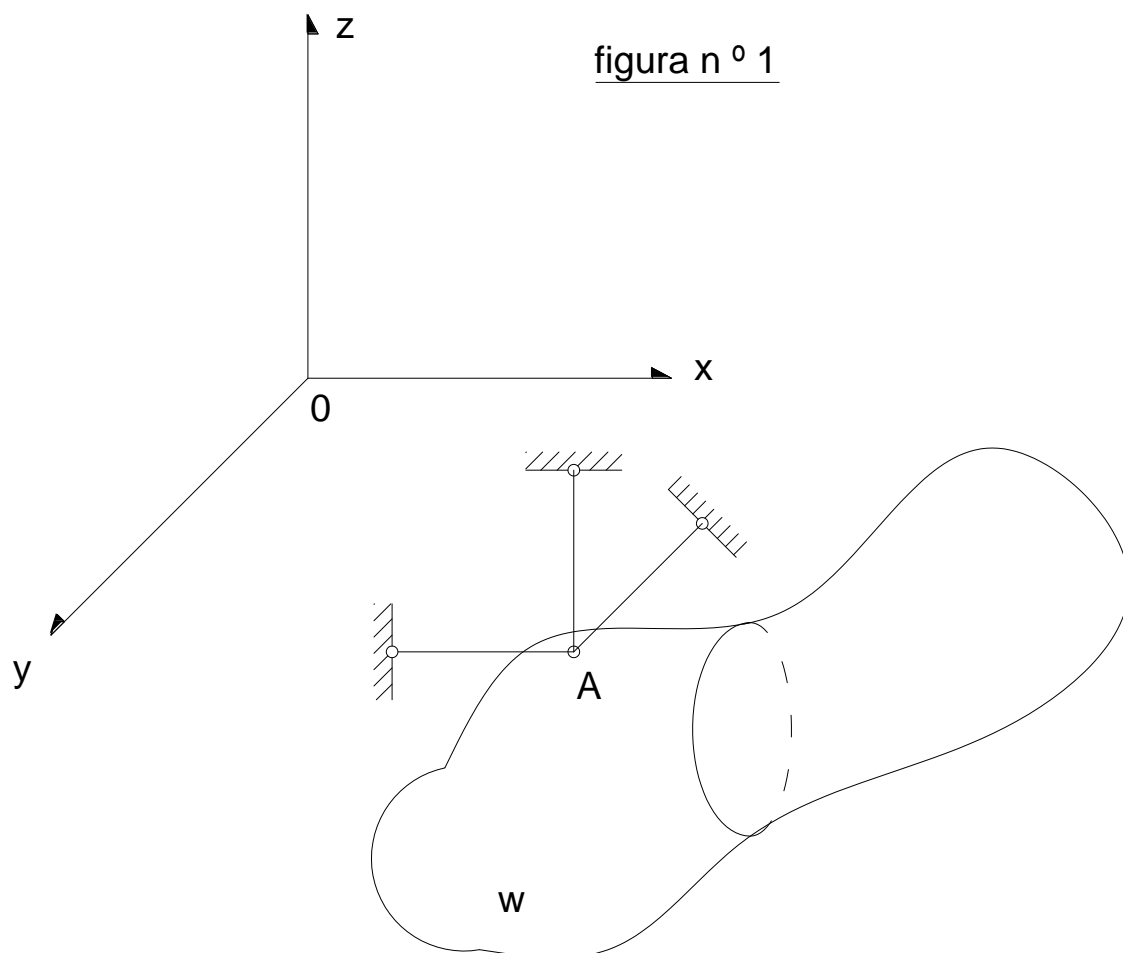


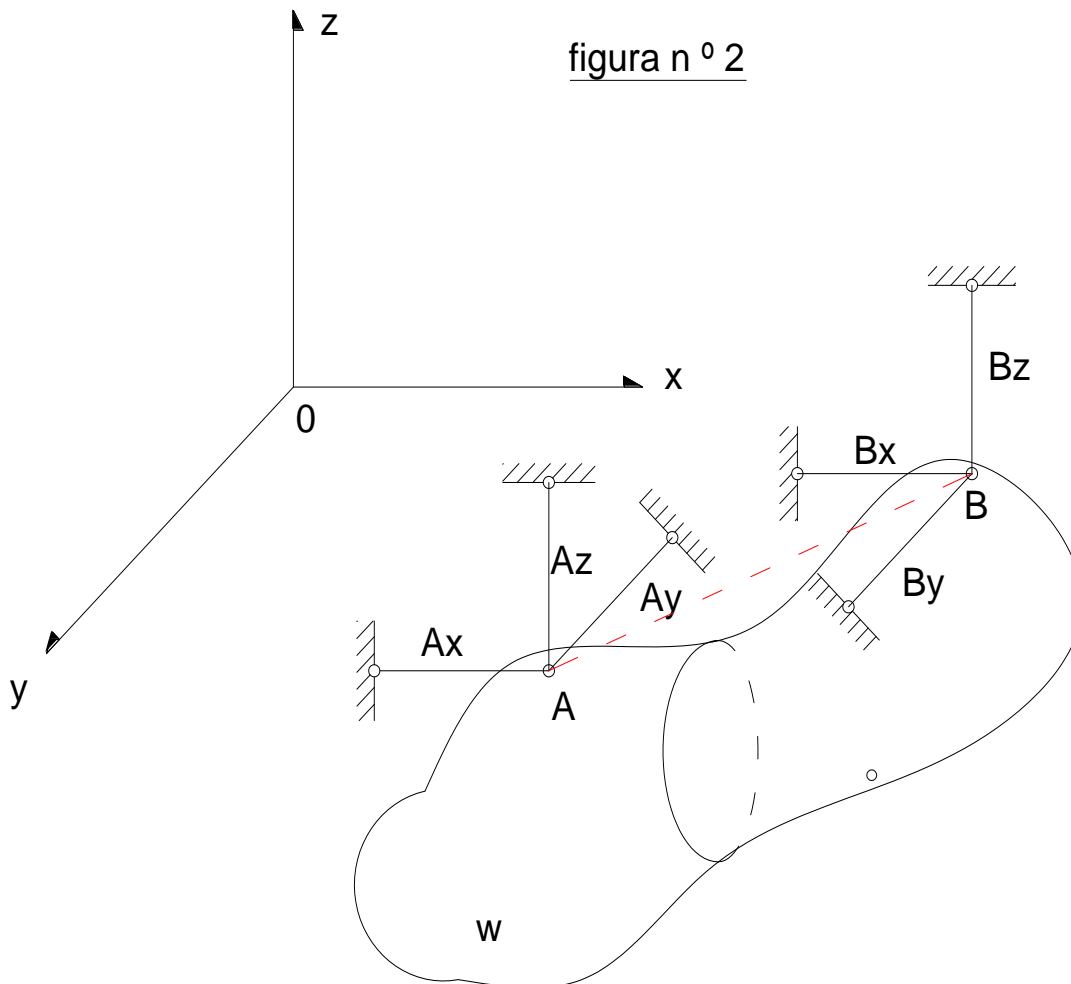
SISTEMAS DE CUERPOS VINCULADOS

Según hemos estudiado en la unidad correspondiente a cinemática del cuerpo rígido, el mismo posee 6 grados de libertad, resultantes de 3 movimientos de desplazamientos respecto de los ejes coordenados, y 3 giros alrededor de los mismos. Para que el mismo se encuentre isostáticamente sustentado es necesario restringirle los 6 grados de libertad mediante la aplicación de vínculos convenientemente distribuidos. Estudiaremos la invariabilidad del movimiento considerando un cuerpo ω al que le colocamos 6 bielas para restringir los grados de libertad del cuerpo. En la figura n^o 1, fijamos el punto **A** del mismo a tierra mediante 3 bielas no coplanares.



