

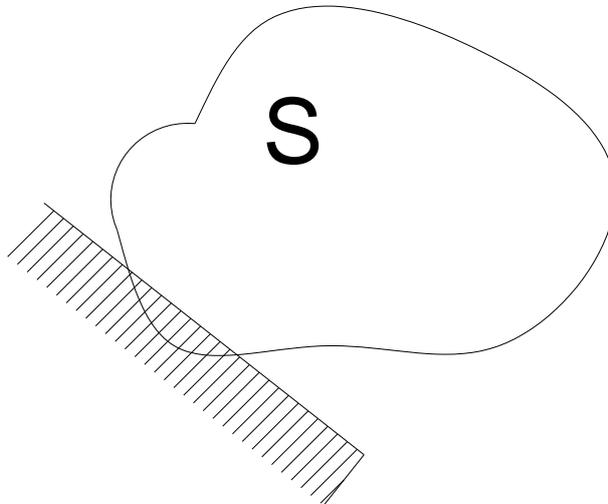
## CADENAS CINEMÁTICAS DE CHAPAS

### CADENAS CINEMÁTICAS ABIERTAS

#### Cadena cinemática de 2 chapas

En la figura n ° 1 se considera una chapa S empotrada, con lo cual la misma tiene restringidos sus tres grados de libertad, permaneciendo CI.

figura n ° 1



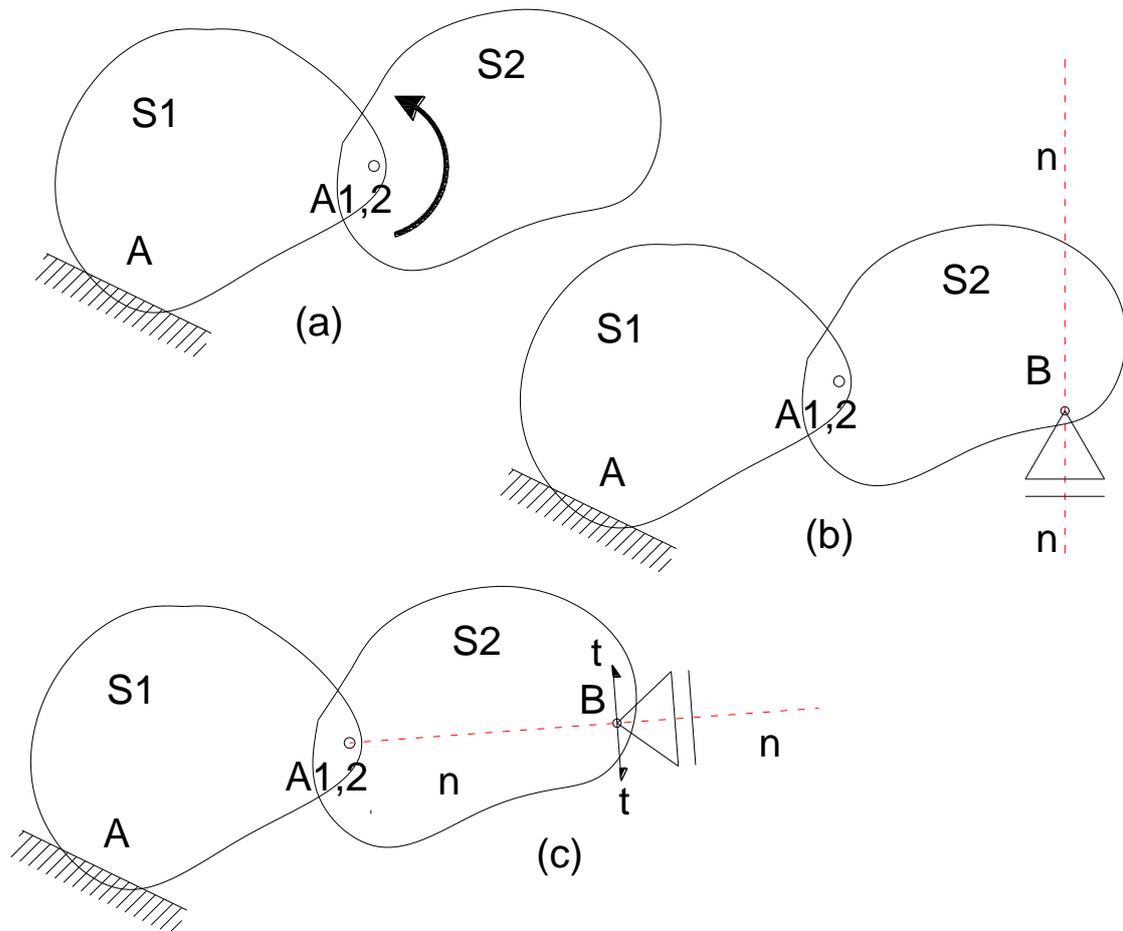
Si ahora articulamos una segunda chapa  $S_2$ , llamando la anterior  $S_1$ , en un punto  $A_{1,2}$  como lo indica la figura n ° 2(a), observamos, que la única posibilidad de movimiento que tiene la chapa  $S_2$  es un giro alrededor de la articulación. Esto indica que la cantidad de grados de libertad de una cadena cinemática de 2 chapas se reduce a 4. En este caso, colocando un vínculo de

