot 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 130 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{23}{36}\right) + 2 \cdot 0 \cdot \left(\frac{23}{36}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\sigma = 66,11 \frac{Kg}{cm^2}$$

Para determinar la tensión tangencial, debemos determinar el esfuerzo ρ mediante las ecuaciones 2, siendo:

$$\begin{cases} \rho_x = 410 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(\frac{23}{36}\right) = 136,66 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_y = 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 250 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 130 \cdot \left(\frac{23}{36}\right) = -41,944 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_z = 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 130 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(\frac{23}{36}\right) = 65 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

En valor absoluto es $\rho = \sqrt{(136,66)^2 + (-41,944)^2 + (65)^2} = 157,03 \frac{Kg}{cm^2}$

Y, la tensión tangencial es:

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$$

O sea:

$$\tau = \sqrt{(157,03)^2 - (66,11)^2} = 142,435 \frac{Kg}{cm^2}$$

Problema n° 4: Los componentes de un estado tensional son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 380 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_y = 600 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_z = -450 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xy} = 150 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{zy} = -210 \frac{Kg}{cm^2} \end{array} \right.$$

Determinar:

- a) El tensor de tensiones;
- b) La cuádrica directriz de tensiones;
- c) Las tensiones principales y sus direcciones;
- d) Las tensiones cortantes y normal en el plano bisector del diedro xy .

Solución

a) El tensor de tensiones es:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ en nuestro problema resulta :}$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 380 & 150 & 0 \\ 150 & 600 & -210 \\ 0 & -210 & -450 \end{bmatrix}$$

b) Cuádrica de tensiones. De acuerdo a la ecuación 4, la cuádrica de tensiones es:

$$\sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot x \cdot y + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot y \cdot z + 2 \cdot \tau_{zx} \cdot x \cdot z = 1$$

Reemplazando valores nos queda:

$$380x^2 + 600y^2 - 450z^2 + 2 \cdot 150 \cdot x \cdot y + 2 \cdot (-210) \cdot y \cdot z + 2 \cdot 0 \cdot x \cdot z = 1$$

que reduciendo resulta :

$$380x^2 + 600y^2 - 450z^2 + 300x \cdot y - 420y \cdot z = 1$$

c) Tensiones principales y ejes principales.

Determinamos, primeramente, los invariantes del estado de tensión mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \end{cases}$$

resultando para nuestro problema :

$$\begin{cases} I_1 = 380 + 600 - 450 = 530 \frac{Kg}{cm^2} \\ I_2 = 380 \cdot (-450) + (-450) \cdot 600 + 380 \cdot 600 - 0^2 - (150)^2 - (-210)^2 = -279600 \frac{Kg^2}{cm^4} \\ I_3 = 380 \cdot 600 \cdot (-450) + 2 \cdot 150 \cdot (-210) \cdot 0 - 380 \cdot 150^2 - 600 \cdot 0^2 - (-450) \cdot (-210)^2 = \\ I_3 = -91305000 \frac{Kg^3}{cm^6} \end{cases}$$

Y, la ecuación cúbica de tensiones nos queda:

$$\sigma_i^3 - 530\sigma_i^2 - 279600\sigma_i + 91305000 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cúbica, ordenadas de mayor a menor, son:

$$\sigma_1 = 741,0387 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_2 = 261,0138 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_3 = -472,0524 \frac{Kg}{cm^2}$$

Determinación de las direcciones principales. Comenzando por la tensión principal σ_1 , formando el determinante:

$$\begin{bmatrix} (380 - 741,0387) & 150 & 0 \\ 150 & (600 - 741,0387) & -210 \\ 0 & -210 & (-450 - 741,0387) \end{bmatrix} = 0$$

Y los menores complementarios de la primer fila son:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (600 - 741,0387) & -210 \\ -210 & (-450 - 741,0387) \end{vmatrix} = 123882,54$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 150 & -210 \\ 0 & (-450 - 741,0387) \end{vmatrix} = -178655,8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 150 & (600 - 741,0387) \\ 0 & -210 \end{vmatrix} = -31500$$

los cosenos directores son:

$$l_1 = \pm \frac{123882,54}{\sqrt{(123882,54)^2 + (-178655,8)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,564$$

$$m_1 = \pm \frac{-178655,8}{\sqrt{(123882,54)^2 + (-178655,8)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,8132$$

$$n_1 = \pm \frac{-31500}{\sqrt{(123882,54)^2 + (-178655,8)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,1434$$

Cuyas ángulos con respecto a los ejes coordenados son:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$\alpha_1 = \arccos 0,564 = 55^\circ 40' \quad \text{y} \quad \alpha'_1 = \alpha_1 + 180^\circ = 235^\circ 40'$$

$$\beta_1 = \arccos 0,8132 = 35^\circ 35' 24'' \quad \text{y} \quad \beta'_1 = \beta_1 + 180^\circ = 215^\circ 35' 24''$$

$$\gamma_1 = \arccos 0,1434 = 81^\circ 45' 19'' \quad \text{y} \quad \gamma'_1 = \gamma_1 + 180^\circ = 261^\circ 45' 19''$$

Para la tensión principal σ_2 , tenemos:

$$\begin{bmatrix} (380 - 261,0138) & 150 & 0 \\ 150 & (600 - 261,0138) & -210 \\ 0 & -210 & (-450 - 261,0138) \end{bmatrix} = 0$$

Y los menores complementarios de la primer fila son:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (600 - 261,0138) & -210 \\ -210 & (-450 - 261,0138) \end{vmatrix} = -285123,86$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 150 & -210 \\ 0 & (-450 - 261,0138) \end{vmatrix} = -106652,07$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 150 & (600 - 261,0138) \\ 0 & -210 \end{vmatrix} = -31500$$

Y los cosenos directores son:

$$l_2 = \pm \frac{-285123,86}{\sqrt{(-285123,86)^2 + (-106652,07)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,9316$$

$$m_2 = \pm \frac{-106652,07}{\sqrt{(-285123,86)^2 + (-106652,07)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,3485$$

$$n_2 = \pm \frac{-31500}{\sqrt{(-285123,86)^2 + (-106652,07)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,1029$$

Los ángulos formados con respecto a los ejes coordenados son:

$$\alpha_2 = \arccos 0,9316 = 21^\circ 18' 51'' \quad \text{y} \quad \alpha'_2 = \alpha_2 + 180^\circ = 201^\circ 18' 51''$$

$$\beta_2 = \arccos 0,3485 = 69^\circ 36' 15'' \quad \text{y} \quad \beta'_2 = \beta_2 + 180^\circ = 249^\circ 36' 15''$$

$$\gamma_2 = \arccos 0,1029 = 84^\circ 5' 38'' \quad \text{y} \quad \gamma'_2 = \gamma_2 + 180^\circ = 264^\circ 5' 37''$$

Para la tensión principal σ_3 se tiene:

$$\begin{bmatrix} (380 + 472,0524) & 150 & 0 \\ 150 & (600 + 472,0524) & -210 \\ 0 & -210 & (-450 + 472,0524) \end{bmatrix} = 0$$

Los menores complementarios de la primer fila son:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (600 + 472,0524) & -210 \\ -210 & (-450 + 472,0524) \end{vmatrix} = -20458,671$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 150 & -210 \\ 0 & (-450 + 472,0524) \end{vmatrix} = 3307,86$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 150 & (600 + 472,0524) \\ 0 & -210 \end{vmatrix} = -31500$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Los cosenos directores correspondientes son:

$$l_3 = \pm \frac{-20458,671}{\sqrt{(-20458,671)^2 + (3307,86)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,5426$$

$$m_3 = \pm \frac{3307,86}{\sqrt{(-20458,671)^2 + (3307,86)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,08772$$

$$n_3 = \pm \frac{-31500}{\sqrt{(-20458,671)^2 + (3307,86)^2 + (-31500)^2}} = \pm 0,83541$$

Los ángulos formados con respecto a los ejes coordenados son:

$$\alpha_3 = \arccos 0,5426 = 57^\circ 8' 21'' \quad \text{y} \quad \alpha'_3 = \alpha_3 + 180^\circ = 237^\circ 8' 21''$$

$$\beta_3 = \arccos 0,08772 = 84^\circ 58' \quad \text{y} \quad \beta'_3 = \beta_3 + 180^\circ = 264^\circ 58'$$

$$\gamma_3 = \arccos 0,83541 = 33^\circ 20' 29'' \quad \text{y} \quad \gamma'_3 = \gamma_3 + 180^\circ = 213^\circ 20' 29''$$

d) Tensiones cortante y normal en el plano bisectriz en el plano bisectriz del diedro xy.

El plano bisectriz debe tener normal cuyo vector sea $\vec{n} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)$.

Determinación de la tensión normal. Mediante la ecuación 3 determinamos la misma.

$$\begin{aligned} \sigma &= 380 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 600 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 450 \cdot 0 + 2 \cdot 150 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \cdot (-210) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 0 + \\ &+ 2 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 0 = 340 \frac{Kg}{cm^2} \end{aligned}$$

Mediante las ecuaciones 3 determinamos las componentes ρ

$$\begin{cases} \rho_x = 380 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 150 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0 \cdot 0 = -162,634 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_y = 150 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 600 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 210 \cdot 0 = 318,2 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_z = 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 210 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 450 \cdot 0 = -148,5 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

El módulo de esta tensión es:

$$\rho = \sqrt{(-162,634)^2 + (318,2)^2 + (-148,5)^2} = 387 \frac{Kg}{cm^2}$$

En consecuencia, la tensión tangencial en el plano considerado es:

$$\tau = \sqrt{(387)^2 - (340)^2} = 184,85 \frac{Kg}{cm^2}$$

Problema n° 5: El tensor de tensiones de un punto es:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 600 & 0 & 560 \\ 0 & -600 & 450 \\ 560 & 450 & 600 \end{bmatrix}$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Las unidades de las componentes de dicho tensor es $\frac{Kg}{cm^2}$.

Determinar:

- a) Las tensiones y ejes principales;
- b) Las tensiones normal y tangencial en un plano cuyo versor normal es $\vec{n}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
- c) La superficie sobre la que actúan las tensiones paralelas al eje z.

Solución

a) Determinación de las tensiones principales y ejes principales. Para lo cual, calculamos los invariantes del estado de tensiones.

$$\begin{cases} I_1 = 600 - 600 + 600 = 600 \frac{Kg}{cm^2} \\ I_2 = 600 \cdot (-600) + 600 \cdot 600 + (-600) \cdot 600 - 0^2 - 560^2 - 450^2 = -876100 \frac{Kg^2}{cm^4} \\ I_3 = 600 \cdot (-600) \cdot 600 + 2 \cdot 0 \cdot 560 \cdot 450 - 600 \cdot 450^2 + 600 \cdot 560^2 - 600 \cdot 0^2 = -1,493 \cdot 10^8 \frac{Kg^3}{cm^6} \end{cases}$$

Y, la ecuación cúbica de tensiones principales nos queda:

$$\sigma_i^3 - 600 \cdot \sigma_i^2 - 876100 \cdot \sigma_i + 1,493 \cdot 10^8 = 0$$

Cuyas raíces ordenadas en forma decreciente son:

$$\sigma_1 = 1218,5 \frac{Kg}{cm^2} ; \sigma_2 = 157,5 \frac{Kg}{cm^2} ; \sigma_3 = -776,3 \frac{Kg}{cm^2}$$

b) Del tensor de tensiones extraemos los siguientes datos de las tensiones actuantes:

$$\begin{cases} \sigma_x = 600 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_y = -600 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_z = 600 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 560 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{yz} = 450 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

Aplicando la ecuación 3, para el plano cuya normal es $\vec{n}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, tenemos:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$\sigma = 600 \cdot \frac{1}{2} - 600 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 600 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 560 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot 450 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sigma = 97,954 \frac{Kg}{cm^2}$$

Para determinar la tensión tangencial, debemos determinar, como sabemos, debemos calcular primeramente el esfuerzo ρ . El mismo nos queda con sus componentes,

$$\begin{cases} \rho_x = 600 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 560 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -96 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_y = 0 \cdot \frac{1}{2} - 600 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 450 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -18,2 \frac{Kg}{cm^2} \\ \rho_z = 560 \cdot \frac{1}{2} + 450 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 600 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -369,26 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

De donde $\rho = \sqrt{(-96)^2 + (-18,2)^2 + (-369,26)^2} = 382 \frac{Kg}{cm^2}$

Entonces

$$\tau = \sqrt{(382)^2 - (97,954)^2} = 369,227 \frac{Kg}{cm^2}$$

c) La superficie sobre la que actúan las tensiones paralelas a z. De la ecuación 4, considerando únicamente las tensiones paralelas al eje z, las mismas son: σ_z ; τ_{xz} ; τ_{yz} , con lo que nos queda la ecuación 4 como: $\sigma_z \cdot z^2 + 2 \tau_{yz} \cdot y \cdot z + 2 \tau_{zx} \cdot x \cdot z = 1$, que en nuestro caso se transforma en

$$600 \cdot z^2 + 2 \cdot 450 \cdot y \cdot z + 2 \cdot 0 \cdot x \cdot z = 1$$

$$\text{o } 600 \cdot z^2 + 900 \cdot y \cdot z = 1$$

Problema n.º 6: El estado tensional de un cuerpo en un punto Q es tal que sus tensiones principales son:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 650 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_2 = 300 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_3 = 50 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

Determinar en forma analítica y gráfica las tensiones normal y tangencial en un plano que forman los ángulos $\alpha = 45^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$ con las direcciones principales 1 y 3 respectivamente.