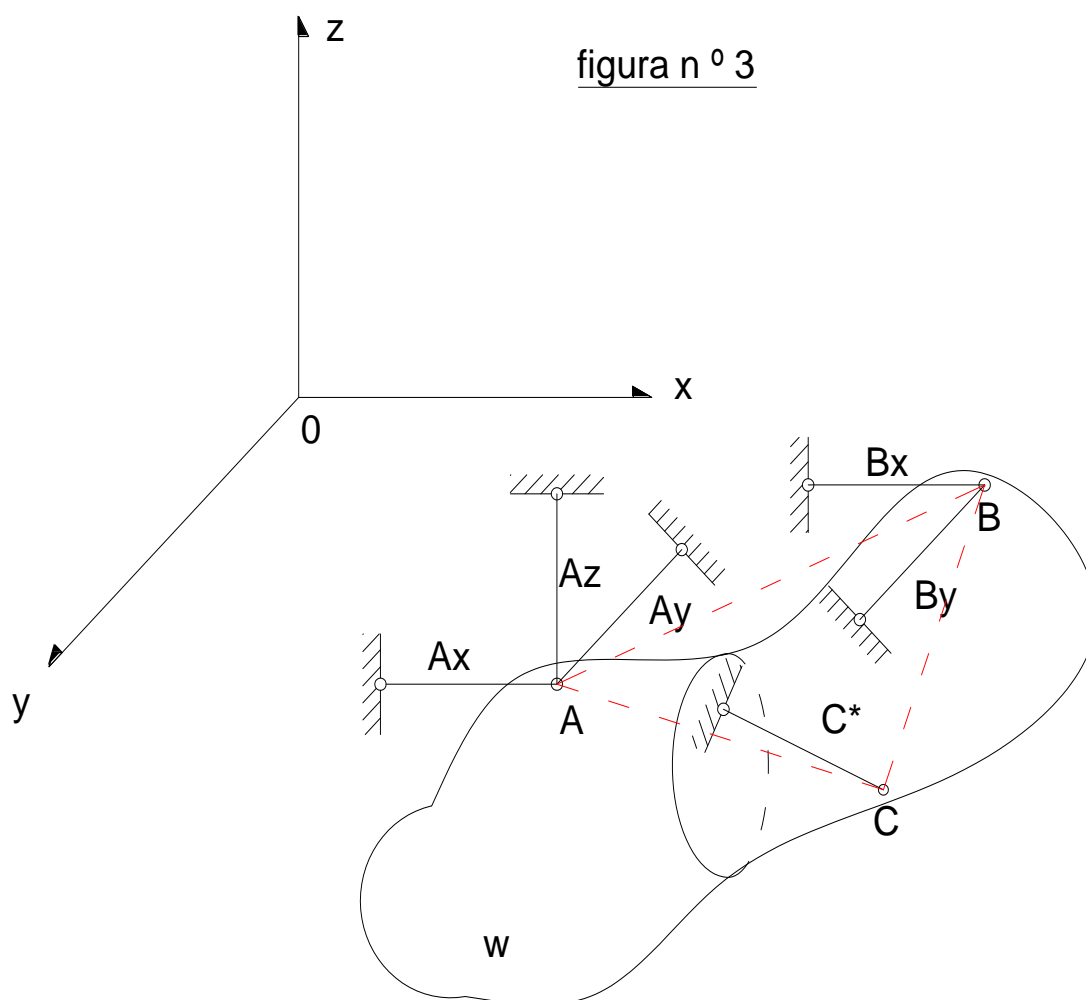
Para inmovilizar el cuerpo, es necesario fijar 3 puntos no alineados del mismo a tierra. A

continuación, fijamos otro punto, como el B a tierra. Observemos, ¿qué ocurre si colocamos 3 bielas no coplanares en B, como lo indicamos en la figura n° 2?.



Según podemos observar en la figura n° 2, mediante 3 bielas no coplanares, fijamos el punto A a tierra constituyendo un vínculo de 3° especie, y, mediante 3 bielas no coplanares fijamos el punto B a tierra constituyendo otro vínculo de 3° especie. Pero, con 2 puntos fijos a tierra, el cuerpo permanece cinemáticamente variable, y no quedan restringidos sus grados de libertad, pues el mismo podrá girar alrededor de la recta que une estos puntos \overline{AB} , por lo que existe vinculación aparente. En consecuencia, para que no exista vinculación aparente en un cuerpo vinculado por medio de 6 bielas no coplanares, es condición necesaria, que no concurren más de 5 bielas al mismo eje.

En el siguiente análisis, fijamos a tierra un punto **A** mediante 3 bielas no coplanares, como mostramos en la figura n^o 3, y luego, fijamos otro punto **B**, mediante 2 bielas no coplanares con la recta \overline{AB} , pues la condición de rigidez está implícita por la distancia de este segmento del sólido ideal. Tenemos 2 puntos fijos a tierra, pero, el cuerpo puede girar alrededor de la recta \overline{AB} , en consecuencia, necesitamos una última condición de vínculo, que, como hemos señalado anteriormente, no debe concurrir a esta recta, ni ser coplanaria con la misma. Ubicamos un vínculo de 1^o especie en un punto **C** arbitrario, que cumpla con las condiciones mencionadas.



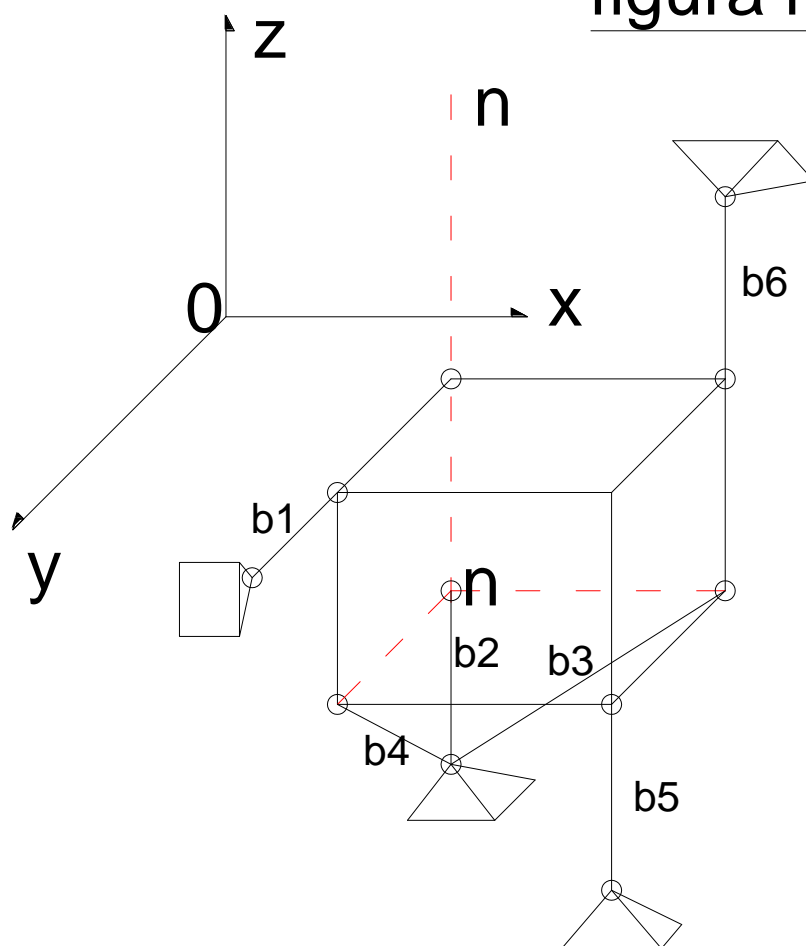
Luego, desde **A** se transmite una biela \overline{AB} a **B**, de forma tal que **B** es otro punto fijo ahora por concurrir 3 bielas . no coplanares. Ahora, desde **A** transmitimos al punto **C**, la biela \overline{AC} , y, desde **B** le transmitimos la biela \overline{BC} . Estas bielas, juntos con el vínculo no coplanar a las

mismas C^* , constituyen el punto fijo C del cuerpo, y de esta forma, el cuerpo ω posee 3 puntos fijos, quedando el mismo fijo a tierra, y, en consecuencia, cinemáticamente invariable.

"En consecuencia, cuando un sólido está sustentado a tierra mediante 6 bielas, hay vinculación aparente cuando todas sus bielas cortan una misma recta".

Un ejemplo de vinculación aparente se muestra en la figura n^o 4. En la misma observamos que todas sus bielas cortan un mismo eje n-n.

figura n^o 4



Como podemos observar de la figura n^o 4, las bielas b_1, b_2, b_3 , y b_4 cortan la recta $n-n$, mientras que las bielas b_5 y b_6 , al ser paralelas a $n-n$, se interceptan con la misma en el punto impropio de la misma.

Ecuaciones de equilibrio

Cuando estamos analizando el equilibrio de un cuerpo, las condiciones que se deben cumplir para el mismo, son:

- * a) la sumatoria de las proyecciones de las fuerzas activas y reactivas respecto de los ejes coordenados igualadas a cero, con lo que se asegura que el cuerpo no posea desplazamientos respecto de los mismos;
- * b) La sumatoria de los momentos de las fuerzas activas y reactivas respecto de los ejes coordenados sea nula, con lo que se evitan los giros respecto de los mismos.

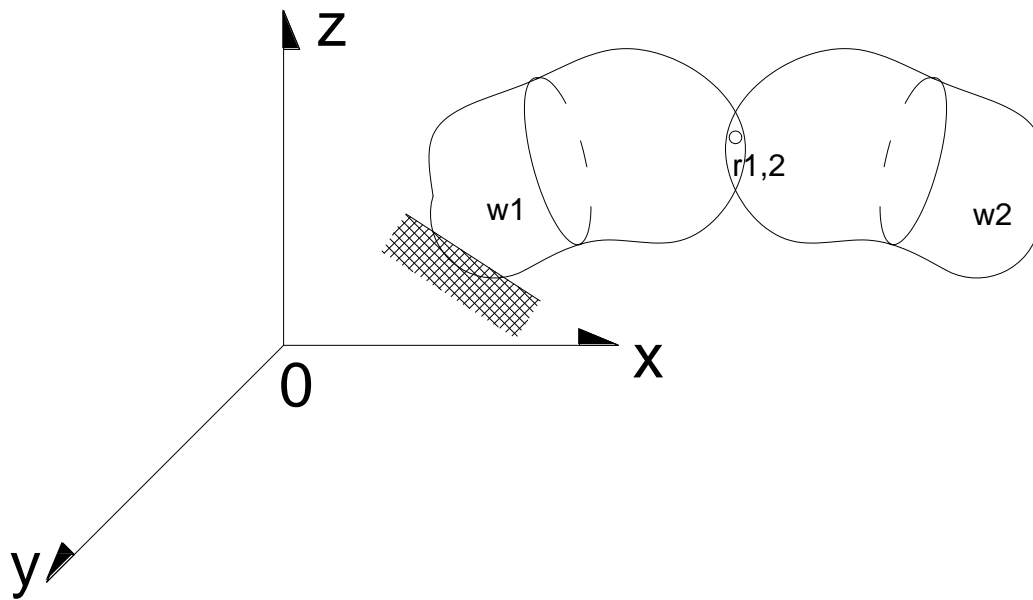
Las ecuaciones de equilibrio absoluto son:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{xx} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

