UNIVERSIDA D TECNOLOGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

TRANSPORTE

Romina Miccige – Matias Patterlini

Transporte:

El modelo de transporte es una aplicación especial de la programación lineal.

En su formulación inicial el problema de transporte estudia la distribución de un producto homogéneo desde un conjunto de fábricas a un conjunto de almacenes o puntos de venta, de modo que se satisfagan las demandas de los almacenes y no se superen las disponibilidades de las fábricas, con costos mínimos. El modelo de transporte tiene notable interés por sus importantes aplicaciones que como se verá en varios ejercicios, no se restringe únicamente a la distribución de mercadería. Su procedimiento especifico de solución llamado algoritmo de transporte es rápido y eficiente.

Un problema de transporte se puede resolver como un problema de programación lineal o con tres métodos (Costos mínimos, Vogel y Noroeste MEN). Si un problema de transporte se resuelve con programación lineal se obtendrá una solución óptima usando los métodos obtendremos una solución del tipo factible inicial que deberemos mejorar aplicando el método MODI.

Programación Lineal

El problema de transporte trata de enviar unidades de un producto desde m orígenes, O1, . . ., Om, a n destinos, D1, . . ., Dn, en las siguientes condiciones.

• Cada origen Oi , i = 1, . . ., m, dispone de una oferta ai .

• Cada destino Dj , j = 1, . . ., n, realiza una demanda bj .

• cij , i = 1, . . ., m, j = 1, . . ., n, es el coste de enviar una unidad desde el origen Oi al destino Dj .

El problema es determinar el número de unidades xij que se deben enviar desde cada origen Oi hasta cada destino Dj para realizar el transporte a coste mínimo, teniendo en cuenta que hay que satisfacer las restricciones de oferta y demanda.

La formulación lineal de este problema es la siguiente:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

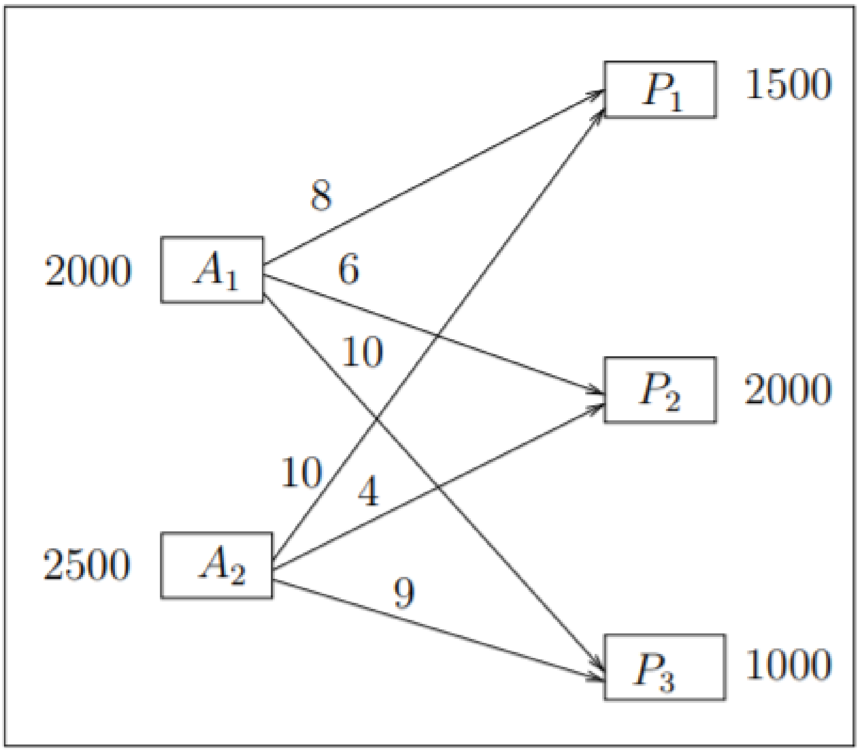
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

Las primeras m restricciones están asociadas a las ofertas de los orígenes, que no se deben sobrepasar. Las n siguientes restricciones aseguran que se deben satisfacer las demandas de los destinos. Las variables no pueden tomar valores negativos, ya que representan cantidades de producto que se transportan.

Supongamos que una empresa productora de pan lactal tiene dos almacenes A1 y A2 desde los cuales debe enviar a tres panaderías P1, P2 y P3. Las ofertas, las demandas y los costes de envío se dan en el siguiente grafo.



Para plantear un modelo lineal que represente el problema definimos xij : cantidad de barras de pan que se envían desde cada origen Ai , i = 1, 2, a cada destino Pj , j = 1, 2, 3.

El modelo lineal para este problema es el siguiente:

min z = 8x11+6x12+10x13+10x21+4x22+9x23

sujeto a

x11 +x12 +x13 = 2000

x21 +x22 +x23 = 2500

x11 +x21 = 1500 x12 +x22 = 2000

x13 +x23 = 1000

x11, x12, x13, x21, x22, x23 ≥ 0 **En este caso las restricciones se pueden escribir con igualdad porque la suma de ofertas es igual a la suma de demandas**

La tabla de transporte: Una manera de representar el problema de transporte es la llamada forma matricial que es más adecuada para este problema. La forma matricial también llamada tabla de costos. En la tabla aparecen las ofertas, las demandas y los costes de transporte.