Solución

En forma analítica, conociendo las tensiones principales, por medio de la ecuación 10,

$$\sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2$$

podemos determinar la tensión normal σ , para la cual conocemos los ángulos α y γ , pero debemos determinar β . De donde sabemos que:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{siendo } l = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n = \frac{1}{2}$$

o sea

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 \beta + \cos^2 60^\circ = 1$$

obteniéndose $\beta = 60^\circ$ o bien $m = 0,5$

Y, reemplazando en la ecuación 10 nos queda:

$$\sigma = 650 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 300 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 412,5 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Para determinar la tensión tangencial τ , mediante la ecuación 12 obtenemos el valor de la misma, como sigue:

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2$$

en nuestro problema, tenemos,

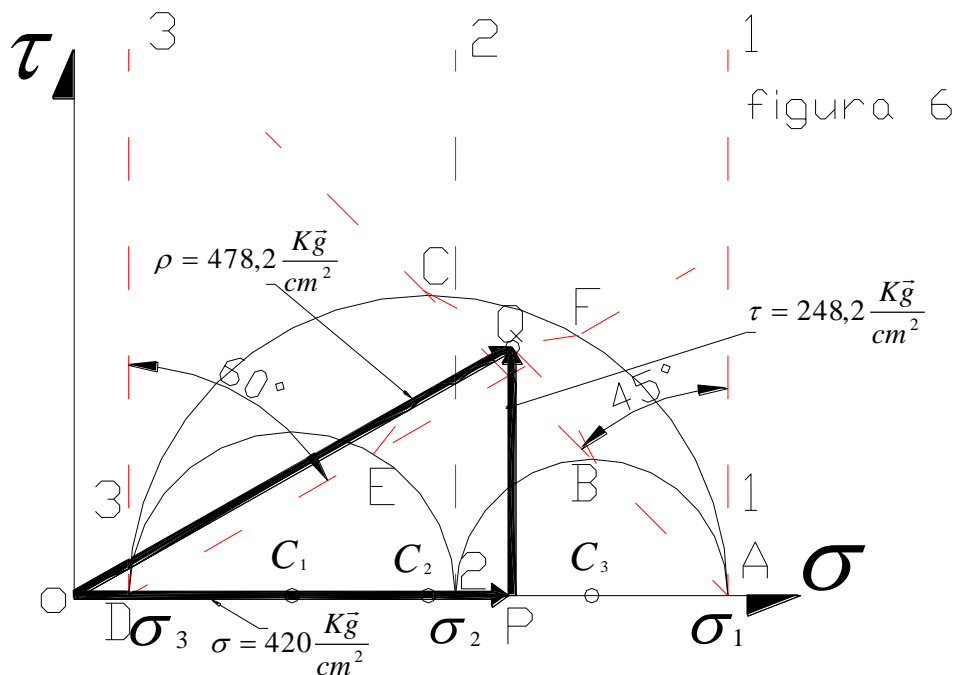
$$\tau^2 = (650 - 300)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (650 - 50)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (300 - 50)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\tau = 253,41 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Para finalizar, determinamos el esfuerzo ρ . Como sabemos,

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad \text{en nuestro problema } \rho = \sqrt{(412,5)^2 + (253,41)^2} = 484,12 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

En forma gráfica, mediante la circunferencia de Mohr, trazamos las tres semicircunferencias de diámetros $\sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_1 - \sigma_2$, y $\sigma_2 - \sigma_3$, junto con sus direcciones principales 1_1, 2_2, y 3_3, como indica la figura 6.



A partir del punto A correspondiente a la dirección principal 1, trazamos la dirección $\alpha = 45^\circ$ que interceptará a las semicircunferencias de diámetros $\sigma_1 - \sigma_2$ y $\sigma_1 - \sigma_3$ en los puntos B y C respectivamente; y, de forma análoga, a partir del punto D correspondiente a la dirección principal

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

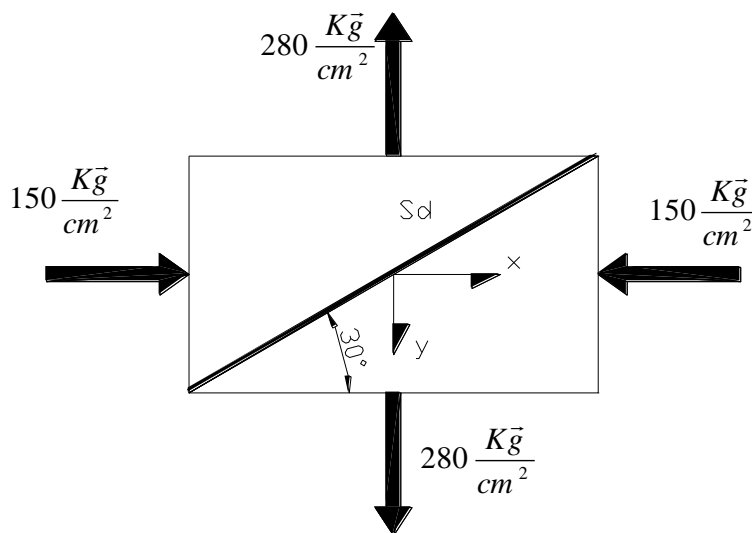
3, trazamos la dirección $\beta = 60^\circ$ que interceptará a las semicircunferencias de diámetros $\sigma_2 - \sigma_3$ y $\sigma_1 - \sigma_3$ en los puntos E y F respectivamente. Seguidamente, y con centros en C_1 y C_3 trazamos los arcos de circunferencias BC y EF respectivamente que se interceptarán en el punto Q. Por este punto trazamos un segmento perpendicular por el punto P al eje σ , siendo este segmento \overline{PQ} , el vector representativo de la tensión normal σ para el plano solicitado. Midiendo la longitud de este segmento, y multiplicando por la escala del dibujo, obtendremos el valor de esta tensión normal. Análogamente, unimos el punto P con el punto O, y el segmento \overline{OP} será el vector representativo de la tensión tangencial τ del plano considerado. Para concluir, el segmento \overline{OQ} será el vector representativo del esfuerzo ρ para el plano en cuestión.

Obviamente, que al ser este un método gráfico, el mismo está sujeto a los errores e imprecisiones de construcción del mismo al no poder medir cifras muchas veces pequeñas, por lo tanto, los valores de las tensiones se verán afectados por los citados errores, y existirán ciertas diferencias con respecto a los calculados analíticamente.

Problema n° 7: En la figura 7 se representa un estado tensional plano. Determinar:

- a) Las tensiones normal y tangencial en un plano de superficie Sd que forma un ángulo de 30° con respecto al plano horizontal.
- b) Las tensiones normal y tangencial sobre el mismo plano mediante el trazado de la circunferencia de Mohr.

figura 7

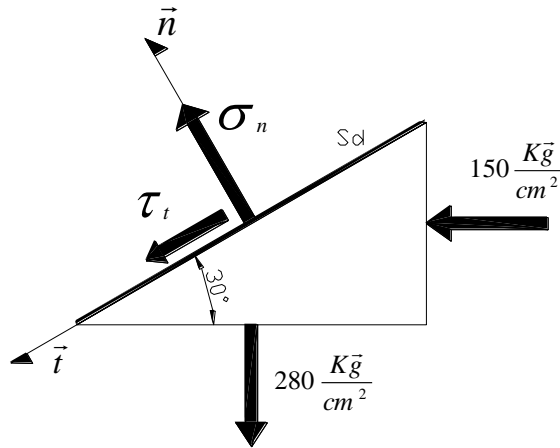


Solución

Para resolver el punto a, seccionamos al cubo en la sección Sd, y ponemos en evidencia los esfuerzos, eligiendo los ejes de referencia normal n y tangencial t como indica la figura 7 a.

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

figura 7a



Siendo las tensiones:

$$\sigma_x = -150 \frac{Kg}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_y = 280 \frac{Kg}{cm^2}$$

Entonces, de acuerdo a la ecuación 20 y la ecuación 21, tenemos:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos(2\alpha)$$

$$\tau_t = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\alpha)$$

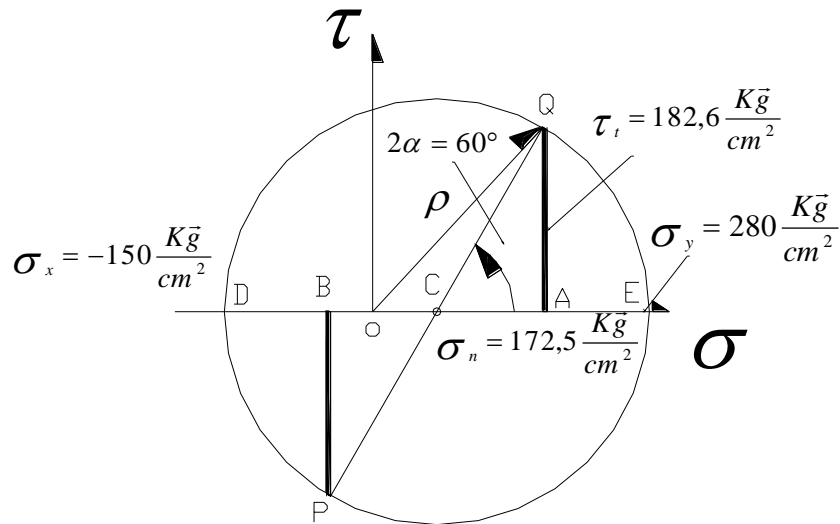
Y, reemplazando datos, nos quedará:

$$\sigma_n = \frac{-150 + 280}{2} + \frac{280 + 150}{2} \cos(2 \cdot 30^\circ) = 172,5 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau_t = \frac{280 + 150}{2} \sin(2 \cdot 30^\circ) = 186,2 \frac{Kg}{cm^2}$$

b) En forma gráfica con la construcción del círculo de Mohr. La misma se observa en la figura 7b.

figura 7b



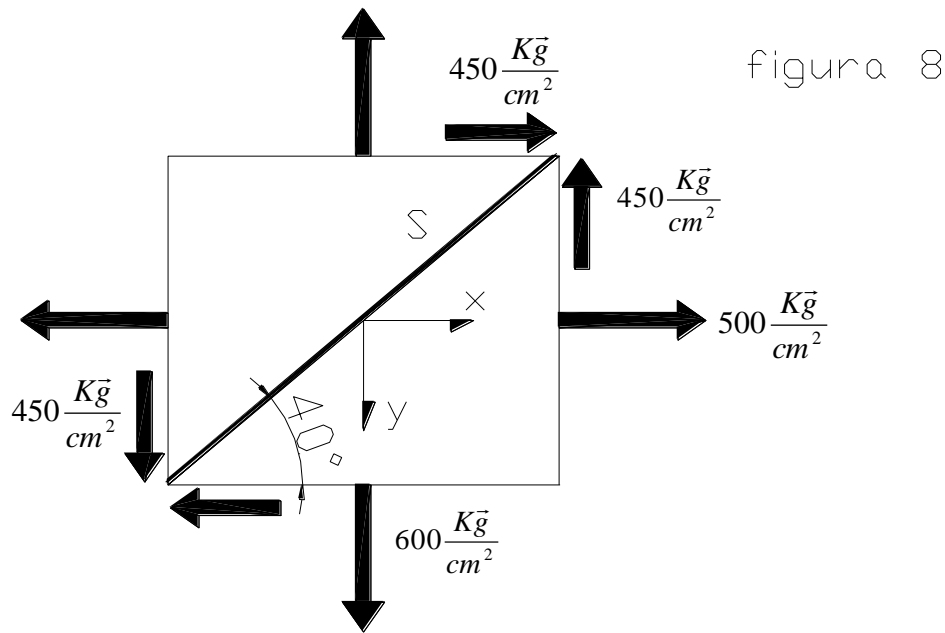
Primeramente, ubicamos el centro C sobre el eje σ a una distancia igual a la semisuma

$\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$. Luego de esta, trazamos una circunferencia de radio $r = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$ quedándonos

ubicadas las tensiones σ_y y σ_x en los puntos E y D respectivamente. Con centro en C trazamos un diámetro \overline{PQ} formando un ángulo $2\alpha = 60^\circ$. El segmento \overline{OQ} es representativo del esfuerzo $\vec{\rho}$, en tanto que el segmento \overline{OA} representa la tensión normal σ_n , y el segmento \overline{AQ} representará la tensión tangencial τ_t .