Cuerpos vinculados

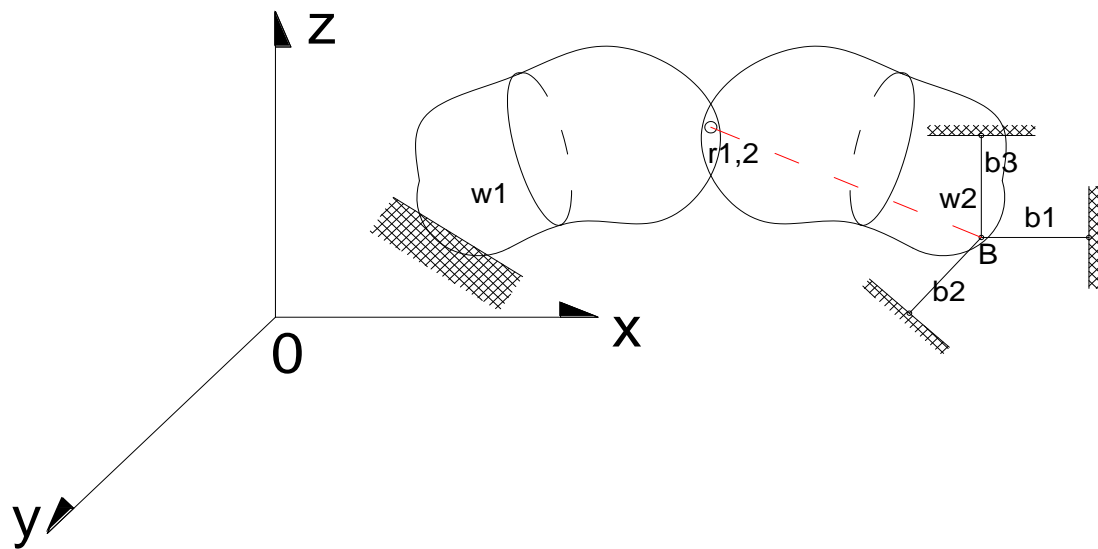
Cuando a un cuerpo ω_1 vinculado a tierra, al cual se le restringen los 6 grados de libertad, por tanto inmovilizado, le articulamos un segundo cuerpo ω_2 mediante una rótula $r_{1,2}$, como lo mostramos en la figura n° 5, este segundo cuerpo, podrá girar alrededor de los ejes coordenados, con lo cual, se le deben restringir los 3 grados de libertad restantes para que el conjunto permanezca en equilibrio. Entonces, una rótula es equivalente a un vínculo de tercera especie.

figura n ° 5



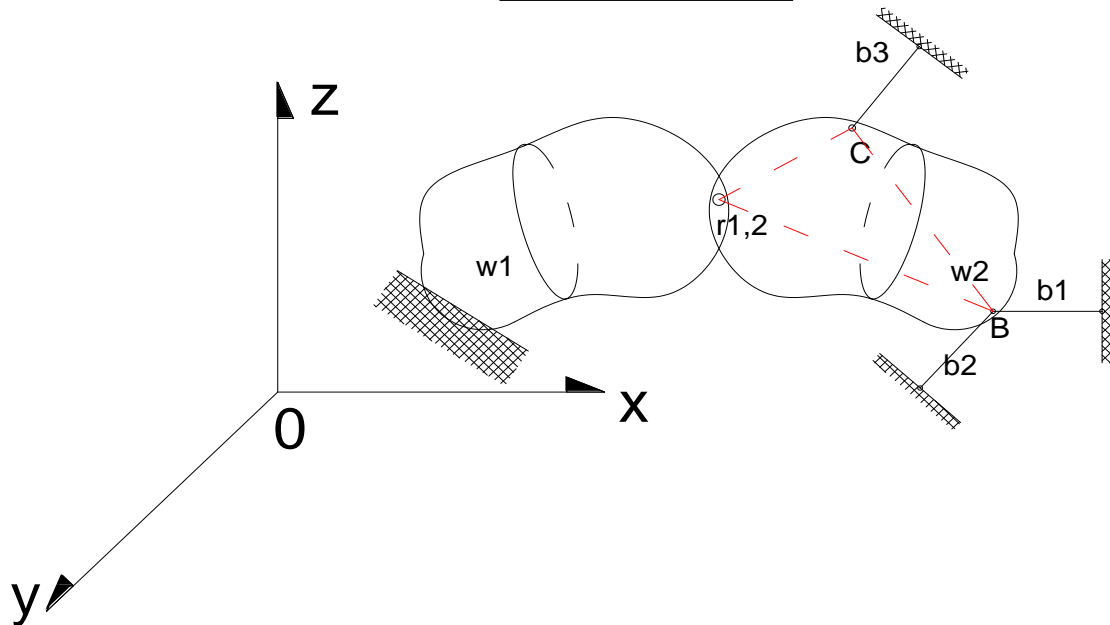
Con esto, deducimos que dos cuerpos vinculados mediante una rótula, poseen 9 grados de libertad. Para que el conjunto sea cinemáticamente invariable, se deberán restringir las 3 condiciones de vínculo al cuerpo ω_2 . Colocaremos 3 bielas no coplanares en un punto **B** como lo indica la figura n ° 6.

figura n^o 6



Observamos las bielas b_1, b_2 y b_3 concurrentes al punto B, constituyen una vinculación aparente, pues el cuerpo ω_2 puede girar alrededor de la recta $\overline{r_{1,2}B}$, como ocurre en el caso mencionado anteriormente, y mostrado en la figura n^o 2 en el cual colocamos 3 bielas no coplanares en 2 puntos, y el cuerpo permanecía cinemáticamente variable. Entonces, para que no exista vinculación aparente, las 3 bielas no deben concurrir a un punto. Entonces, colocando en el punto B, 2 bielas no coplanares con $\overline{r_{1,2}B}$, y una tercer biela b_3 en un punto C, con la condición que no corte a $\overline{r_{1,2}B}$, el conjunto permanecerá cinemáticamente invariable. Analizaremos esta situación con ayuda de la figura n^o 7.

figura n^o 7



Desde la rótula $r_{1,2}$, considerando que es un punto fijo de ω_1 y ω_2 , transmitimos una biela al punto B de ω_2 , que posee dos bielas concurrentes al mismo no coplanares con $\overline{r_{1,2}B}$, definen a B , como punto fijo de ω_2 , Desde este, transmitimos a C , (con una biela b_3 que no corta a la recta $\overline{r_{1,2}B}$), la biela \overline{BC} , y, desde $r_{1,2}$, transmitimos a C , la biela $\overline{r_{1,2}C}$, que, junto con b_3 , y \overline{BC} determinan el punto fijo C , de esta forma, el cuerpo ω_2 posee los puntos fijos $r_{1,2}$, B , y C , permaneciendo cinemáticamente invariable el conjunto.

Al igual que cuando estudiamos cadenas cinemáticas de chapas para que el conjunto permanezca en equilibrio, no se transmitir momentos a través de las rótulas o uniones entre cuerpos

Ecuaciones de equilibrio de 2 cuerpos vinculados

Son las ecuaciones que determinan las reacciones de vínculo externo de los cuerpos vinculados sometidos a determinado sistema de fuerzas

Ecuaciones de equilibrio absoluto

Las mismas se aplican para el conjunto de cuerpos, y son las correspondientes al estudio del equilibrio de un cuerpo,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{xx} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

Ecuaciones de equilibrio relativo

Debido que dos cuerpos vinculados poseen 9 grados de libertad, se deben utilizar 9 condiciones de vínculo externas para establecer el equilibrio de los mismos, pero las ecuaciones de equilibrio absoluto, nos proveen solo 6 ecuaciones, por lo que, las restantes ecuaciones se deben referir a ecuaciones de equilibrio de sumatoria de momentos de uno de los cuerpos respecto de la rótula que los vincula. Como no se pueden transmitir momentos a través de las rótulas, la sumatoria de estos momentos deberá ser nula. En consecuencia, las ecuaciones de equilibrio relativo se expresan,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Mom}_{xx-\omega_1}^{r_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{yy-\omega_1}^{r_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{zz-\omega_1}^{r_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{xx-\omega_2}^{r_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{yy-\omega_2}^{r_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{zz-\omega_2}^{r_{1,2}} = 0 \end{array} \right.$$

Grados de libertad (GL) de los cuerpos vinculados

Para determinar los grados de libertad de un conjunto de cuerpos vinculados, sabiendo que un cuerpo posee 6 grados de libertad, utilizaremos una expresión análoga a cuando estudiamos la determinación de **GL** de cadena cinemática de chapas. La expresión utilizada (7) nos permitía determinar los grados de libertad de una cadena cinemática de chapas, pero,

siendo que cuando vinculamos chapas, cada articulación es equivalente a un apoyo de 2^º especie, en el caso de cuerpos, no es posible generalizar, pues debemos tener en cuenta la forma de vinculación entre los cuerpos, que nos determina el valor I. Pero, la expresión para determinar GL de los cuerpos vinculados es,