	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	Oferta
O_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
O_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
O_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Demanda	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Para aplicar los metodos de transporte se empleara la forma de tabla de transporte. Usaremos un ejermplo tipo para aplicar los tres metodos:

		Demanda			
		1	2	3	Disponibilidad
oferta	A	8	9	6	45
	B	5	7	4	25
	C	3	5	7	50
	D	7	8	5	30
	Demanda	40	60	30	130/150

Como la disponibilidad total es de 150 y la demanda es de 130 el problema no es equilibrado, para equilibrarlo introduciremos un destino ficticio (Columna F), con demanda 150 – 130 = 20 y costos nulos en las posiciones de sus columnas. Nota: para aplicar cualquier método la oferta y la demanda deben estar equilibradas.

<u>Método: Equina del Noroeste o MEN</u>

		Demanda				
		1	2	3	F	Disponibilidad
oferta	A	8	9	6	0	45
	B	5	7	4	0	25
	C	3	5	7	0	50
	D	7	8	5	0	30
	Demanda	40	60	30	20	150/150

El MEN comienza tomando la posición de la tabla situada más al noroeste, (A1, y situado en ella el máximo número posible de unidades, que será el mínimo entre la disponibilidad del origen A y la demanda del destino A. En este caso XA1 = MIN (45;40) = 40. A continuación se reducen en ese valor asignado, la disponibilidad de A y la demanda de 1 Quedando 45 – 40 = 5 en disponibilidad y 40 – 40 en demanda =5.

Se obtiene así la tabla de la que se elimina la fila y/o columna que quede satisfecha. En este caso la columna 1 pasa a tener demanda 0 así que la eliminamos, teniendo ahora la tabla reducida.

Demanda

	1	2	3	F	Disponibilidad
A	40 8	9	6	0	5
B	5	7	4	0	25
C	3	5	7	0	50
D	7	8	5	0	30
Demanda	0	60	30	20	150/150

Demanda

	2	3	F	Disponibilidad
A	9	6	0	5
B	7	4	0	25
C	5	7	0	50
D	8	5	0	30
Demanda	60	30	20	

Repetimos el procedimiento con la tabla reducida. Ahora la esquina noroeste corresponde a (A, 2). El número de unidades que asignamos a esta posición es XA2 = min (5; 60) = 5 Una vez reducidas la disponibilidad de A y la demanda de 2 se obtiene

Demanda

	2	3	F	Disponibilidad
A	5 9	6	0	0
B	7	4	0	25
C	5	7	0	50
D	8	5	0	30
Demanda	55	30	20	

Prescindiendo de la fila A, que ha quedado satisfecha al convertirse en nula su disponibilidad, tenemos la nueva tabla reducida con la asignación XB2 = 25

Demanda

	2	3	F	Disponibilidad
A				
B	25 7	4	0	0
C	5	7	0	50
D	8	5	0	30
Demanda	30	30	20	

Prescindiendo de la fila B, ya que queda satisfecha y reiterando el procedimiento, tenemos la solución básica factible que mostramos en la tabla

	Demanda				
	1	2	3	F	Disponibilidad
A	40 8	5 9	6	0	0
B	5	25 7	4	0	0
C	3	30 5	20 7	0	0
D	7	8	10 5	20 0	0
Demanda	0	0	0	0	0

Esta solución es no degenerada, ya que el número de posiciones básicas es 7 igual al número máximo posible que es M + N – 1 = 4 + 4 = 7, donde M = número de filas y N = número de columnas de la tabla de transporte equilibrada de posiciones básicas que puede tener una solución básica factible. El costo asociado a esta solución es:

C= 40*8 + 5*9 + 25*7 + 30*5 + 20*7 + 10*5 + 20*0 = 880

<u>El método Vogel:</u> comienza determinando las penalizaciones de fila (PFi) y columna (PCj), obtenidas como el valor absoluto de la diferencia entre los dos costos menores de cada fila y cada columna respectivamente. Situamos estos valores a la derecha y en la parte inferior de la tabla, obteniendo la tabla ampliada

		Demanda					
		1	2	3	F	Disponibi	PFI
oferta	A	8	9	6	0	45	6*
	B	5	7	4	0	25	4
	C	3	5	7	0	50	3
	D	7	8	5	0	30	5
	Demanda	40	60	30	20	130/150	
	PCJ	2	2	1	0		

A continuación, consideramos la mayor penalización entre filas y columnas, que es 6 (marcada con un asterisco) y corresponde a fila A. Elegimos la posición de menor coste en esa fila que es la (A;F), y situamos en ella el mayor número posible de unidades dado por XAF = MIN (45;20) = 20 reduciendo la disponibilidad de la fila A y la demanda de la columna F en ese valor, tenemos la tabla.