Problema n° 8: El estado tensional de un cuerpo es el mostrado en la figura 8. Para del mismo, determinar:

- a) Las tensiones normal y tangencial correspondientes al plano S que forma un ángulo de $\alpha = 40^\circ$ con la base;
- b) Las tensiones principales;
- c) La tensión tangencial máxima, y su dirección correspondiente;
- d) El diagrama de Mohr correspondiente, indicando las tensiones correspondientes al plano S , las tensiones principales y la máxima tensión tangencial.



Solución

a) Del gráfico de la figura 8 sale:

$$\begin{cases} \sigma_x = 500 \frac{Kg}{cm^2} \\ \sigma_y = 600 \frac{Kg}{cm^2} \\ \tau_{xy} = -450 \frac{Kg}{cm^2} \end{cases}$$

En la figura 8 a mostramos un gráfico en donde seccionamos según S, y elegimos un par de ejes de referencia n; t en donde actúan las tensiones σ y τ que restablecen el equilibrio del sistema.

Con las ecuaciones 22 y 23 determinamos los valores de σ y τ en la sección S considerada.

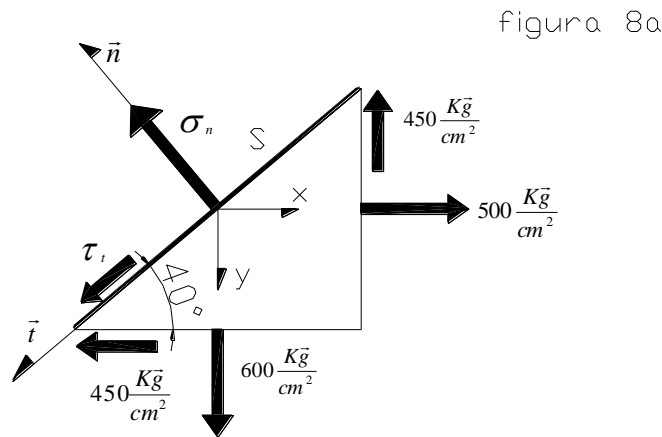
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

$$\tau_t = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{sen}(2\alpha) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\alpha)$$

En nuestro problema resulta:

$$\sigma_n = \frac{500 + 600}{2} + \frac{600 - 500}{2} \cos(2.40^\circ) - 450 \cdot \text{sen}(2.40^\circ) = 115,52 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau_t = \frac{600 - 500}{2} \text{sen}(2.40^\circ) + 450 \cdot \cos(2.40^\circ) = 127,38 \frac{Kg}{cm^2}$$



b) *tensiones principales.* De acuerdo con las ecuaciones 26 y 27, las tensiones principales σ_1 y σ_2 tienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

En nuestro problema resulta:

$$\sigma_1 = \frac{500 + 600}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(500 - 600)^2 + 4 \cdot (-450)^2} = 1002,77 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{500 + 600}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(500 - 600)^2 + 4 \cdot (-450)^2} = 97,23 \frac{Kg}{cm^2}$$

c) *tensión tangencial máxima.* La tensión tangencial máxima ocurre cuando el valor de la misma es igual a la semidiferencia de las tensiones principales, es decir:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1002,77 - 97,23}{2} = 457,77 \frac{Kg}{cm^2}$$

Para determinar el ángulo de $\tau_{m\acute{a}x}$ bastará derivar respecto de α la ecuación 23, e igualar misma a 0, resultando

$$\frac{d\tau_t}{d\alpha} = 0 = (\sigma_y - \sigma_x) \cos(2\alpha) - 2\tau_{xy} \cdot \sin(2\alpha) \text{ resultando } \text{tg}(2\alpha) = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \cdot \tau_{xy}}$$

y el ángulo α correspondiente es :

$$\text{tg}(2\alpha) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = -\frac{500 - 600}{2 \cdot (-450)} \rightarrow \alpha = 3^\circ 10' 12''$$

Implicando ello que este plano se encuentra con una inclinación $3^\circ 10' 12''$ mayor que el plano donde actúan las tensiones consideradas. Este plano es:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

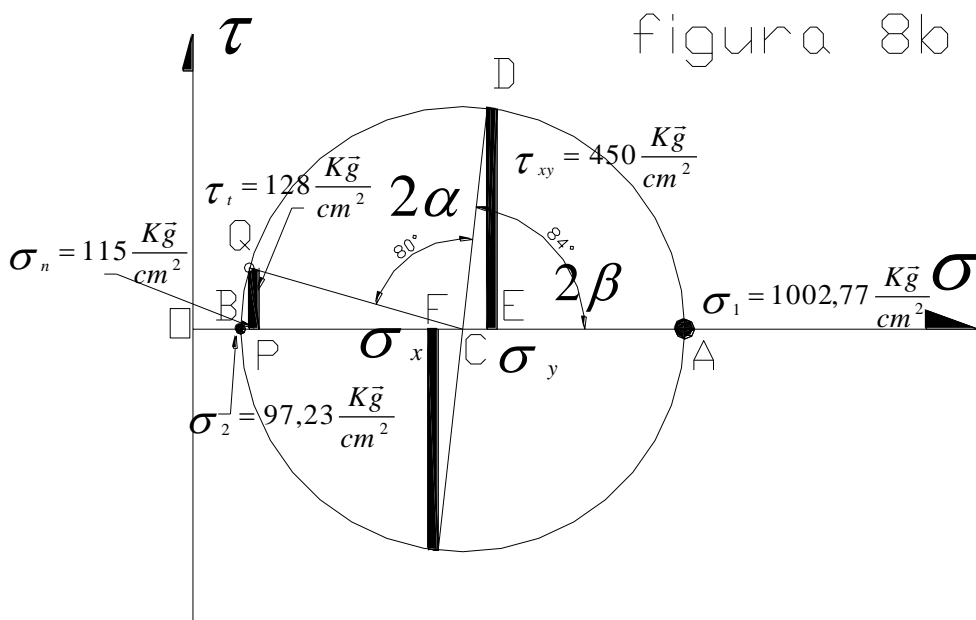
$$\operatorname{tg}(2\beta) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-450)}{500 - 600} \rightarrow \beta = 41^\circ 49' 47''$$

o sea que el ángulo correspondiente a la máxima tensión tangencial es :

$$\alpha' = \alpha + \beta = 3^\circ 10' 12'' + 41^\circ 49' 47'' = 45^\circ$$

Como era de esperarse, pues a un ángulo bisectriz del ángulo recto ocurren las máximas tensiones tangenciales.

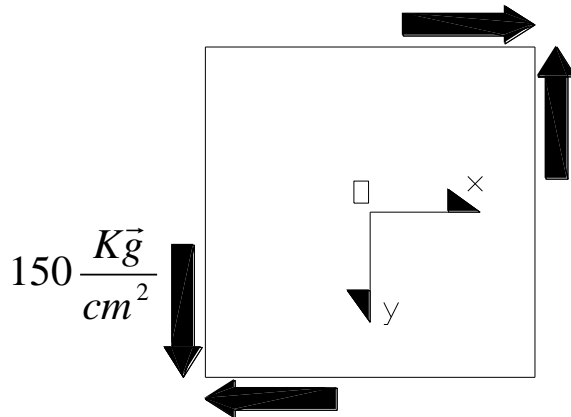
d) Diagrama de Mohr. La figura 8b nos muestra la resolución gráfica del problema.



En la circunferencia de Mohr, ubicamos en escala, las tensiones σ_y y σ_x con los segmentos representativos \overline{OE} y \overline{OF} respectivamente en el eje de abscisas σ . Seguidamente, ubicamos el centro de la circunferencia de Mohr con el segmento \overline{OC} en la semisuma de estas, es decir $\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$. Continuando, ubicamos el segmento \overline{ED} , representativo de τ_{xy} normal a la tensión σ_y , y trazamos la circunferencia de Mohr con centro en C y radio \overline{CD} . La intercepción de la circunferencia con el eje de σ determina las tensiones principales σ_1 y σ_2 en los puntos A y B con los respectivos segmentos representativos \overline{OA} y \overline{OB} . Para determinar el estado tensional del plano considerado, trazamos un ángulo $2\alpha = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ adyacente al ángulo 2β representativo del doble ángulo correspondiente al estado tensional inicial. El lado no adyacente de este ángulo, determina en su intercepción con la circunferencia el punto Q de coordenadas $(\sigma_n; \tau_t)$ será representativo del estado tensional del plano solicitado. El segmento \overline{OP} será representativo de la tensión normal σ_n en dicho plano, a la vez que el segmento \overline{PQ} será el representativo de la tensión tangencial del plano solicitado.

Problema n° 9: Determinar las tensiones y planos principales del esquema representado en la figura 9.

figura 9



Solución

Determinamos las tensiones principales, teniendo en cuenta que se trata de un estado tensional de corte puro con $\tau_{xy} = -150 \frac{Kg}{cm^2}$. Entonces resultará de acuerdo a las ecuaciones 26 y 27:

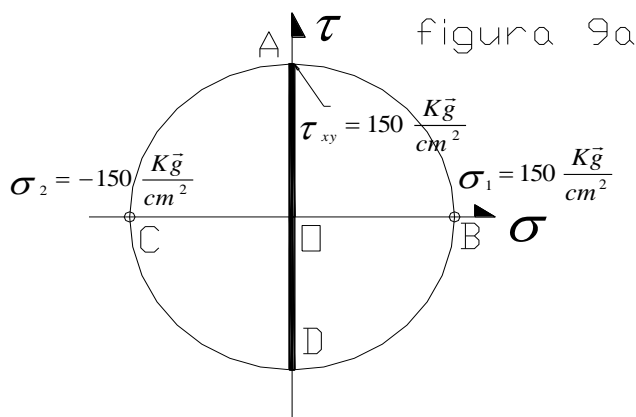
$$\sigma_1 = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(0-0) + 4 \cdot (-150)^2} = 150 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{0+0}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(0-0) + 4 \cdot (-150)^2} = -150 \frac{Kg}{cm^2}$$

Y los ángulos correspondientes a estas tensiones principales son $\alpha_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4}$ debido a que el cociente de la ecuación:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \text{ tiende a } \infty, \text{ con lo cual } 2\alpha = \pm \frac{\pi}{2}.$$

La representación gráfica en la circunferencia de Mohr se muestra en la figura 9 a.



Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Analizamos, a continuación, los esfuerzos que resultan de las sollicitaciones estudiadas. Comenzamos por el esfuerzo normal N .

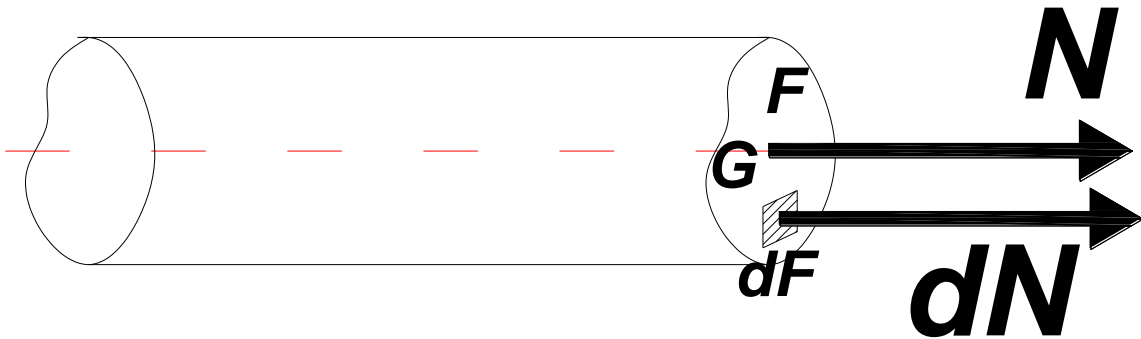
Tensión normal σ debido a esfuerzos axiales N

Consideramos la barra de la figura n^o 22 sometida a una sollicitación normal N en el eje de la misma. La sección transversal de la misma la denominaremos F . Si consideramos un elemento de sección dF de la misma, en el cual actúa un diferencial de fuerza normal dN , tal que denominamos tensión normal σ ,

$$(39) \quad \sigma = \frac{dN}{dF}$$

49

figura n^o 22



De (39) se deduce que, siendo N constante podemos escribir

$$(40) \quad \int_F dN = \sigma \int_F dF \quad \rightarrow \quad N = \sigma \cdot F$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

La expresión (40) nos indica que la sumatoria infinitesimal de los productos $\sigma \cdot dF$ en cada elemento de área dF equivale a la fuerza externa normal N en la sección. Entonces, la relación $\frac{dN}{dF}$ resulta ser constante, por consiguiente,

$$(41) \quad \sigma = \frac{N}{F}$$

De aquí, denominamos tensión, a una fuerza por unidad de área en el punto donde se está considerando.