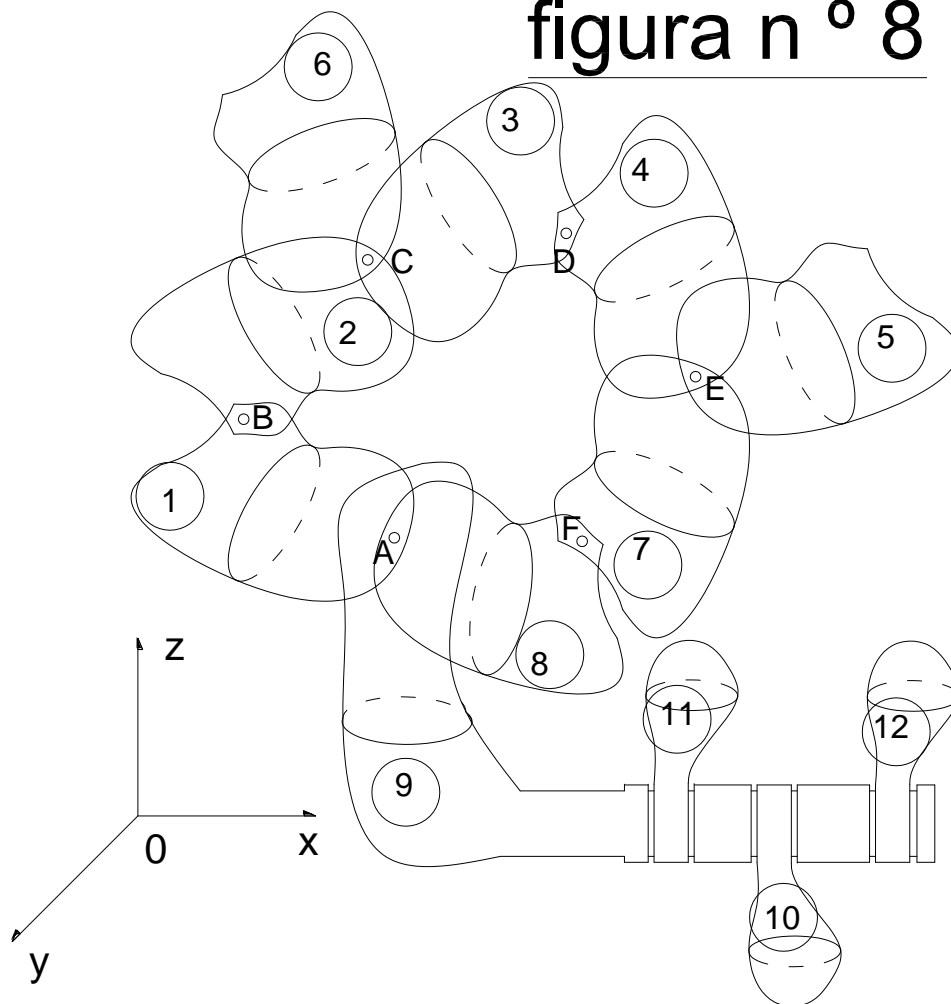
$$(3) \quad GL = 6.n - \sum(I.r - I)$$

Donde:

- * **n**: número de cuerpos vinculados;
- * **I**: grados de libertad restringidos por la articulación;
- * **r**: número de cuerpos concurrentes a cada articulación

Ejemplificaremos con los cuerpos vinculados de la figura n^º 8.

figura n ° 8



En la figura n ° 8 muestra un conjunto de 12 cuerpos vinculados con rótulas en **A, B, C, D, E, y F**. Cada rótula restringe 3 grados de libertad, mientras que los cuerpos **9, 10, 11, y 12** tienen una vinculación de 5 ° especie. Considerando que a las rótulas mencionadas concurren los cuerpos:

- (4) $\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \text{cuerpos } 1, 8, \text{ y } 9 \\ B \rightarrow \text{cuerpos } 1, \text{ y } 2 \\ C \rightarrow \text{cuerpos } 2, 3, \text{ y } 6 \\ D \rightarrow \text{cuerpos } 3, \text{ y } 4 \\ E \rightarrow \text{cuerpos } 4, 5, \text{ y } 7 \\ F \rightarrow \text{cuerpos } 7, \text{ y } 8 \end{array} \right.$

De donde, los grados de libertad del conjunto serán,

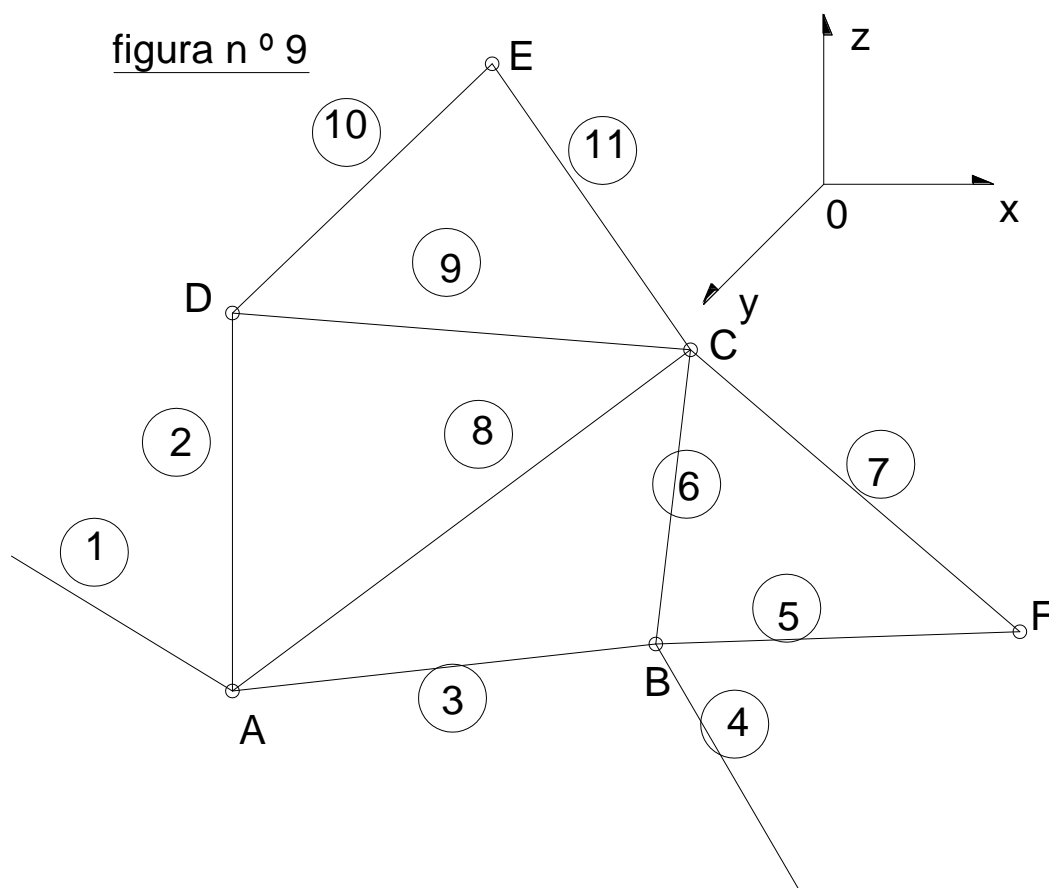
$$(5) \quad GL = 6.12 - (3.4 - 3 + 3.2 - 3 + 3.3 - 3 + 3.2 - 3 + 3.3 - 3 + 3.2 - 3 + 5.4 - 5) = 30$$

Grados de libertad de barras vinculadas

Como hemos estudiado, una barra posee 5 grados de libertad, por consiguiente, para determinar los grados de libertad de un sistema de barras, la expresión (3), queda expresada por,

$$(6) \quad GL = 5.n - \sum(I.r - I)$$

Como ejemplo, determinaremos los grados de libertad del siguiente sistema de chapas de la figura n° 9.