	Demanda				
	1	2	3	F	Disponibilida
A	8	9	6	20 / 0	25
B	5	7	4	0	25
C	3	5	7	0	50
D	7	8	5	0	30
Demanda	40	60	30	0	

Eliminamos la fila y/o columna que haya quedado satisfecha, que en este caso es la columna F, y repetimos el proceso con la tabla reducida y sus bordes revisados. Las penalizaciones son ahora

		Demanda			
	1	2	3	Disponibilidad	PFI
A	8	9	6	45	2
B	5	7	4	25	1
C	3	5	7	50	2
D	7	8	5	30	2
Demanda	40	60	30		
PCJ	2	2*	1		

Y la mayor es 2. Como hay empate, lo rompemos arbitrariamente y tomamos, por ejemplo la columna 2. En esta columna el menor costo es 5, que corresponde a la posición (C, 2). Hacemos XC2 = min (50,60) = 50 y reducimos la disponibilidad de C y la demanda de 2 en tal número de unidades.

		Demanda		
	1	2	3	Disponibilidad
A	8	9	6	45
B	5	7	4	25
C	3	50 / 5	7	0
D	7	8	5	30

Demanda	40	10	30	

Eliminamos la fila C. La nueva tabla reducida, con las penalizaciones, es

	Demanda 1	2	3	Disponibilidad	PFI
A	8	9	6	25	2
B	5	7	4	25	1
D	7	8	30 / 5	30	2*
Demanda	40	10	30		
PCJ	2	2	1		

Tomamos como mayor penalización la correspondiente a la fila D, pues hay empates. En ella, la posición de menor costo es (D, 3=. Hacemos XD3 = min (30,30) = 30 y reducimos la disponibilidad D y la demanda en 3, indicación de degeneración en la solución inicial. Continuando con el procedimiento, llegamos a la solución básica factible que es degenerada ya que tiene 6 posiciones básicas, una menos que el máximo que es 7. El costo asociado es.

Ct= 15*8 + 10*9 + 20*0 +25*5 + 50*5 + 30*5 = 735

	Demanda 1	2	3	F	Disponibilidad
A	15 / 8	10 / 9	6	20 / 0	0
B	25 / 5	7	4	0	0
C	3	50 / 5	20 / 7	0	0
D	7	8	30 / 5	0	0
Demanda	0	0	0	0	0

Costos Mínimos: asigna el mayor número posible de unidades a la posición de menor coste, eliminando la fila y/o columna que puede satisfecha y repite el proceso hasta eliminar todas las filas y columnas que quede satisfecha, y repite el proceso hasta eliminar todas las filas y columnas.

En nuestra tabla, el menor costo es 0, que corresponde a todas las posiciones de la columna F. Elegimos una arbitrariamente, por ejemplo, la posición (A, F), y el mayor número de unidades que podemos asignarle que es XAF = min (45,20) = 20.

Reducimos la disponibilidad de la fila A y la demanda de la columna F en ese número de unidades y tenemos la tabla:

	Demanda				
	1	2	3	F	Disponibilidad
A	8	9	6	20 0	25
B	5	7	4	0	25
C	3	5	7	0	50
D	7	8	5	0	30
Demanda	40	60	30	0	

Eliminamos la columna F, que ha quedado satisfecha. La nueva tabla reducida con bordes revisados es

		Demanda		
	1	2	3	Disponibilidad
A	8	9	6	25
B	5	7	4	25
C	3	5	7	50
D	7	8	5	30
Demanda	40	60	30	

La posición de menor costo es (C, 1). Le asignamos XC1 = min (50, 40) = 40. La tabla con la disponibilidad de la fila C y la demanda de la columna 1 reducidas en ese número de unidades es

		Demanda		
	1	2	3	Disponibilidad
A	8	9	6	25
B	5	7	4	25
C	40 3	5	7	10
D	7	8	5	30
Demanda	0	60	30	

Y eliminando la columna 1, ya satisfecha, se obtiene la tabla reducida.

	Demanda		
	2	3	Disponibilidad
A	9	6	25
B			25

	7	4	
C	5	7	10
D	8	5	30
Demanda	60	30	

La posición de menor costo es (B,3). Le asignamos XB3= min (25, 30) = 25.

Continuando con el procedimiento, se llega a la solución dada en la tabla

	Demanda				
	1	2	3	F	Disponibilidad
A	 8	25 9	 6	20 0	45
B	 5	 7	25 4	 0	25
C	40 3	10 5	 7	 0	50
D	 7	25 8	5 5	 0	30
Demanda	40	60	30	20	

Que es no degenerada, ya que tiene 7 posiciones básicas. El costo asociado es

C= 25*9 + 20*0 + 25*4 + 40*3 + 10*5 + 25*8 + 5*5 = 720

Los métodos de Vogel y de costos mínimos han proporcionado una solución inicial básica factible bastante mejor que el MEN . En general, esto era de esperar, ya que le MEN distribuye las unidades en la tabla de transporte sin tener en cuenta los costos, mientras que los otros métodos tienen una lógica basada en ellos.

Bibliografía:

Sixtos Ríos Insual, David Ríos Insua, Alfonso Mateos, Jacinto Martín, Programación Lineal y Aplicaciones. Ejercicios Resueltos, Editorial RA-MA octubre 1997