En la siguiente tabla, se muestran los valores de tensiones correspondientes a diferentes materiales

Valores aproximados de las tensiones de tracción, compresión, torsión y dureza

Material	Tracción			Compresión		Torsión		Dureza N° Brinell
	σ_f^* Kgf / mm ²	σ_{ET} Kgf / mm ²	δ % lo= 58 mm	σ_p Kgf / mm ²	σ_{EC} Kgf / mm ²	τ_f Kgf / mm ²	τ_{ET} Kgf / mm ²	
Hierro dulce o forjado	22	36	30	21	----	12,5	28	100
S.A.E. 1010(0,1% C) normalizado	23	40	37	28	----	14,8	----	105
S.A.E. 1020(0,2% C) laminado en caliente	28	42	35	30	----	17	----	121
S.A.E. 1030(0,3% C) normalizado	30	50	30	----	----	----	----	135
Idem laminado en caliente	24,5	45,5	30	24	----	----	----	----
S.A.E. 1040(0,4% C) laminado	30	49	25	30	----	17,6	----	135
Idem tratado térmicamente	42	62	25	42	----	----	----	190
S.A.E. 1050(0,5% C) normalizado	39,5	69	24	----	----	----	----	170
S.A.E. 1060(0,6% C) Laminado en caliente	42	77	15	42	----	25	60	----
Tratado térmicamente	55	84	15	54	----	33	----	235
S.A.E. 1080(0,8% C) Templado en aceite	89	127	2	88	----	53	----	260
S.A.E. 1095(0,93% C) normalizado	67	105	20	----	----	----	----	----
Tratado termicam. Al carbono(1% C) templado en aceite	$\sigma_p=68$	132	10	----	----	----	----	380
S.A.E. 2320(3,5%) laminado en caliente	98	155	1	97	----	59	----	430
endurecido	39	77	25	38	----	21	45	----
S.A.E. 3245(0,9% Cr – 1,5% Ni) tratado	----	91	18	----	----	----	----	360
S.A.E. 6150(0,99% Cr – 0,19% V).	77	91	25	76	----	45	67	----
Al Ni – Cr – Mo(3,95% Ni; 1,25% Cr; 1,25% Mo) endurecido	$\sigma_p=114$	140	13	----	----	----	----	----
Fundición gris								

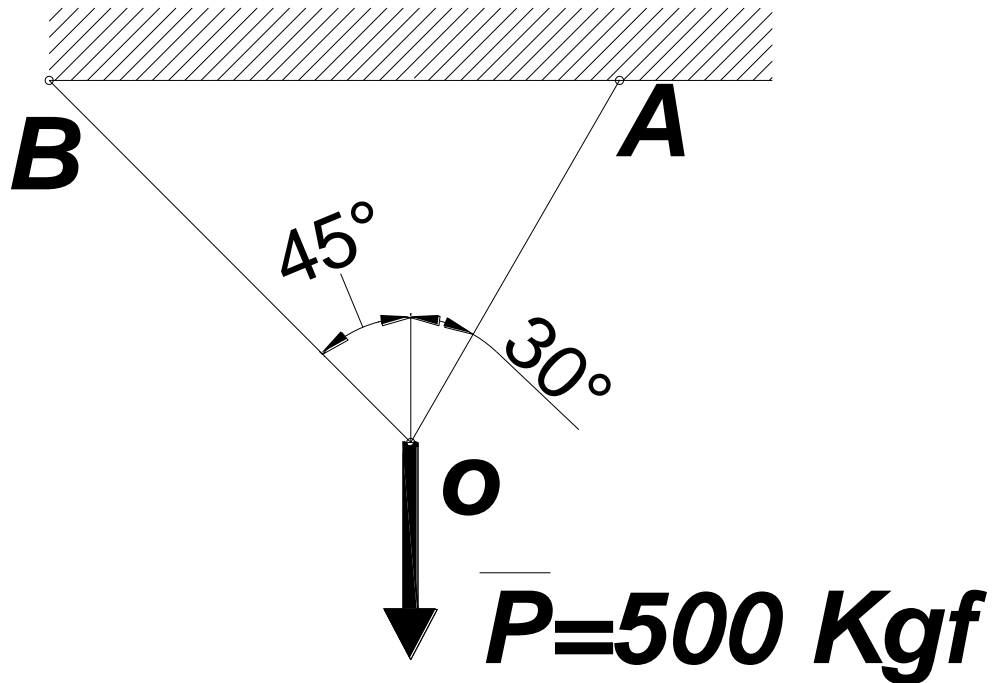
Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

Aluminio puro(Al 99%)	----	157	12	----	----	----	----	444
Aleación de Al(97%Al; 1,25%Mn; 0,7% Fe; 0,6%Si; 0,2%Cu)	----	17	1	----	75	----	----	130
Duraluminio (92%Al; 4% Cu; 0,5%Mg; 0,5%Mn) recocido	11,4	13,3	7,5	----	----	----	8	36
Idem tratado termic.	12,4	15	8	----	----	----	9,6	40
Cobre(99,5%Cu) recocido	7	18,5	20	----	----	----	12,5	45
Alambre de Cu estirado en frío(99,5%Cu)	28	43,5	20	----	----	----	25	100
Latón en barras (59%Cu; 38%Zn; 2,85%Pb; 0;15%Fe) recocido	2,75	21	56	----	----	----	----	40
Idem semiduro	25	35	3	----	----	----	----	----
Bronce laminado (95%Cu; 5%Sn)	12	32	30	----	----	----	----	----
Bronce fosforoso (88%Cu; 4%Sn; 4%Zn; 3,9%Pb; 0,03%P):	18	36	25	----	----	----	----	----
• barras laminadas	28	46	30	24	----	17	----	80
• estirado en frío	32	39	25	----	----	----	----	120
Alambre para resortes	42	60	0,8	----	----	----	----	----
	53	70	0,5	----	----	----	----	----

• En los materiales que no presentan fluencia el valor corresponde al límite de extensión ($\sigma_{0,2}$) Cuando N se aleja del baricentro G de la sección, la sección está sometida a tracción, y el esfuerzo se considera positivo (+), mientras que si N se acerca al baricentro G, la sección está sometida a compresión, y el esfuerzo se considera negativo (-).
A continuación, aplicaremos un ejemplo correspondiente a la figura n^o 23. Para la misma, se pide, determinar el diámetro de la sección transversal correspondiente a las barras OA y OB, sabiendo que las mismas se deberán construir con hierro dulce forjado, considerando un coeficiente de seguridad $\gamma=1,5$

figura n ° 23

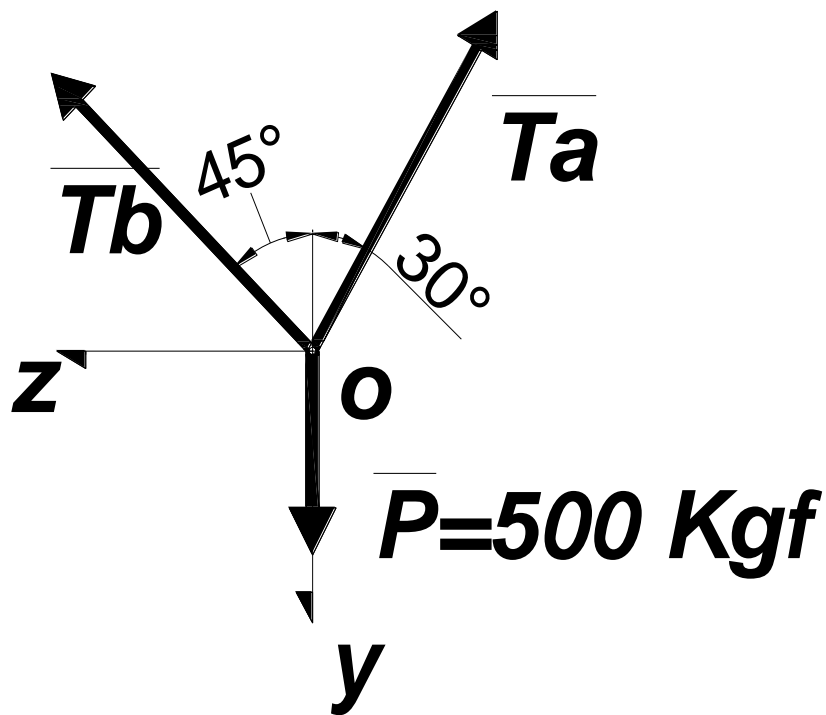
52



Solución

Realizando un diagrama de cuerpo libre en el nodo O, como lo muestra la figura n ° 23 a.

figura n ° 23(a)



Reemplazando las barras OA y OB Por las fuerzas de sentidos arbitrarios \vec{T}_A y \vec{T}_B , y, de la sumatoria de proyecciones de fuerzas en equilibrio en el nodo O , resulta,

$$(A1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow T_B \cdot \text{sen } 45^\circ - T_A \cdot \text{sen } 30^\circ = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 500 \text{Kgf} - T_B \cdot \text{cos } 45^\circ - T_A \cdot \text{cos } 30^\circ = 0 \end{cases}$$

De donde se obtiene, de la primer ecuación (A1),

$$(B1) \vec{T}_B = \vec{T}_A \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 45^\circ}$$

Que reemplazado en la segunda ecuación (A1), permite obtener,

$$(C1) \begin{cases} \vec{T}_A = \frac{500 \text{Kgf}}{\frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{tg } 45^\circ} + \text{cos } 30^\circ} = 366 \text{Kgf} \\ \vec{T}_B = \frac{500 \text{Kgf}}{\frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{tg } 45^\circ} + \text{cos } 30^\circ} \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = 258,82 \text{Kgf} \end{cases}$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

Ambas en los sentidos asignados, y como estos sentidos corresponden a los esfuerzos internos de la barra, la misma está sometida a tracción. Considerando esto, de la tabla anterior de materiales, para el acero dulce, la tensión de fluencia a tracción $\sigma_f = 22 \frac{Kgf}{mm^2}$ y con un coeficiente de seguridad,

$\gamma=1,5$, entonces la tensión admisible del material es,

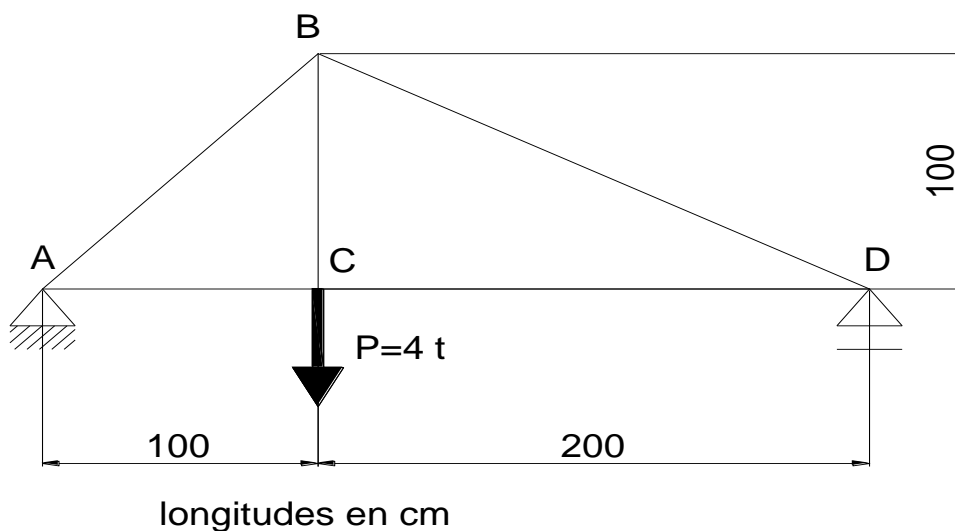
$$(D1) \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{\gamma} = \frac{22}{1,5} \frac{Kgf}{mm^2} = 14,67 \frac{Kgf}{mm^2}$$

De la expresión (39) determinamos las secciones de las barras

$$(E1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{barra OA, } F_A = \frac{\vec{T}_A}{\sigma_{adm}} \rightarrow F_A = \frac{366Kgf}{14,67 \frac{Kgf}{mm^2}} = 25 mm^2 \\ \text{barra OB, } F_B = \frac{\vec{T}_B}{\sigma_{adm}} \rightarrow F_B = \frac{259Kgf}{14,67 \frac{Kgf}{mm^2}} = 17,65 mm^2 \end{array} \right.$$

Problema n° 2: Determinar las secciones transversales de las barras y seleccionar número de perfil normal del reticulado mostrado en la figura n° 24, considerando que se emplea un acero SAE 1010, con un coeficiente de seguridad para tracción y compresión $\gamma=2,3$, y un perfil normal L de alas iguales.

figura n° 24



Solución

Debido que los esfuerzos en las barras fueron determinados cuando estudiamos reticulados, cuyo resumen exponemos a continuación,

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

BARRA	ESFUERZO TRACCIÓN (t)	ESFUERZO COMPRESIÓN (t)
AB		-3,77
AC	+ 2,667	
BC	+ 4	
CD	2,667	
BD		-2,98

Solo nos resta determinar las secciones transversales de las barras, y seleccionar los perfiles normales correspondientes.