Considerando, de la figura n° 9, las barras concurrentes a las articulaciones,

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} A: \rightarrow 4 \text{ barras :1, 2, 3, y 8} \\ B: \rightarrow 4 \text{ barras :3, 4, 5, y 6} \\ C: \rightarrow 5 \text{ barras :6, 7, 8, 9, y 11} \\ D: \rightarrow 3 \text{ barras :2, 9, y 10} \\ E: \rightarrow 2 \text{ barras :10, y 11} \\ F: \rightarrow 2 \text{ barras :5, y 7} \end{array} \right.$$

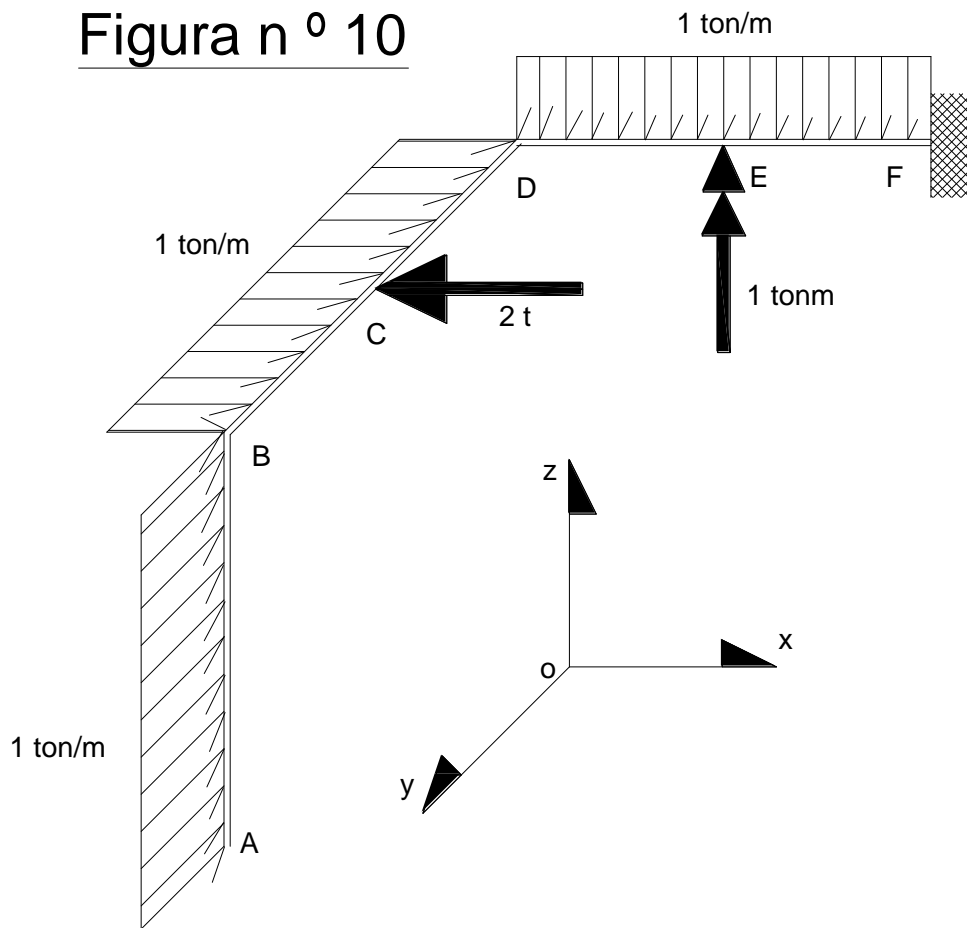
De aquí, los grados de libertad del sistema son:

$$(8) \quad GL = 5 \cdot 11 - (3 \cdot 4 - 3 + 3 \cdot 4 - 3 + 3 \cdot 5 - 3 + 3 \cdot 3 - 3 + 3 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot 2 - 3) = 13$$

A continuación, ejemplificaremos con 2 problemas de aplicación, para clarificar conceptos respecto a la determinación de las reacciones de vínculo en cuerpos y sistemas de cuerpos.

PROBLEMA DE APLICACIÓN N ° 1: DETERMINAR LAS REACCIONES DE VÍNCULO, Y CONSTRUIR LOS DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS CORRESPONDIENTE A LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA N ° 10.

Figura n^o 10



datos

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = 1m$$

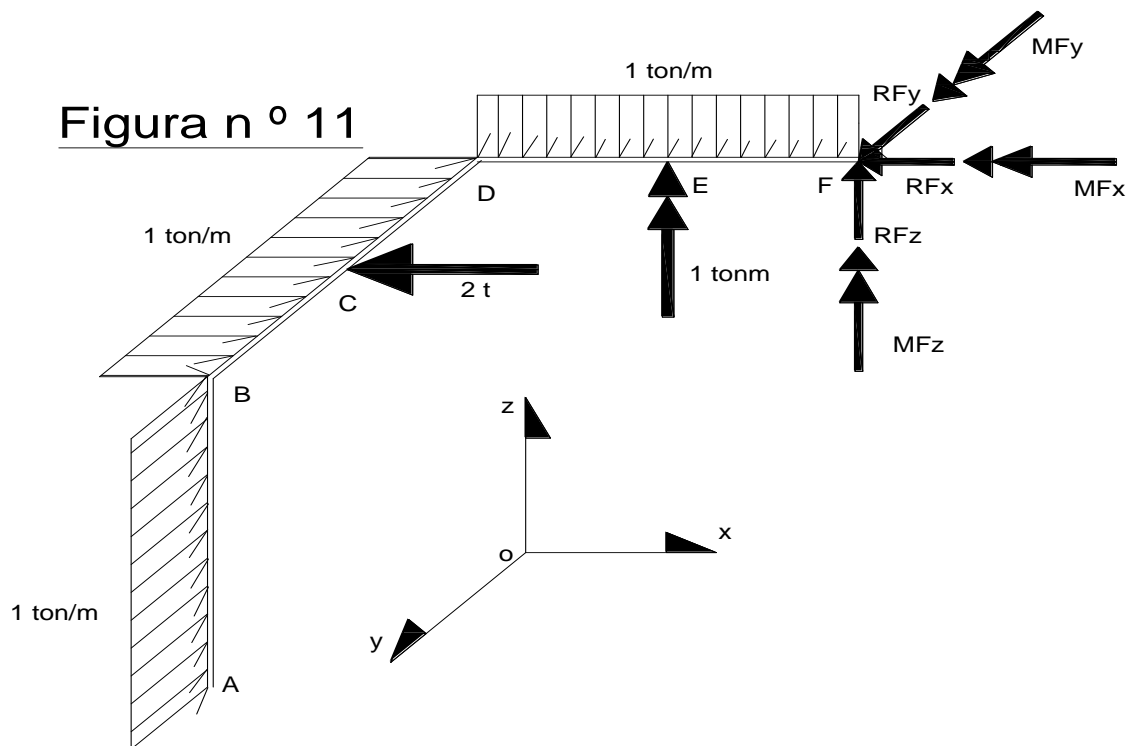
Resolución

1 o) Análisis cinemático

Por tratarse de una pieza espacial, la misma posee 6 grados de libertad. Al estar vinculada la misma a un empotramiento espacial, no existirá posibilidad de desplazamiento alguno en ninguno de sus puntos, por consiguiente, concluimos este punto afirmando que el sistema es "cinemáticamente invariable".

2 o) Diagrama de sólido libre

En el mismo, colocamos en evidencia las reacciones de vínculo del empotramiento, reemplazando el mismo por las fuerzas y momentos incógnitos correspondientes, asignándoles las direcciones de los ejes coordenados, y sentidos arbitrarios. En la siguiente figura n ° 11, mostramos esta situación,



3 °) Estudio del equilibrio, Determinación de las reacciones de vínculo externo.

A continuación, planteamos las ecuaciones de equilibrio absoluto con tres ecuaciones de proyecciones de componentes de fuerzas y tres ecuaciones de momentos al rededor de los ejes coordenados, considerando la terna en el baricentro de la sección **F**.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow -R_{F-x} + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m - 2t = 0 \rightarrow R_{F-x} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow R_{F-y} - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m = 0 \rightarrow R_{F-y} = 1t \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow R_{F-z} - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m = 0 \rightarrow R_{F-z} = 2t \\ \sum \text{Mom}_{xx}^F = 0 \rightarrow -M_{F-x} + 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 0,5m = 0 \rightarrow M_{F-x} = 0,5tm \\ \sum \text{Mom}_{yy}^F = 0 \rightarrow M_{F-y} + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m = 0 \rightarrow M_{F-y} = -2tm \text{ sentido opuesto } \uparrow \\ \sum \text{Mom}_{zz}^F = 0 \rightarrow M_{F-z} + 1tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 2m = 0 \rightarrow M_{F-z} = 1tm \end{array} \right.$$

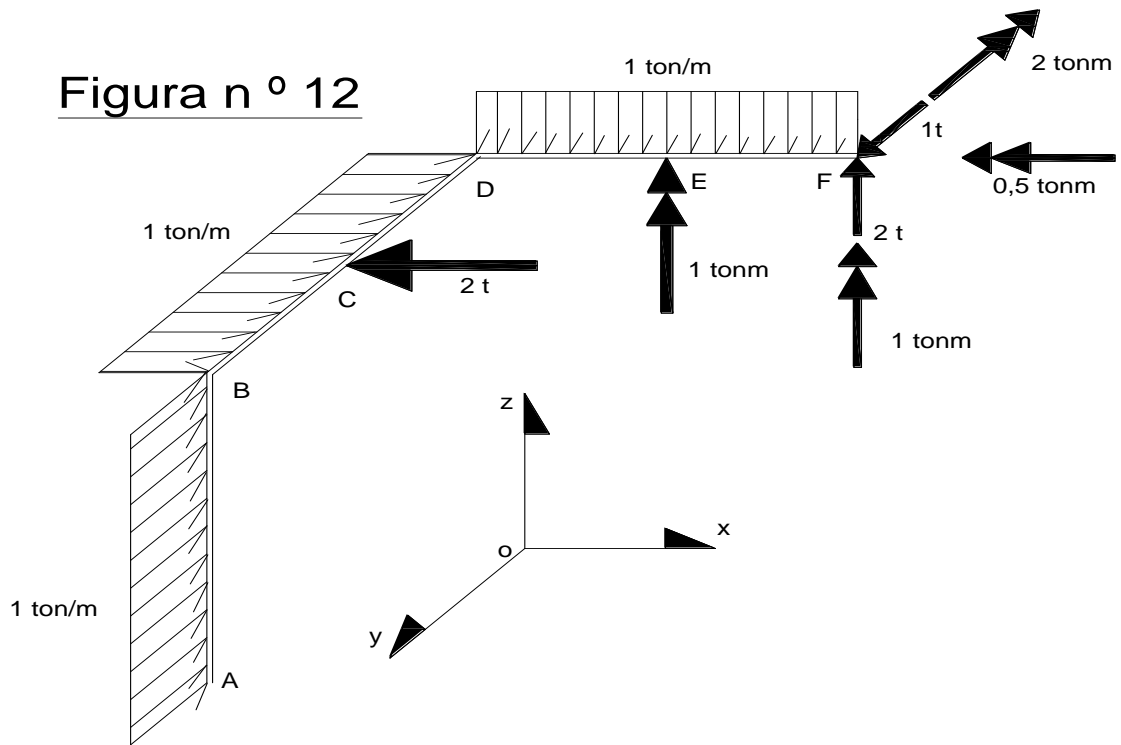
4 º) Verificación de los resultados

Mediante las ecuaciones de equilibrio absoluto, realizamos la comprobación de los valores obtenidos en las reacciones de vínculo.