1° especie convenientemente ubicado se restringe dicho grado de libertad, y la cadena se transforma en un sistema cinemáticamente invariable, como se muestra en la figura n ° 2(b). Luego, si la normal del apoyo móvil en  $S_2$  concurre a la articulación  $A_{1,2}$ , entonces el apoyo móvil puede girar con centro en la misma describiendo arcos de circunferencia de radio  $A_{1,2} - B$  como se indica en la figura n ° 2(c), transformando la cadena en un sistema cinemáticamente variable.

*En conclusión:*

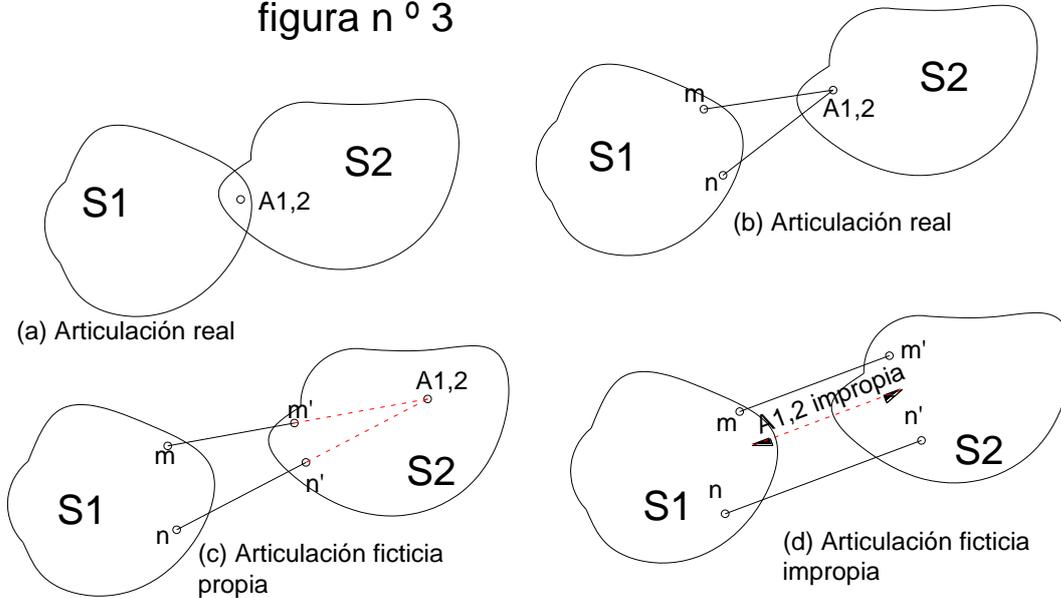
- \* a) Una articulación entre dos chapas limita la posibilidad de desplazamiento de las mismas pero no el giro de las mismas, por lo tanto, una articulación de dos o más chapas es equivalente a un vínculo de 2° especie;*
- \* b) Para que el sistema sea cinemáticamente invariable, no se pueden transmitir momentos a través de las articulaciones, con lo cual, la sumatoria de los mismos debe ser nula.*

figura n ° 2



Las Articulaciones entre chapas pueden ser reales (figuras n ° 3(a) y 3(b)) o ficticias, y entre las ficticias, las mismas pueden ser propias (figura n ° 3(c)) o impropias (figura n ° 3(d)).