Determinamos las tensiones admisibles del material. De la tabla de materiales extraemos para SAE 1010,

$$(A2) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f-tracc} = 23 \frac{Kgf}{mm^2} \rightarrow \sigma_{adm-tracc} = \frac{23}{2,3} \frac{Kgf}{mm^2} = 10 \frac{Kgf}{mm^2} \\ \sigma_{p-comp} = 28 \frac{Kgf}{mm^2} \rightarrow \sigma_{adm-comp} = \frac{28}{2,3} \frac{Kgf}{mm^2} = 12,18 \frac{Kgf}{mm^2} \end{array} \right.$$

A continuación, determinamos las secciones transversales de las barras,

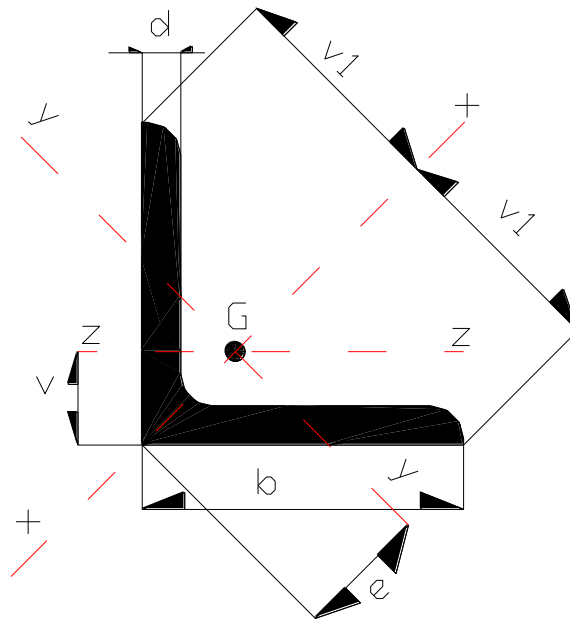
$$(B2) \left\{ \begin{array}{l} \text{barra AB, } F_{AB} = \frac{3770 Kgf}{1218 \frac{Kgf}{cm^2}} = 3,09 \text{ cm}^2 \\ \text{barra AC, } F_{AC} = \frac{2667}{1000} \text{ cm}^2 = 2,667 \text{ cm}^2 \\ \text{barra BC, } F_{BC} = \frac{4000}{1000} \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 \\ \text{barra CD, } F_{AC} = \frac{2667}{1000} \text{ cm}^2 = 2,667 \text{ cm}^2 \\ \text{barra BD, } F_{AC} = \frac{2980}{1218} \text{ cm}^2 = 2,45 \text{ cm}^2 \end{array} \right.$$

Concluimos con la selección de PN L. Para ello, consideramos la siguiente tabla de perfiles normales:
Tabla de características de perfiles normalizados

Perfil normal L de alas iguales

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

56



PN	b mm	d mm	F cm ²	Peso Kg/m	VI cm	e cm	v cm	Jx cm ⁴	Wx cm ³	Ix cm	Jy cm ⁴	Wy cm ³	Iy cm	Jz cm ⁴	Wz cm ³
3	30	4	2,27	1,78	2,12	1,24	0,89	2,85	1,35	1,12	0,76	0,61	0,58	1,81	0,86
		6	3,27	2,57	2,12	1,36	0,96	3,91	1,84	1,09	1,06	0,78	0,57	2,49	1,22
3 ½	35	4	2,67	2,10	2,47	1,41	1	4,68	1,90	1,33	1,24	0,88	0,68	2,96	1,18
		6	3,87	3,04	2,47	1,53	1,08	6,50	2,63	1,30	1,77	1,15	0,68	4,14	1,71
4	40	4	3,08	2,42	2,83	1,58	1,12	7,09	2,50	1,52	1,86	1,17	0,78	4,48	1,56
		6	4,48	3,52		1,70	1,20	9,98	3,52	1,49	2,67	1,57	0,77	6,33	2,26
		8	5,80	4,55		1,81	1,28	12,4	4,38	1,46	3,38	1,81	0,76	7,89	2,90
4 ½	45	5	4,30	3,38	3,18	1,81	1,28	12,4	3,91	1,70	3,25	1,80	0,87	7,83	2,43
		7	5,86	4,60		1,92	1,36	16,4	5,16	1,67	4,39	2,28	0,87	10,4	3,31
		9	7,34	5,67		2,04	1,44	19,8	6,24	1,64	5,40	2,65	0,86	12,6	4,12
5	50	5	4,80	3,77	3,54	1,98	1,40	17,4	4,91	1,90	4,59	2,32	0,98	11	3,05
		7	6,56	5,15		2,11	1,49	23,1	6,53	1,88	6,02	2,85	0,96	14,6	4,15
		9	8,24	6,47		2,21	1,56	28,1	7,94	1,85	7,67	3,47	0,97	17,9	5,20
5 ½	55	6	6,31	4,95	3,89	2,21	1,56	27,4	7,04	2,08	7,24	3,27	1,07	17,3	4,40
		8	8,23	6,46		2,32	1,64	34,8	8,96	2,06	9,35	4,03	1,07	22,1	5,72
		10	10,07	7,90		2,43	1,72	41,4	10,64	2,02	11,27	4,64	1,06	26,3	6,97
6	60	6	6,91	5,42	4,24	2,39	1,69	36,1	8,51	2,29	9,43	3,95	1,17	22,8	5,29
		8	9,03	7,09		2,50	1,77	46,1	10,9	2,26	12,1	4,85	1,16	29,1	6,88
		10	11,07	8,69		2,62	1,85	55,1	13	2,23	14,6	5,58	1,15	34,9	8,41
6 ½	65	7	8,70	6,83	4,60	2,62	1,85	53	11,5	2,47	13,8	5,25	1,26	33,4	7,18
		9	10,98	8,62		2,73	1,93	65,4	14,2	2,44	17,2	6,31	1,25	41,3	9,04
		11	13,17	10,34		2,83	2	76,8	16,7	2,42	20,7	7,30	1,25	48,8	10,8
7	70	7	9,4	7,38	4,95	2,79	1,97	67,1	13,6	2,67	17,6	6,29	1,37	42,4	8,43
		9	11,9	9,34		2,90	2,05	83,1	16,8	2,64	22	7,57	1,36	52,6	10,6
		11	14,3	11,23		3,01	2,13	97,6	19,7	2,61	26	8,65	1,35	61,8	12,7

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

Continuación de tabla

PN	b mm	d mm	F cm ²	Peso Kg/m	VI cm	e cm	v cm	Jx cm ⁴	Wx cm ³	Ix cm	Jy cm ⁴	Wy cm ³	Iy cm	Jz cm ⁴	Wz cm ³
7 ½	75	8	11,5	9,03	5,30	3,01	2,13	93,3	17,6	2,85	24,4	8,11	1,46	58,9	11
		10	14,1	11,07		3,12	2,21	113	21,3	2,83	29,8	9,54	1,45	71,4	13,5
		12	16,7	13,11		3,24	2,29	130	24,6	2,79	34,7	10,71	1,44	82,4	15,8
8	80	8	12,3	9,66	5,66	3,20	2,26	115	20,3	3,06	29,6	9,25	1,55	72,3	12,6
		10	15,1	11,85		3,31	2,34	139	24,5	3,03	35,9	10,8	1,54	87,5	15,5
		12	17,9	14,05		3,41	2,41	161	28,4	3	43	12,6	1,53	102	18,2
9	90	9	15,5	12,17	6,36	3,59	2,54	184	28,9	3,45	47,8	13,3	1,76	116	18
		11	18,7	14,68		3,70	2,62	218	34,3	3,41	57,1	15,4	1,75	138	21,6
		13	21,8	17,11		3,81	2,70	250	39,3	3,39	65,9	17,3	1,74	158	25,1
10	100	10	19,2	15,07	7,07	3,99	2,82	280	39,7	3,82	73,3	18,4	1,95	177	24,7
		12	22,7	17,82		4,10	2,90	328	46,3	3,80	86,2	21	1,95	207	29,2
		14	26,2	20,57		4,21	2,98	372	52,6	3,77	98,3	23,4	1,94	235	33,5
11	110	10	21,2	16,64	7,78	4,34	3,07	379	48,7	4,23	98,6	22,7	2,16	239	30,1
		12	25,1	19,7		4,45	3,15	444	57,1	4,21	116	26,1	2,15	280	35,7
		14	29	22,77		4,54	3,21	505	64,8	4,18	133	29,2	2,14	319	41
12	120	11	25,4	19,94	8,49	4,75	3,36	541	63,8	4,62	140	29,4	2,35	341	39,5
		13	29,7	23,31		4,86	3,44	625	73,7	4,59	162	33,4	2,34	394	46
		15	33,9	26,61		4,96	3,51	705	83,2	4,56	186	37,5	2,34	446	52,5
13	130	12	30	23,55	9,19	5,15	3,64	750	81,6	5	194	37,8	2,54	472	50,4
		14	34,7	27,24		5,26	3,72	857	93,3	4,97	223	42,4	2,54	540	58,2
		16	39,3	30,85		5,37	3,80	959	104	4,94	251	46,7	2,52	605	65,8
14	140	13	35	27,48	9,90	5,54	3,92	1014	102	5,38	262	47,3	2,74	638	63,3
		15	40	31,40		5,66	4	1148	116	5,36	298	52,6	2,73	723	72,3
		17	45	35,33		5,77	4,08	1276	129	5,33	334	58	2,72	805	81,2
15	150	14	40,3	31,64	10,6	5,95	4,20	1343	127	5,77	347	58,3	2,94	845	78,2
		16	45,7	35,87		6,07	4,30	1507	142	5,74	391	64,4	2,92	949	88,7
		18	51	40,04		6,17	4,40	1665	157	5,70	438	71,1	2,92	1052	99,3
16	160	15	46,1	36,19	11	6,35	4,50	1745	154	6,15	453	71,1	3,14	1099	95,6
		17	51,8	40,66		6,46	4,60	1945	172	6,13	506	78,4	3,13	1226	108
		19	57,5	45,14		6,58	4,60	2137	189	6,10	558	84,8	3,12	1348	118

De la tabla anterior de PN L, obtenemos,

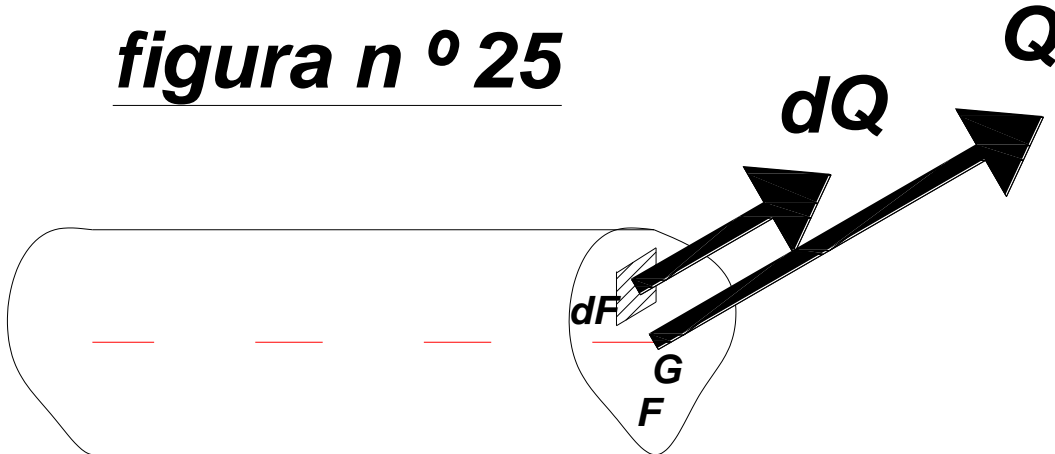
$$(C2) \left\{ \begin{array}{l} \text{barra AB, } F_{AB} = 3,09 \text{ cm}^2, \rightarrow \text{ de tabla, PN L 30 } d = 6 \text{ mm, } F = 3,27 \text{ cm}^2 \\ \text{barra AC, } F_{AB} = 2,667 \text{ cm}^2, \rightarrow \text{ de tabla, PN L 35 } d = 4 \text{ mm, } F = 2,67 \text{ cm}^2 \\ \text{barra BC, } F_{BC} = 4 \text{ cm}^2, \rightarrow \text{ de tabla, PN L 45 } d = 5 \text{ mm, } F = 4,30 \text{ cm}^2 \\ \text{barra CD, } F_{AB} = 2,667 \text{ cm}^2, \rightarrow \text{ de tabla, PN L 35 } d = 4 \text{ mm, } F = 2,67 \text{ cm}^2 \\ \text{barra BD, } F_{AB} = 2,45 \text{ cm}^2, \rightarrow \text{ de tabla, PN L 35 } d = 4 \text{ mm, } F = 2,67 \text{ cm}^2 \end{array} \right.$$