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow 0 + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m - 2t = 0 \text{ verifica!!} \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 1t - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m = 0 \text{ verifica!!} \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow 2t - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m = 0 \text{ verifica!!} \\ \sum \text{Mom}_{xx}^A = 0 \rightarrow -1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 0,5m - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 2m + 2t \cdot 2m + 1t \cdot 1m - 0,5tm = 0 \text{ verifica!!} \\ \sum \text{Mom}_{yy}^A = 0 \rightarrow -2tm + 2t \cdot 2m - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m = 0 \text{ verifica!!} \\ \sum \text{Mom}_{zz}^A = 0 \rightarrow 1tm - 1t \cdot 2m + 1tm = 0 \text{ verifica!!} \end{array} \right.$$

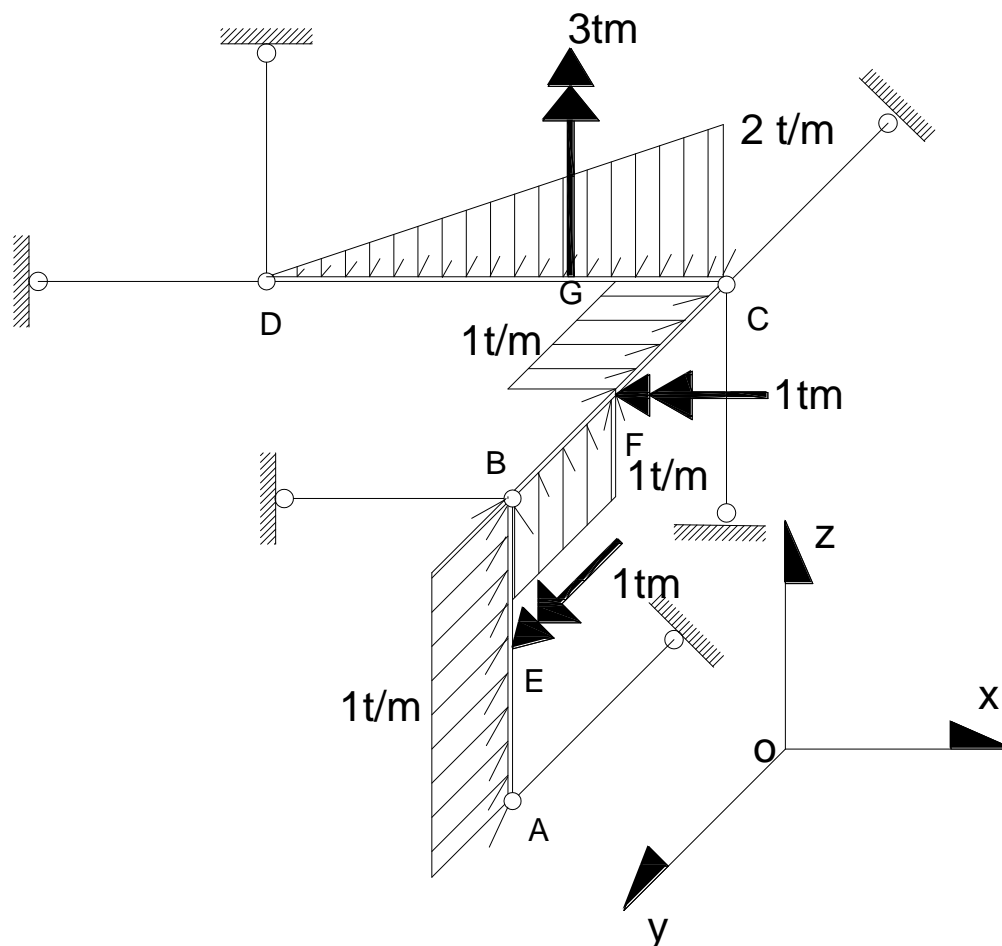
5 º) Diagrama de cuerpo libre definitivo

En la figura n º 12 mostramos las fuerzas con sus valores, direcciones y sentidos finales.



PROBLEMA DE APLICACIÓN N^o 2: DETERMINAR LAS REACCIONES DE VÍNCULO, Y CONSTRUIR LOS DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS CORRESPONDIENTE A LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA N^o 13.

figura n ° 13



$$\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BF} = \overline{FC} = \overline{CG} = 1m ; \overline{GD} = 2\overline{AE}$$

Resolución

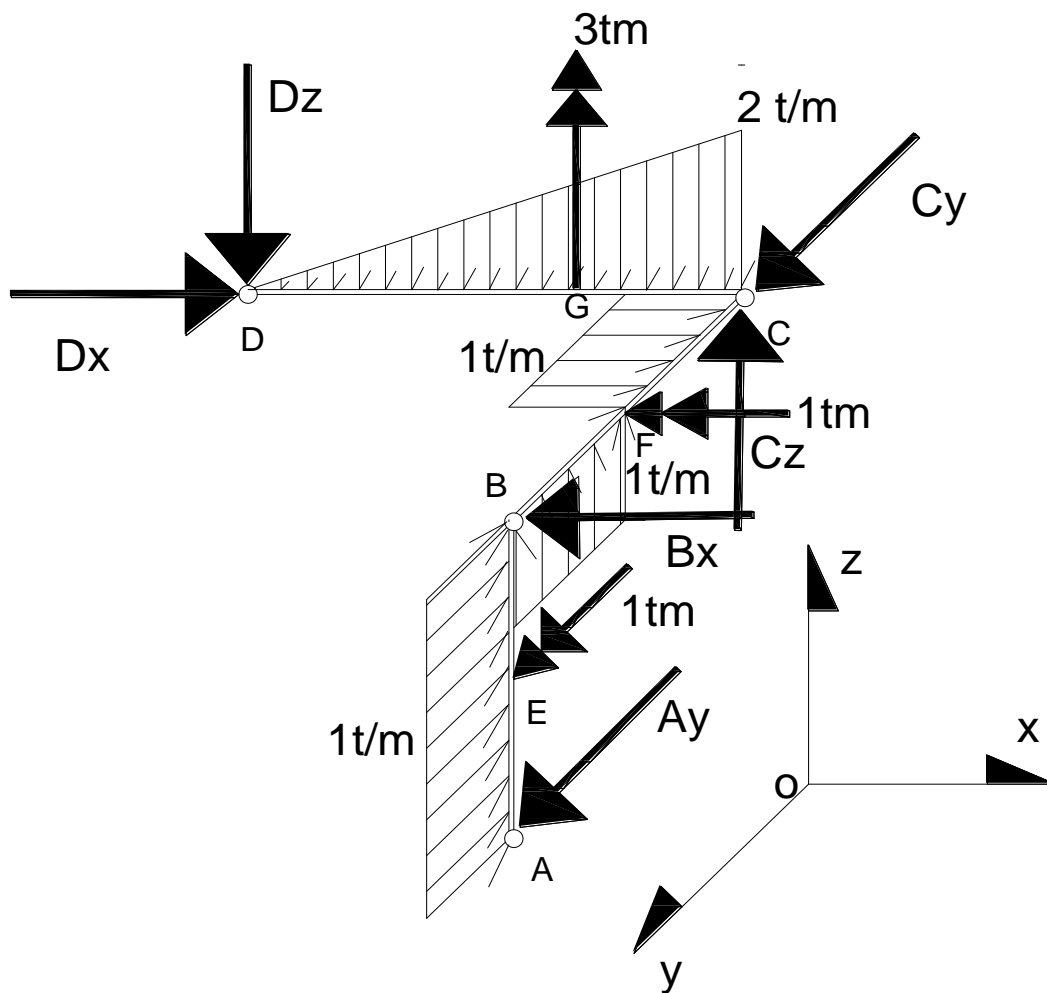
1 °) Análisis cinemático:

Tratándose de una viga quebrada, la misma posee **6 grados de libertad**, que se restringen con el empleo de **6 apoyos de primera especie o bielas**. Según se observa en la figura n ° 10, no hay más de tres bielas concurrentes al mismo punto, como el nodo **C**, con lo cual no hay vinculación aparente. No existe la posibilidad que la viga pueda girar alrededor de un eje por no concurrir más de 5 bielas al mismo eje, que es el eje **DC**. En estas condiciones, afirmamos que el sistema es **cinemáticamente invariable CI**, por consiguiente es compatible determinado, y tiene solución única.