figura n<sup>o</sup> 3



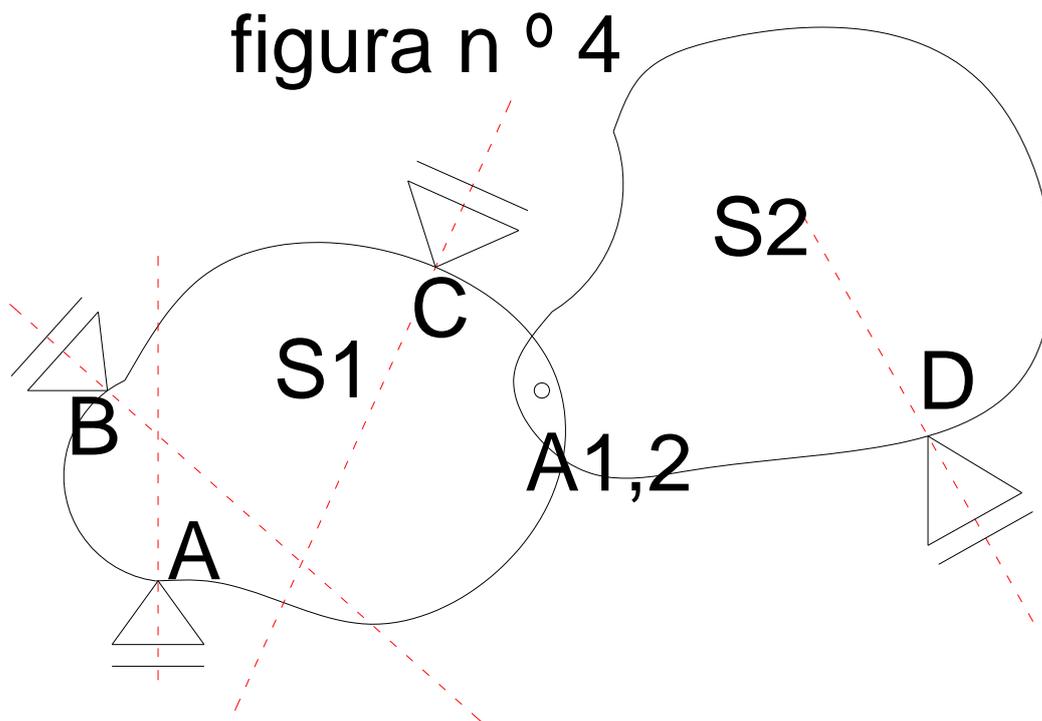
Las posibilidades de vinculación de la cadena es colocar 3 condiciones de vínculo en  $S_1$ , y una en  $S_2$ , o colocar 2 condiciones de vínculo en cada chapa considerando que no podemos colocar más de 3 condiciones de vínculo por chapa. Estas disposiciones las indicaremos,

$S_1$	$S_2$
3	1
2	2

A continuación, analizaremos las condiciones necesarias y suficientes en la distribución **3-1** para que el sistema sea cinemáticamente invariable. Se deben lograr dos puntos fijos como mínimo por cada chapa para que la misma se encuentre sea cinemáticamente invariable.

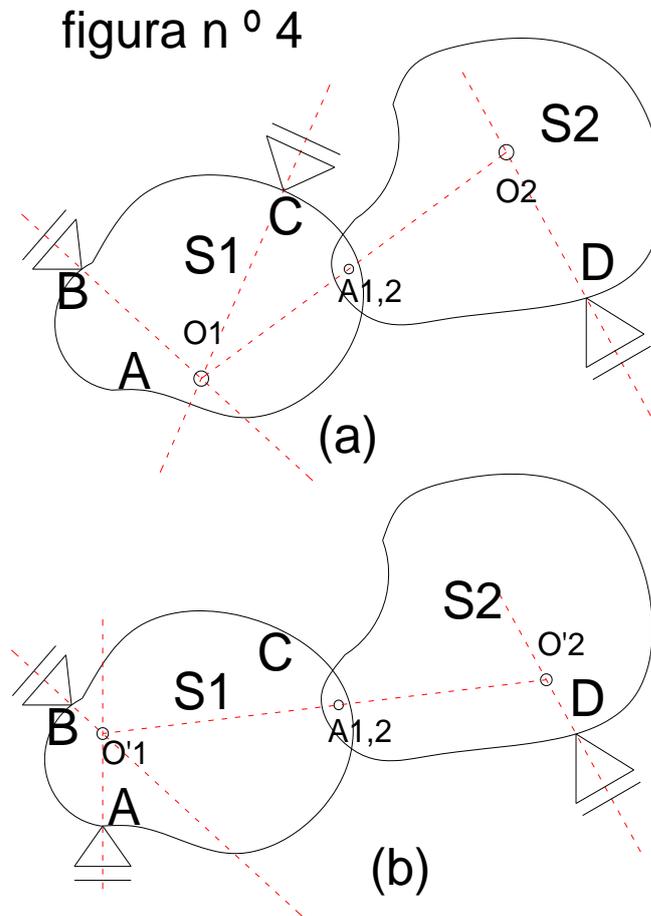
Una forma de realizar el análisis en eliminar un vínculo convenientemente elegido en una de las chapas, y considerando que las acciones entre las chapas se transmiten a través de las articulaciones, se determinan puntos fijos en las mismas, y una vez logrado esto, restablecemos el vínculo suprimido inicialmente.