Tensión tangencial τ debida a esfuerzos cortantes Q

Supongamos la pieza de eje rectilíneo de la figura n^o 25 cuya resultante de reducción se limita a una carga Q actuante en el baricentro G de la sección transversal que se analiza cuya área es F . En la misma se considera un diferencial de área dF , cuya diferencial de carga es dQ , tal que,

$$(42) \tau = \frac{dQ}{dF}$$

figura n ° 25



De (42) se deduce que, siendo Q constante podemos escribir

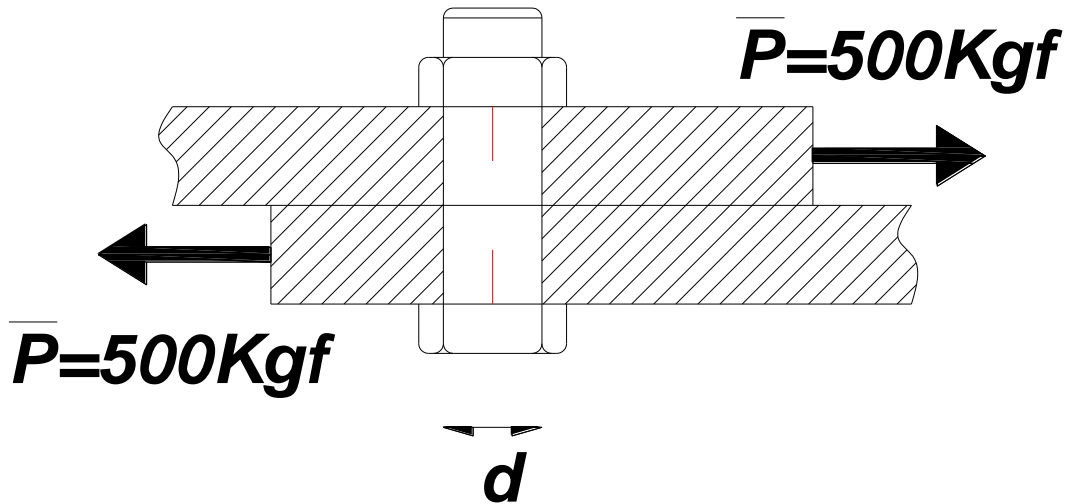
$$(43) \int_F dQ = \tau \int_F dF \rightarrow Q = \tau \cdot F$$

La expresión (40) nos indica que la sumatoria infinitesimal de los productos $\tau \cdot dF$ en cada elemento de área dF equivale a la fuerza externa tangencial Q en la sección. Entonces, la relación $\frac{dQ}{dF}$ resulta ser constante, por consiguiente,

$$(44) \tau = \frac{Q}{F}$$

Ejemplo de aplicación. Consideremos la unión de 2 placas mediante un tornillo de la figura n ° 26. Se deberá determinar el diámetro del vástago del mismo, sabiendo que el material del tornillo es acero SAE 1010, y la tensión $\tau_f \cong 0,8 \sigma_f$ considerando un coeficiente de seguridad $\gamma = 1,8$.

figura n ° 26



59

Solución

La condición de resistencia del perno es,

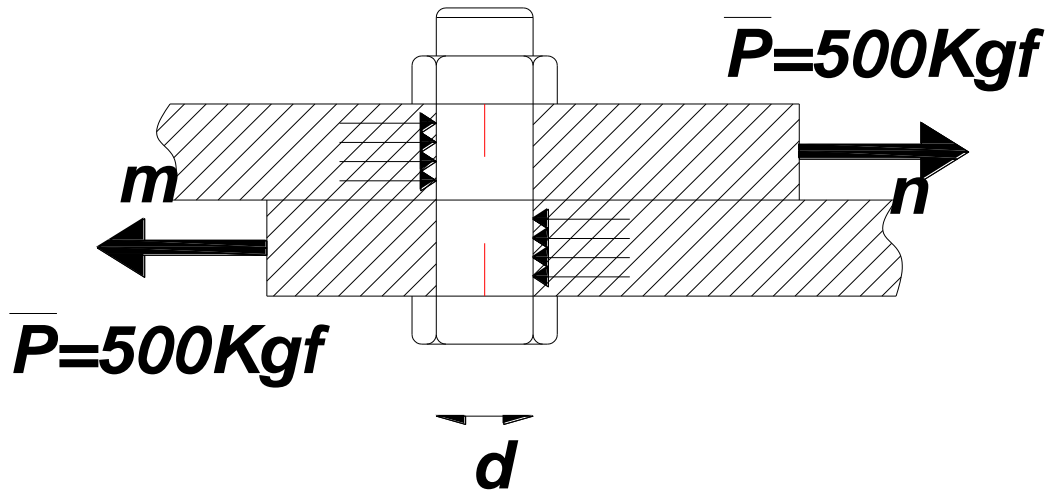
$$(A3) \quad \tau_{adm} \geq \frac{Q}{F} = \tau_{máx}$$

Las características resistenciales del material de perno son,

$$(B3) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_f = 23 \frac{Kgf}{mm^2} ; \quad \sigma_{p-comp} = 30 \frac{Kgf}{mm^2} \\ \tau_f = 0,8 \cdot 23 \frac{Kgf}{mm^2} = 18,4 \frac{Kgf}{mm^2} \rightarrow \tau_{adm} = \frac{18,4}{1,8} \frac{Kgf}{mm^2} = 10,22 \frac{Kgf}{mm^2} \end{array} \right.$$

Las tensiones se distribuyen en las paredes del perno como lo indica la figura n ° 26(a)

figura n ° 26(a)

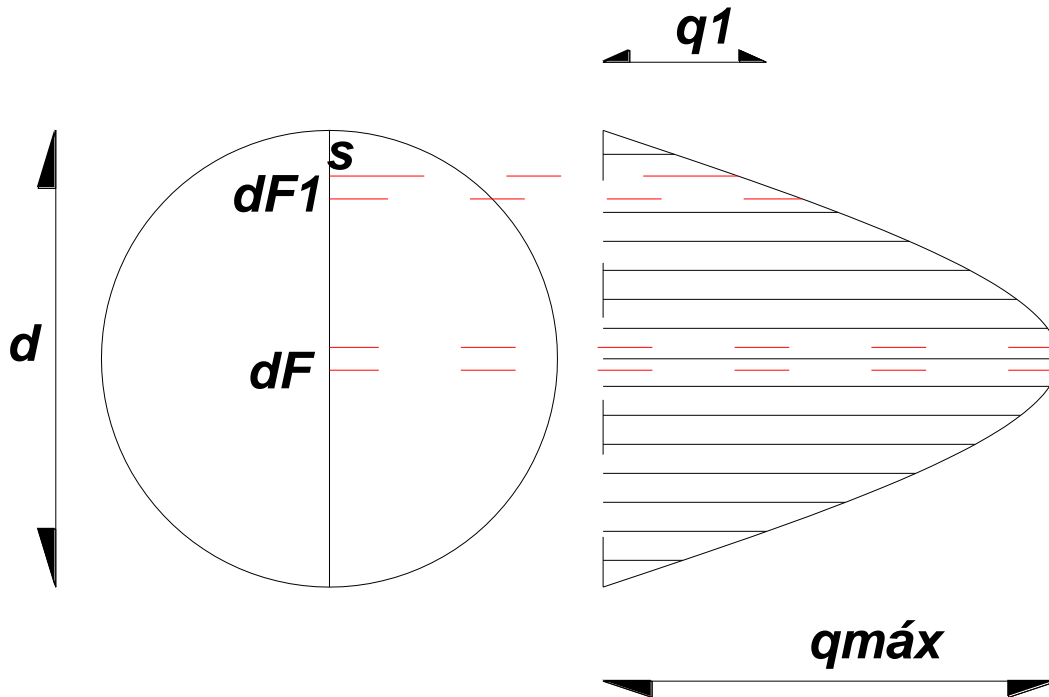


Entonces, el diámetro del perno en $m-n$ se determina, de acuerdo (A3),

$$(C3) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\text{adm}} = \frac{4P}{\pi \cdot d^2} \text{ de donde,} \\ d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot \tau_{\text{adm}}}} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot 500}{\pi \cdot 10,22}} \text{ mm} = 7,9 \text{ mm} \end{array} \right.$$

La distribución de tensiones debido al corte se muestra en la figura n ° 26(b)

figura n ° 26(b)



61

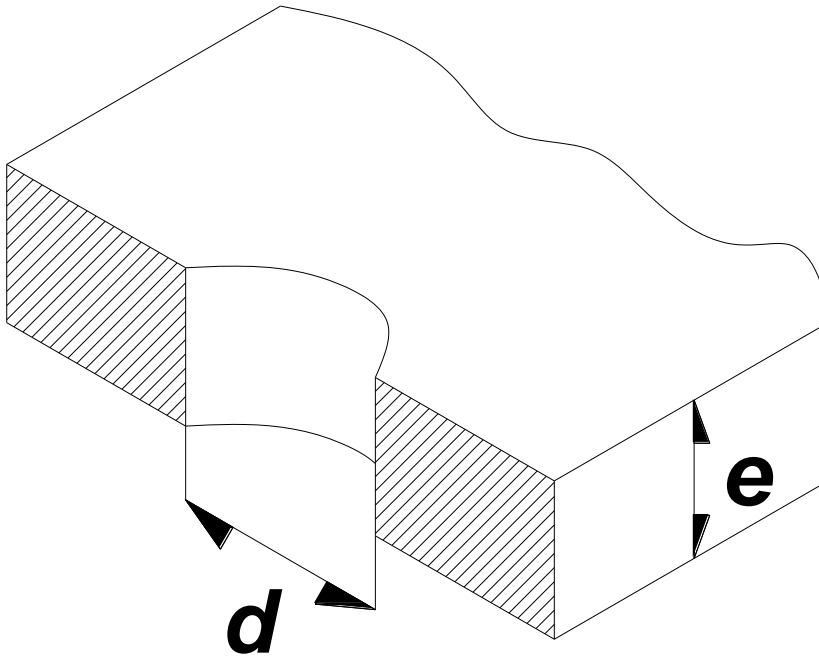
Como observamos de la figura n ° 26(a) la distribución de tensiones tiene una forma parabólica, tal que para la sección central dF , actúa una carga máxima $q_{máx}$, mientras que para una distancia s del extremo será dF_1 , siendo su valor q_1 , tal que,

$$(E3) \quad \frac{q_1}{q_{máx}} = \frac{dF_1}{dF}$$

En las uniones, ya sea por tornillo, remaches, además de las tensiones debido a la cizalladura, se deberán tener en cuenta el aplastamiento de las superficies de contacto, siendo este la deformación plástica que se presenta en las superficies de contacto. En este respecto, cabe señalar, que para el mismo se desconoce su ley de distribución de la presión en las superficies de contacto, tomándose, por esto, una ley no lineal. Se considera el área de aplastamiento $F_{ap} = d \cdot e$, siendo d , el diámetro del perno, y e , el espesor de la placa a unir, como lo podemos mostrar en la figura n ° 26(c).

figura n ° 26(c)

62



Entonces, la resistencia al aplastamiento es,

$$(F3) \quad \sigma_{apl} = \frac{P}{F_{apl}} = \frac{P}{d \cdot e} \leq [\sigma_{apl}]$$

Las tensión al aplastamiento se determina en forma experimental, y suele tomarse para la misma $[\sigma_{apl}] \cong (2 - 2,5) [\sigma_{p-comp}]$