2 °) Diagrama de sólido libre.

En este diagrama, ponemos en evidencia los vínculos, reemplazando los mismos por fuerzas incógnitas cuyos vectores representativos tienen dirección conocida y sentido desconocido, por lo que, en primera instancia se les asigna sentidos arbitrarios, esta situación se indica en la figura n ° 14.

figura n ° 14



3 °) Análisis del equilibrio.

Se plantean 6 ecuaciones de equilibrio absoluto, de las cuales 3 ecuaciones de proyecciones respecto de los ejes coordenados, y 3 ecuaciones de sumatorias de momentos respecto de los ejes coordenados considerando una terna de referencia ubicada en el nodo A.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow D_x - B_x + 1 \frac{t}{m} \cdot 1m = 0 \rightarrow B_x - D_x = 1t \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow A_y + C_y - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m = 0 \rightarrow A_y + C_y = 2t \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -D_z + C_z - 2 \frac{t}{m} \cdot \frac{3m}{2} + 1 \frac{t}{m} \cdot 1m = 0 \rightarrow C_z - D_z = 2t \end{array} \right.$$

Mientras que las ecuaciones de sumatorias de momentos respecto de los ejes coordenados, quedan,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Mom}_{xx} = 0 \rightarrow -1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m - 1tm + 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 0,5m - 3t \cdot 2m + C_y \cdot 2m + C_z \cdot 2m - D_z \cdot 2m = 0 \rightarrow C_y + C_z - D_z = 4,25t \\ \sum \text{Mom}_{yy} = 0 \rightarrow B_x \cdot 2m + D_z \cdot 3m - D_x \cdot 2m + 1tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 2m + 3t \cdot 1m = 0 \\ B_x + \frac{3}{2} D_z - D_x = -1t \\ \sum \text{Mom}_{zz} = 0 \rightarrow 3tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 1,5m - D_x \cdot 2m = 0 \rightarrow D_x = \frac{3}{4}t \end{array} \right.$$

De los sistemas (1) y (2), surgen los siguientes valores de reacciones de vínculo:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} A_y = -\frac{1}{4}t \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado}; B_x = \frac{7}{4}t; C_y = \frac{9}{4}t; C_z = \frac{2}{3}t \\ D_x = \frac{3}{4}t \text{ (ya determinado)}; D_z = -\frac{4}{3}t \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado} \end{array} \right.$$

4 º) Verificación de los resultados obtenidos

En el siguiente paso, procedemos a verificar los valores de las reacciones obtenidas.

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow \frac{3}{4}t + 1t - \frac{7}{4}t = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow \frac{9}{4}t - 2t - \frac{1}{4}t = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow \frac{4}{3}t - 2t + \frac{2}{3}t = 0 \text{ verifica la igualdad} \end{array} \right.$$

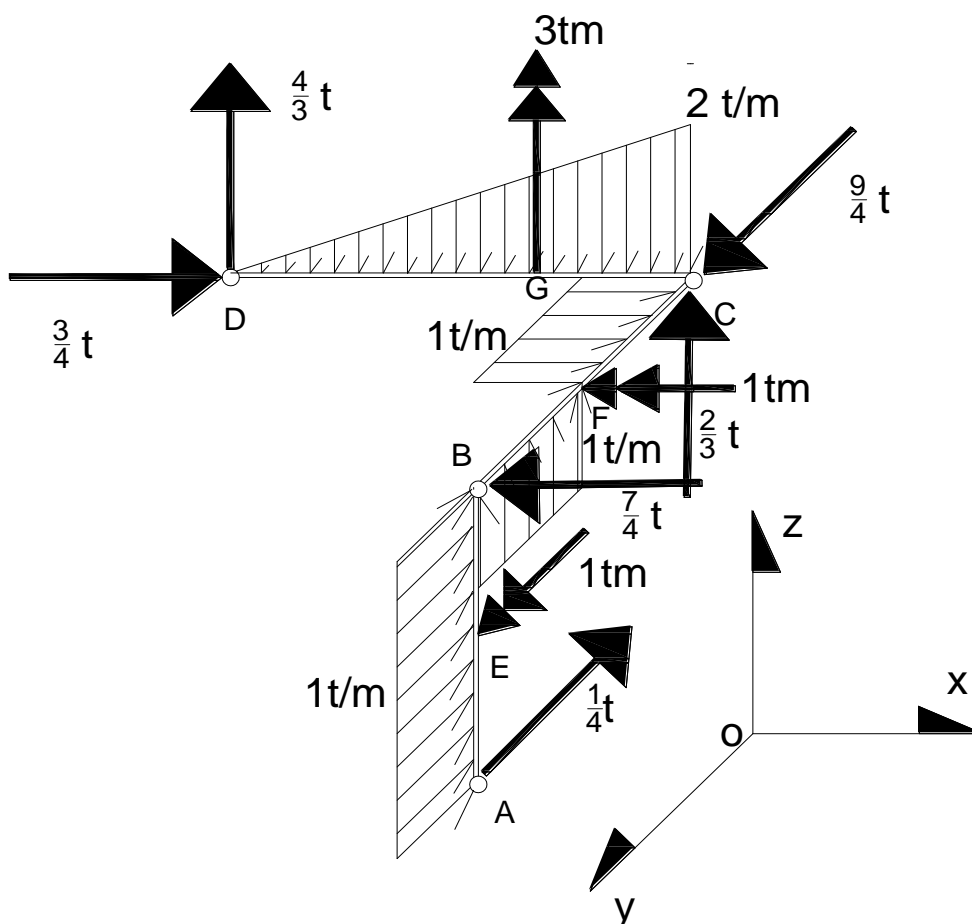
Para la verificación de las ecuaciones de momentos, ubicamos la terna de referencia en **A**.

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{xx}^A = 0 \rightarrow -1tm - 1\frac{t}{m} \cdot \frac{3}{2}m + 1\frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m + \frac{1}{4}t \cdot 2m = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum Mom_{yy}^A = 0 \rightarrow 1tm + 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 3m - 3t \cdot 2m + \frac{2}{3}t \cdot 3m = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum Mom_{zz}^A = 0 \rightarrow 3tm + 1\frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 3m + 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}t \cdot 3m - \frac{7}{4}t \cdot 2m - \frac{9}{4}t \cdot 3m = 0 \\ \text{verificada esta última igualdad, confirmamos las reacciones anteriores} \end{array} \right.$$

5 º) Diagrama de sólido libre definitivo

En la figura n º 15 mostramos los valores definitivos de las fuerzas, junto con direcciones y sentidos.

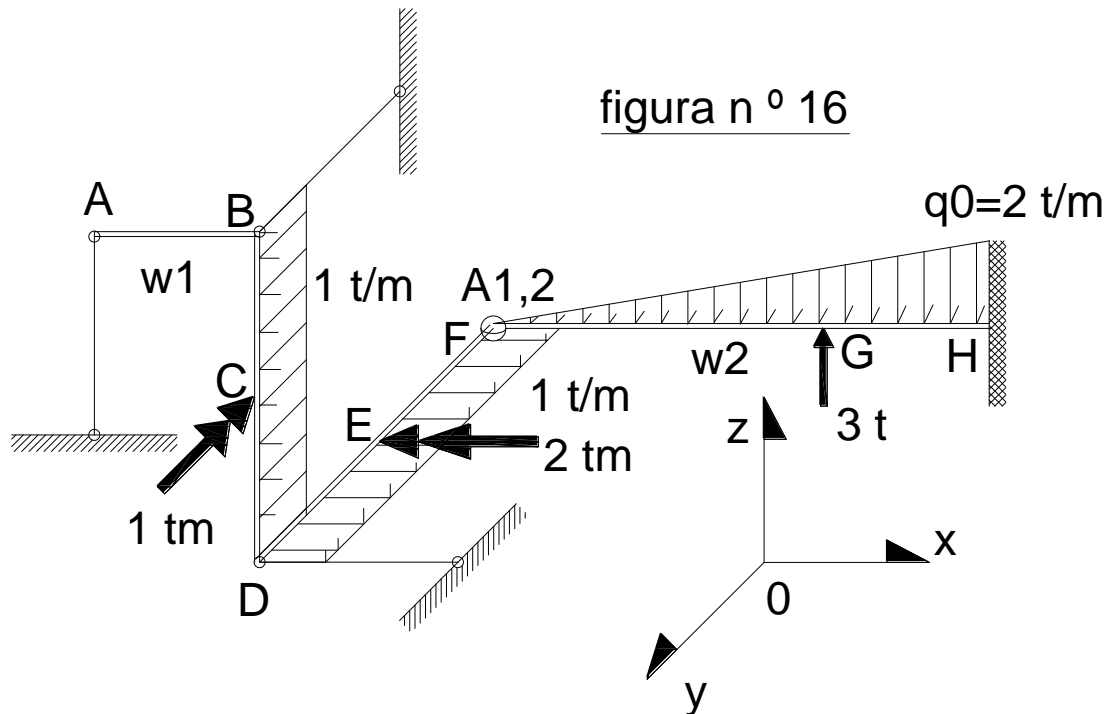
figura n^o 15



PROBLEMA DE APLICACIÓN N^o 3: Dos cuerpos ω_1 y ω_2 se encuentran vinculados por la rótula $A_{1,2}$ como lo indica la figura n^o 16. El cuerpo ω_1 se encuentra vinculado a tierra 3 bielas en **A**, **B** y **D**, mientras que el cuerpo ω_2 posee un empotramiento espacial en **H**. Para las sollicitaciones indicadas en la cadena, se pide realizar:

- 1^o) el análisis cinemático del conjunto;
- 2^o) el diagrama de cuerpo libre;
- 3^o) el estudio del equilibrio, determinando los valores de las reacciones de equilibrio externo e interno;

4 º) los diagramas de esfuerzos característicos en todos sus tramos.



datos:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{GH} = 1m ; \quad \overline{FG} = 2\overline{AB}$$

Resolución

1 º) Análisis cinemático.