De aquí, que se verifica el diámetro de un perno al aplastamiento como,

$$(G3) \quad d \geq \frac{P}{e \cdot [\sigma_{apl}]}$$

Análogamente, se puede verificar el espesor al aplastamiento,

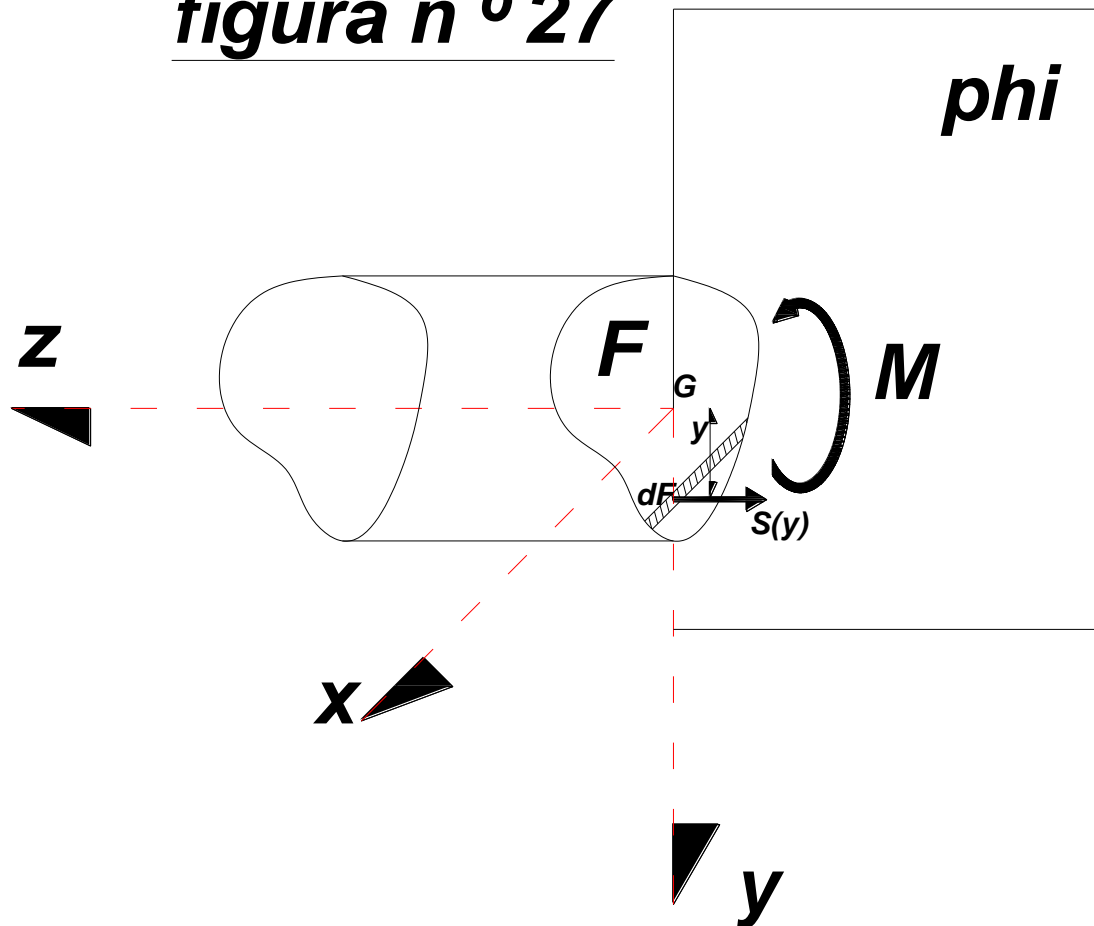
$$(G3) \quad e \geq \frac{P}{d \cdot [\sigma_{apl}]}$$

Tensiones normales σ debidas a momentos flectores

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

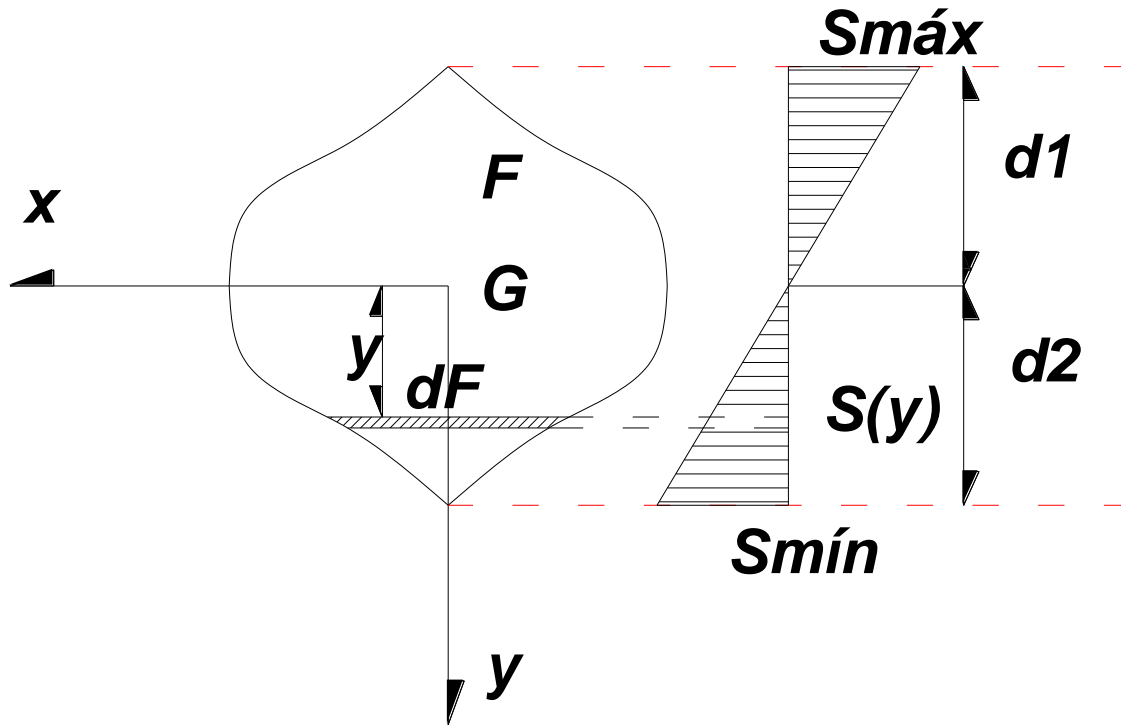
Supongamos una sección transversal F de una barra en cuyo plano π normal a la misma que contiene al eje baricéntrico de la sección actúa un par flector M como lo muestra la figura n^o 27. Consideramos un diferencial de área dF a una ordenada y , actuando en el baricentro de la misma una tensión normal $\sigma_{(y)}$. Ahora bien, el momento exterior activo M debe ser equilibrado por la sumatoria infinitesimal de los pares reactivos $\sigma_{(y)} \cdot y \cdot dF$ en todo el área F .

figura n^o 27



Como podemos observar, la tensión normal en dF , $\sigma_{(y)}$ es proporcional a su distancia y al baricentro G de la sección, teniendo sus máximo y mínimo valores en las fibras extremas, llamando a estas distancias d_1 y d_2 respectivamente. Por consiguiente, la distribución de tensiones normales $\sigma_{(y)}$ debidas a momentos flectores sigue una ley lineal con valores extremos $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ como se muestra en la figura n^o 27(a).

figura n ° 27(a)



64

Luego, por sumatoria de proyecciones de momentos en el eje x en equilibrio, resulta,

$$(45) \quad \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow M = \int_F \sigma_{(y)} \cdot y \cdot dF$$

Observando el diagrama de tensiones de la figura n ° 27(a), por relación de triángulos semejantes, se tiene,

$$(46) \quad \frac{\sigma_{(y)}}{\sigma_{\text{mín}}} = \frac{y}{d_2} \quad \text{de donde} \quad \sigma_{(y)} = \frac{\sigma_{\text{mín}}}{d_2} \cdot y$$

Reemplazando (46) en la integral del segundo miembro de (45), y , siendo $\sigma_{\text{mín}}$ y d_2 constantes, se podrán extraer del integrando como factor multiplicante de la integral, resultando,

$$(47) \quad M = \frac{\sigma_{\text{mín}}}{d_2} \int_F y^2 dF$$

Siendo la expresión,

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$J_{xG} = \int_F y^2 dF \quad (48)$$

Reemplazando (48) en (47), y despejando σ_{\min} , la misma resulta,

$$(49) \quad \sigma_{\min} = \frac{M}{J_{xx}} d_2$$

Reemplazando σ_{\min} de (46) en (49),

$$(50) \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma_{(y)} \cdot d_2}{y} = \frac{M_{xx}}{J_{xx}} \cdot d_2$$

Obteniéndose de (50),

$$\sigma_{(y)} = \frac{M_{xx}}{J_{xG}} \cdot y \quad (51)$$

Expresión que nos informa la relación lineal entre las tensiones normales debidas a momentos flectores y la distancia y al baricentro de la sección.

Observamos de (51) cuando la distancia y es la correspondiente a las fibras más alejadas, en nuestro caso d_1 y d_2 , tenemos las tensiones máxima y mínima, y estas distancias se denominan distancia a la fibra más alejada. Mientras que las magnitudes

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{x1} = \frac{J_{xG}}{d_1} \\ W_{x2} = \frac{J_{xG}}{d_2} \end{array} \right.$$

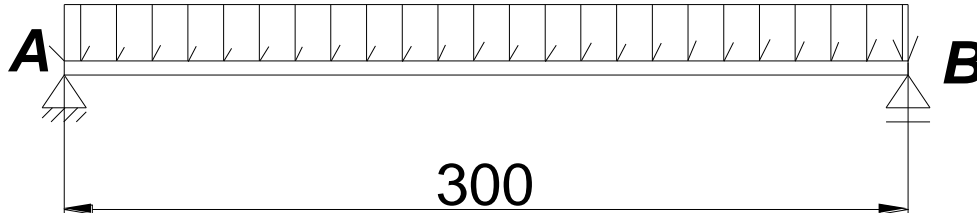
Se denominan módulo resistente, y es una magnitud fundamental para determinar tanto las máximas tensiones normales de flexión como para el dimensionamiento de la sección de una pieza. Con esto, las tensiones máxima y mínima se reducen a,

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\max} = \frac{M_{xx-\max}}{W_{x1}} \\ \sigma_{\min} = \frac{M_{xx-\max}}{W_{x2}} \end{array} \right.$$

Ejemplo de aplicación n° 1. Determinar las tensiones máxima y mínima de flexión correspondiente al máximo momento flector en una viga de alma llena simplemente apoyada de la figura n° 28 sometida a una carga uniformemente repartida, sabiendo que la sección transversal de la misma es rectangular de $F = b \cdot h = 10.15 \text{ cm}^2$.

figura n ° 28

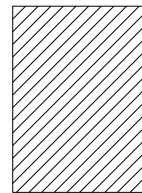
$q=5000 \text{ Kgf/m}$



66

dimensiones en cm

**sección
transversal**



$h=15 \text{ cm}$

$b=10 \text{ cm}$

Solución

Como hemos estudiado en vigas de alma llena, el máximo momento flector en la viga correspondiente a una carga uniformemente distribuida se presenta en el centro de la misma, y viene expresado por,

$$(A4) \begin{cases} M_{(z)-\text{máx}}^x = \frac{q \cdot L^2}{8} \\ M_{(z)-\text{máx}}^x = \frac{50 \cdot (300)^2}{8} \text{ Kgf.cm} = 562500 \text{ Kgf.cm} \end{cases}$$

Luego, al ser la sección transversal simétrica respecto del eje z , las tensiones máxima y mínima son iguales en valor absoluto, siendo estas,

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

$$(B4) \left\{ \begin{aligned} \sigma_{m\acute{a}x} &= \frac{M_{(z)-m\acute{a}x}^x}{W_{zz}} ; & W_{zz} &= \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot h^2}{6} \\ \sigma_{m\acute{a}x,m\acute{i}n} &= \pm \frac{562500 \text{ Kgf}}{10.15^2 \text{ cm}^2} = \pm 1500 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2} \end{aligned} \right.$$

Ejemplo de aplicaci3n n 2. Si la viga del problema anterior, se fabrica de material SAE 1010, considerando un coeficiente de seguridad $\gamma=2$ tanto en tracci3n como en compresi3n, determinar la altura que deber1 tener la viga, si la base de la secci3n permanece invariable.

Soluci3n

Las tensiones de fluencia a tracci3n y de proporcionalidad a compresi3n las extraemos de la anterior tabla, y luego determinamos las tensiones admisibles a tracci3n y compresi3n.

$$(A5) \left\{ \begin{aligned} \sigma_{f-tracc} &= 23 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2} \rightarrow \sigma_{adm-tracc} = \frac{23 \text{ Kgf}}{2 \text{ mm}^2} = 11,5 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{p-comp} &= 28 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2} \rightarrow \sigma_{adm-comp} = \frac{28 \text{ Kgf}}{2 \text{ mm}^2} = 14 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \right.$$

Entonces, las tensiones m1xima y m1nima en la secci3n deber1n ser menor en valor absoluto que las tensiones admisibles del material, es decir,

$$(B5) \left\{ \begin{aligned} \sigma_{adm-tracc} &\geq \frac{6M_{(z)}^x}{b \cdot h^2} \\ \sigma_{adm-comp} &\geq \frac{6M_{(z)}^x}{b \cdot h^2} \end{aligned} \right.$$

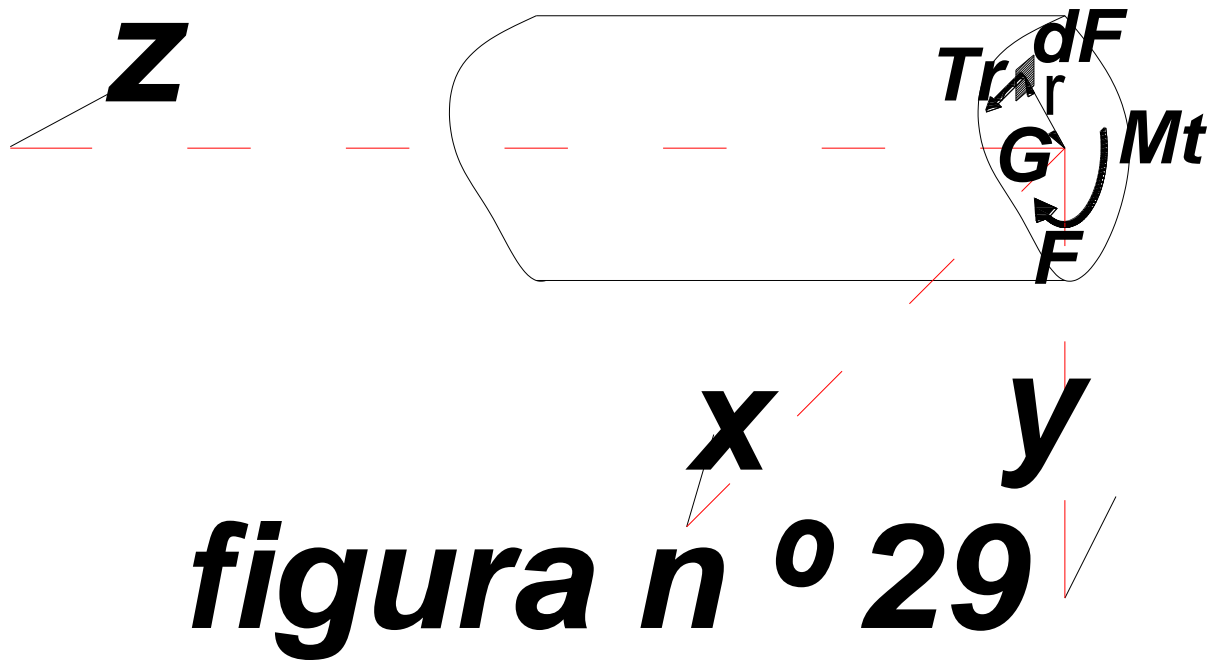
De (B5), se obtienen 2 valores de h, debido que las tensiones admisibles a tracci3n y compresi3n difieren,

$$(C5) \left\{ \begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\frac{6 \cdot M_{(z)}^x}{b \cdot \sigma_{adm-tracc}}} \rightarrow h_1 = \sqrt{\frac{6 \cdot 562500}{10.1150}} \text{ cm} = 17,16 \text{ cm} \\ h_2 &= \sqrt{\frac{6 \cdot M_{(z)}^x}{b \cdot \sigma_{adm-comp}}} \rightarrow h_2 = \sqrt{\frac{6 \cdot 562500}{10.1400}} \text{ cm} = 15,53 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

Por consiguiente, la altura necesaria de la secci3n ser1 $h=17,16 \text{ cm}$

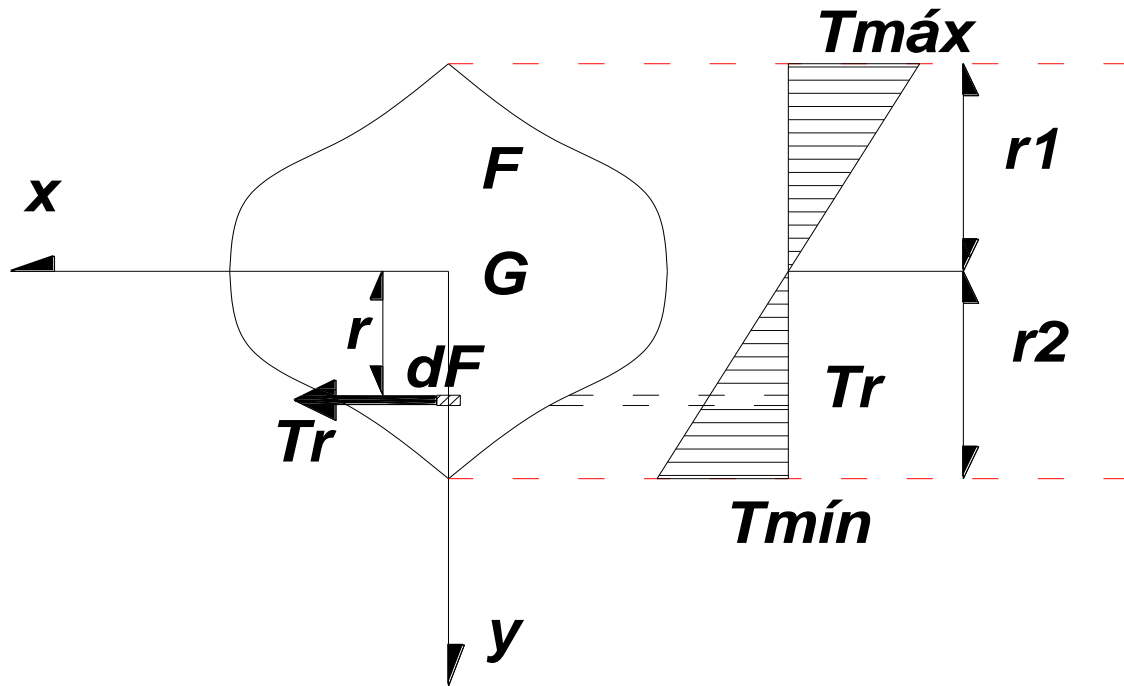
Tensiones tangenciales σ debidas a momentos torsores

Supongamos una secci3n transversal F de una barra actúa un par torsor M_t , como lo muestra la figura n 29. Consideramos un diferencial de 1rea dF a un radio ρ , y, actuando en el baricentro de la misma una tensi3n tangencial τ_ρ . Ahora bien, el momento exterior activo M_t debe ser equilibrado por la sumatoria infinitesimal de los pares reactivos $\tau_\rho \cdot \rho \cdot dF$ en todo el 1rea F .



Como podemos observar, la tensión tangencial en dF , τ_ρ es proporcional a su distancia y al baricentro G de la sección, teniendo sus máximo y mínimo valores en las fibras extremas, llamando a estas distancias r_1 y r_2 respectivamente. Por consiguiente, la distribución de tensiones tangenciales τ_ρ debidas a momentos torsores sigue una ley lineal con valores extremos $\tau_{máx}$ y $\tau_{mín}$ como se muestra en la figura n° 29(a).

figura n ° 29(a)



Luego, por sumatoria de proyecciones de momentos en el eje z en equilibrio, resulta,

$$(54) \quad \sum Mom_{zz} = 0 \rightarrow M_t = \int_F \tau_\rho \cdot \rho \cdot dF$$

Observando el diagrama de tensiones de la figura n ° 27(a), por relación de triángulos semejantes. se tiene,

$$(55) \quad \frac{\tau_\rho}{\tau_{\min}} = \frac{\rho}{r_2} \quad \text{de donde} \quad \tau_\rho = \frac{\tau_{\min}}{r_2} \cdot \rho$$

Reemplazando (46) en la integral del segundo miembro de (45), y, siendo τ_{\min} y r_2 constantes, se podrán extraer del integrando como factor multiplicante de la integral, resultando,

$$(56) \quad M_t = \frac{\tau_{\min}}{r_2} \int_F \rho^2 dF$$

Siendo la expresión,

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \quad (57)$$

Reemplazando (57) en (56), y despejando τ_{\min} , la misma resulta,

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$(58) \quad \tau_{\min} = \frac{M_t}{J_p} r_2$$

Reemplazando τ_{\min} de (55) en (58),

$$(59) \quad \tau_{\min} = \frac{\tau_\rho \cdot r_2}{\rho} = \frac{M_t}{J_\rho} \cdot r_2$$

Obteniéndose de (50),

$$\tau_\rho = \frac{M_t}{J_p} \cdot \rho \quad (60)$$

Expresión que nos informa la relación lineal entre las tensiones normales debidas a momentos flectores y la distancia y al baricentro de la sección.

Observamos de (51) cuando la distancia es la correspondiente a las fibras más alejadas, en nuestro caso r_1 y r_2 , tenemos las tensiones máxima y mínima, y estas distancias se denominan distancia a la fibra más alejada. Mientras que las magnitudes

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{p1} = \frac{J_p}{r_1} \\ W_{p2} = \frac{J_p}{r_2} \end{array} \right.$$

Se denominan módulo resistente polar, y es una magnitud fundamental para determinar tanto las máximas tensiones tangenciales de torsión como para el dimensionamiento de la sección de una pieza. Con esto, las tensiones tangenciales máxima y mínima se reducen a,

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_{p1}} \\ \tau_{\min} = \frac{M_t}{W_{p2}} \end{array} \right.$$

Ejemplo de aplicación n° 1. Calcular la tensión tangencial máxima que se produce en un eje de 40 mm de diámetro sometido a un par torsor $M_t = 4500 \text{ N.m}$

Solución

De acuerdo a (62), las tensiones tangenciales máximas se producen en las fibras más alejadas, y, en la sección circular, ambas fibras se encuentran a igual distancia del baricentro. Entonces,

$$(A6) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \\ W_p = \frac{\pi \cdot 4^3}{16} \text{ cm}^3 = 12,566 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$$

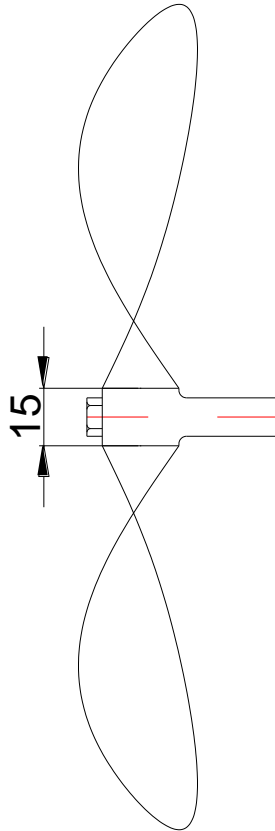
Y, la máxima tensión tangencial es,

$$(B6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \\ \tau_{\max} = \frac{4500 \text{ N.m}}{12,566 \text{ cm}^3} \end{array} \right. \rightarrow \tau_{\max} = 3581 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Ejemplo de aplicación n° 2. En la figura n° 30 se muestra el ventilador de un radiador de un camión, Sabiendo, que el mismo transmite una potencia 3 CV, girando a 2500 r.p.m., Calcular el máximo esfuerzo cortante por torsión, y seleccionar un acero adecuado para fabricarlo.

figura n° 30



dimensiones en mm

Solución

Siendo la potencia transmitida por el momento torsor de un árbol con velocidad angular ω ,

$$(A7) P = M_t \cdot \omega$$

Cálculo ω , y expresión de potencia en sistema técnico

$$(B7) \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \rightarrow \omega = \frac{\pi \cdot 2500}{30} \frac{1}{s} = 262 \frac{1}{s} \\ P = 3 \text{ CV} = 3.75 \frac{\text{Kgfcm}}{s} = 225 \frac{\text{Kgfcm}}{s} \rightarrow P = 22500 \frac{\text{Kgfcm}}{s} \end{array} \right.$$

Entonces, el momento torsor correspondiente es,

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

$$(C7) \begin{cases} M_t = \frac{P}{\omega} \\ M_t = \frac{22500}{262} \text{Kgf} \cdot \text{cm} = 85,88 \text{Kgf} \cdot \text{cm} \end{cases}$$

Las tensiones máximas de torsión en la base del cubo del ventilador, siendo su diámetro de **1,5 cm**,

$$(D7) \begin{cases} \tau_{\text{máx}} = \frac{16 M_t}{\pi \cdot d^3} \\ \tau_{\text{máx}} = \frac{16 \cdot 85,88 \text{Kgf}}{\pi \cdot 1,5^3 \text{cm}^2} = 130 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2} \end{cases}$$

Para su construcción basta con un material de acero dulce cuya tensión de fluencia al corte es

$$\tau_f = 12,5 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2} = 1250 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}$$