Al tratarse de una estructura formada por 2 cuerpos ω_1 (ABDF) y ω_2 (FH), posee los siguientes grados de libertad:

$$GL = 2.6 - (3.2 - 3) = 9$$

Debido a que los mismos están vinculados por una rótula $A_{1,2}$ que restringe **3** grados de libertad.

En el cuerpo ω_2 existe un empotramiento espacial que le impone 6 condiciones de vínculo al cuerpo, restringiéndole 6 grados de libertad, en consecuencia el mismo está fijo a tierra, restando restringir **3** grados de libertad al sistema, para lo cual se deben colocar **3** condiciones de vínculo en el cuerpo ω_1 , dada la imposibilidad de colocar vínculos en el cuerpo ω_2 , pues los mismos resultarán superfluos.

Al ser la articulación $A_{1,2}$ un punto fijo de ω_1 , podemos considerar que **3** bielas no coplanarias, en consecuencia, no deberán concurrir más de **5** bielas a la misma recta.

De la observación de la figura n^o 1, concurren **5** bielas a la recta definida por $A_{1,2}$ y **D**, considerando la biela en B de dirección y paralela a la recta y se une en el impropio a dicha recta, es decir, que se cumple el requisito.

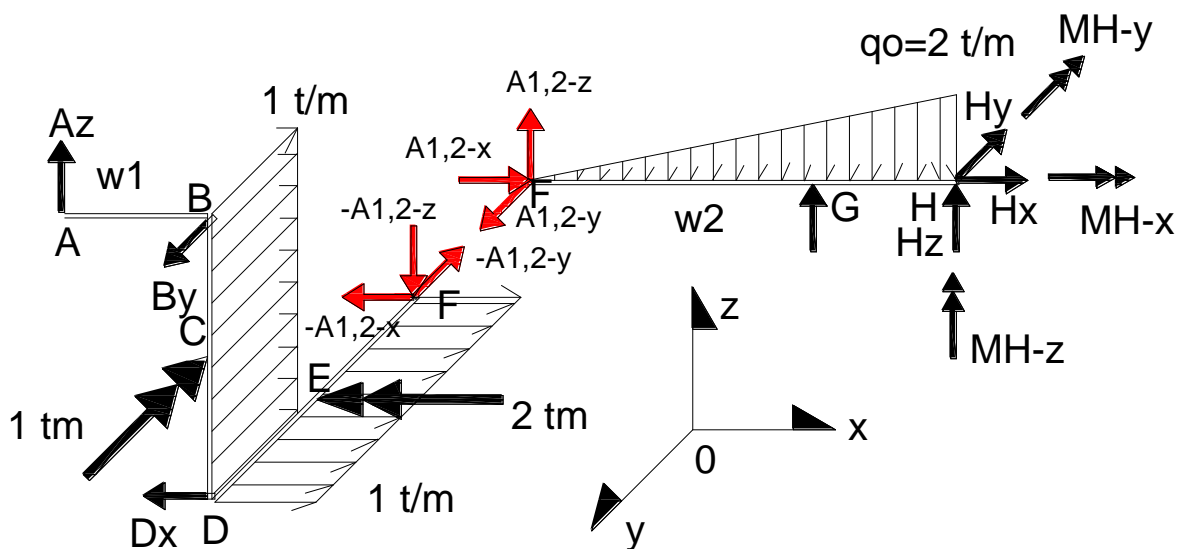
Además, las bielas agregadas no son coplanarias entre sí más de **2** de ellas.

Por lo expresado en el análisis efectuado, concluimos que el sistema es cinemáticamente invariable **CI**, y continuamos con el diagrama de cuerpo libre.

2^o) Diagrama de cuerpo libre.

Para esto, reemplazamos los vínculos externos e internos por vectores fuerzas y vectores momentos desconocidos en la estructura de la figura n^o 16, asignándoles arbitrariamente el sentido de los mismos, como lo indica la figura n^o 17.

figura n ° 17



3 °) Estudio del equilibrio.

Comenzamos planteando las ecuaciones de equilibrio absoluto, para lo cual ubicamos la terna de referencia en el nodo H.

Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio absoluto.

$$(1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow H_x - D_x + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m = 0 \rightarrow D_x - H_x = 2t \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow B_y - H_y - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m = 0 \rightarrow B_y - H_y = 2t \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow A_z + H_z - 2 \frac{t}{m} \cdot 3m \cdot \frac{1}{2} + 3t = 0 \rightarrow A_z + H_z = 0 \end{cases}$$

En cuanto a las ecuaciones de sumatoria de proyecciones de momentos, se tiene,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow M_{H-x} - 2tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m + B_y \cdot 2m - A_z \cdot 2m = 0 \\ 2m \cdot B_y - 2m \cdot A_z + M_{H-x} = 4tm \\ \sum Mom_{yy} = 0 \rightarrow -M_{H-y} + 2 \frac{t}{m} \cdot \frac{3m}{2} \cdot 1m - 3t \cdot 1m - 1tm - A_z \cdot 4m = 0 \\ 4m \cdot A_z + M_{H-y} = -1tm \\ \sum Mom_{zz} = 0 \rightarrow M_{H-z} + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 3m + B_y \cdot 3m - D_x \cdot 2m = 0 \\ M_{H-z} + 3m \cdot B_y - 2m \cdot D_x = 4tm \end{array} \right.$$

Ecuaciones de equilibrio relativo. Consideramos tres ecuaciones de sumatorias de proyecciones de momentos del cuerpo ω_1 respecto de la articulación $A_{1,2}$.

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{xx, \omega_1}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -2tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m + B_y \cdot 2m - A_z \cdot 2m = 0 \\ B_y - A_z = 2t \\ \sum Mom_{yy, \omega_1}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -1tm - A_z \cdot 1m = 0 \rightarrow A_z = -1t \text{ sentido opuesto al asignado} \\ \sum Mom_{zz, \omega_1}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -D_x \cdot 2m + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m = 0 \rightarrow D_x = 1t \end{array} \right.$$

De los sistemas de ecuaciones (1), (2), y (3) resulta,

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} A_z = -1t \text{ sentido opuesto al asignado; } H_z = 1t \\ D_x = 1t; B_y = 1t; H_x = -1t \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado; } H_y = -1t \text{ sentido opuesto} \\ \text{al asignado; } M_{H-x} = 0; M_{H-y} = 3tm; M_{H-z} = 3tm \end{array} \right.$$

En cuanto a las reacciones de vinculo interno, determinamos las mismas por el equilibrio de cada uno de los cuerpos. Considerando el cuerpo ω_2 por sencillez de resolución, tenemos,

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \sum Proj_{xx, \omega_2} = 0 \rightarrow A_{1,2-x} - 1t = 0; A_{1,2-x} = 1t \\ \sum Proj_{yy, \omega_2} = 0 \rightarrow A_{1,2-y} + 1t = 0; A_{1,2-y} = -1t \text{ sentido opuesto al asignado} \\ \sum Proj_{zz, \omega_2} = 0 \rightarrow A_{1,2-z} + 3t - 2 \frac{t}{m} \cdot 3m \cdot \frac{1}{2} + 1t = 0; A_{1,2-z} = -1t \text{ sentido opuesto} \end{array} \right.$$

Antes de continuar la resolución, es conveniente realizar una verificación del equilibrio, para lo cual, ubicamos la terna de referencia en la articulación $A_{1,2}$.

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{xx} = 0 \rightarrow 1 \frac{t}{m} \cdot 2m - 1t - 1t = 0 \rightarrow \text{verifica igualdad} \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow -1 \frac{t}{m} \cdot 2m + 1t + 1t = 0 \rightarrow \text{verifica igualdad} \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -1t + 3t - 2 \frac{t}{m} \cdot 3m \cdot \frac{1}{2} + 1t = 0 \rightarrow \text{verifica igualdad} \\ \sum \text{Mom}_{xx-A_{1,2}} = 0 \rightarrow -2tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m + 1t \cdot 2m + 1t \cdot 2m = 0 \rightarrow \text{verifica igualdad} \\ \sum \text{Mom}_{yy-A_{1,2}} = 0 \rightarrow -3tm - 1tm + 1t \cdot 1m + 1t \cdot 3m = 0 \rightarrow \text{verifica igualdad} \\ \sum \text{Mom}_{zz-A_{1,2}} = 0 \rightarrow 3tm + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m - 1t \cdot 2m - 1t \cdot 3m = 0 \rightarrow \text{verifica igualdad} \end{array} \right.$$

Diagrama final de cuerpo libre. El mismo se obtiene reemplazando los valores obtenidos en (4) y (5) en la figura n° 17, obteniéndose la figura n° 18.

figura n^o 18