Comenzaremos por analizar la cadena de chapas  $S_1$  y  $S_2$  de la figura n<sup>o</sup> 4, con tres vínculos de 1<sup>o</sup> especie en  $S_1$ , y un vínculo de 1<sup>o</sup> especie en  $S_2$  con una articulación real  $A_{1,2}$ .



En el análisis cinemático surge que en la chapa  $S_1$  ninguna de las normales a los vínculos en **A**, **B**, y **C** se interceptan en un punto común con lo que no hay vinculación aparente en esta chapa, luego, en la chapa  $S_2$ , la normal al

vínculo en D no concurre a la articulación  $A_{1,2}$ , por lo que esta chapa también es cinemáticamente invariable, entonces, la cadena es cinemáticamente invariable. En la figura n ° 5 se observan la determinación de puntos fijos en las chapas. En la chapa  $S_2$ , los puntos fijos se deben encontrar sobre la normal a D.

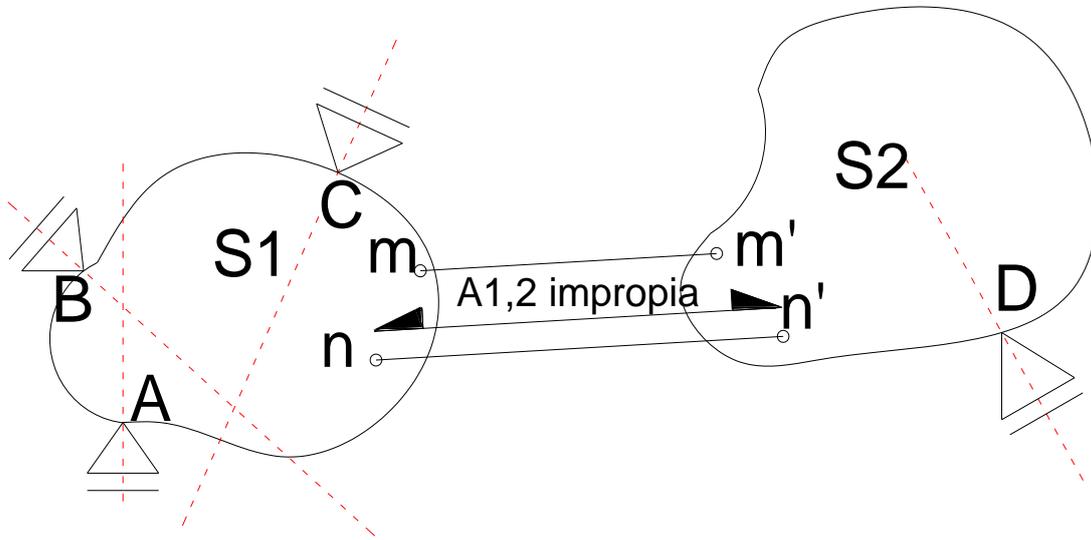


Como observamos en la figura n ° 4(a), al suprimir el apoyo móvil A el sistema se transforma en hipostático. Las normales a los apoyos **A** y **C** de  $S_1$  determina el polo  $O_1$ , desde aquí, llevamos una biela a través de la articulación  $A_{1,2}$  a la chapa  $S_2$ , pues, como hemos destacado anteriormente, las acciones de  $S_1$  a  $S_2$  se transmiten a través de la articulación común

entre ambas, hasta interceptar la normal al apoyo D en  $O_2$  obteniendo, en esta forma un punto fijo de  $S_2$ . En forma análoga al caso anterior, suprimimos ahora, el vínculo en C de  $S_1$ , dejando los vínculos en **A** y **B**. Donde se interceptan las normales de los vínculos móviles **B** y **A** se encuentra un punto fijo  $O'_1$  de  $S_1$ , y, desde este punto, llevamos una biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  a  $S_2$ , y, en su intercepción con la normal en D, obteniéndose un punto fijo de  $S_2$  en  $O'_2$ . De aquí, obtuvimos 2 puntos fijos en cada chapa, por lo que el sistema es cinemáticamente invariable siendo hipostático, entonces, retornando los vínculos suprimidos anteriormente, entonces, queda demostrado que el sistema es cinemáticamente invariable.

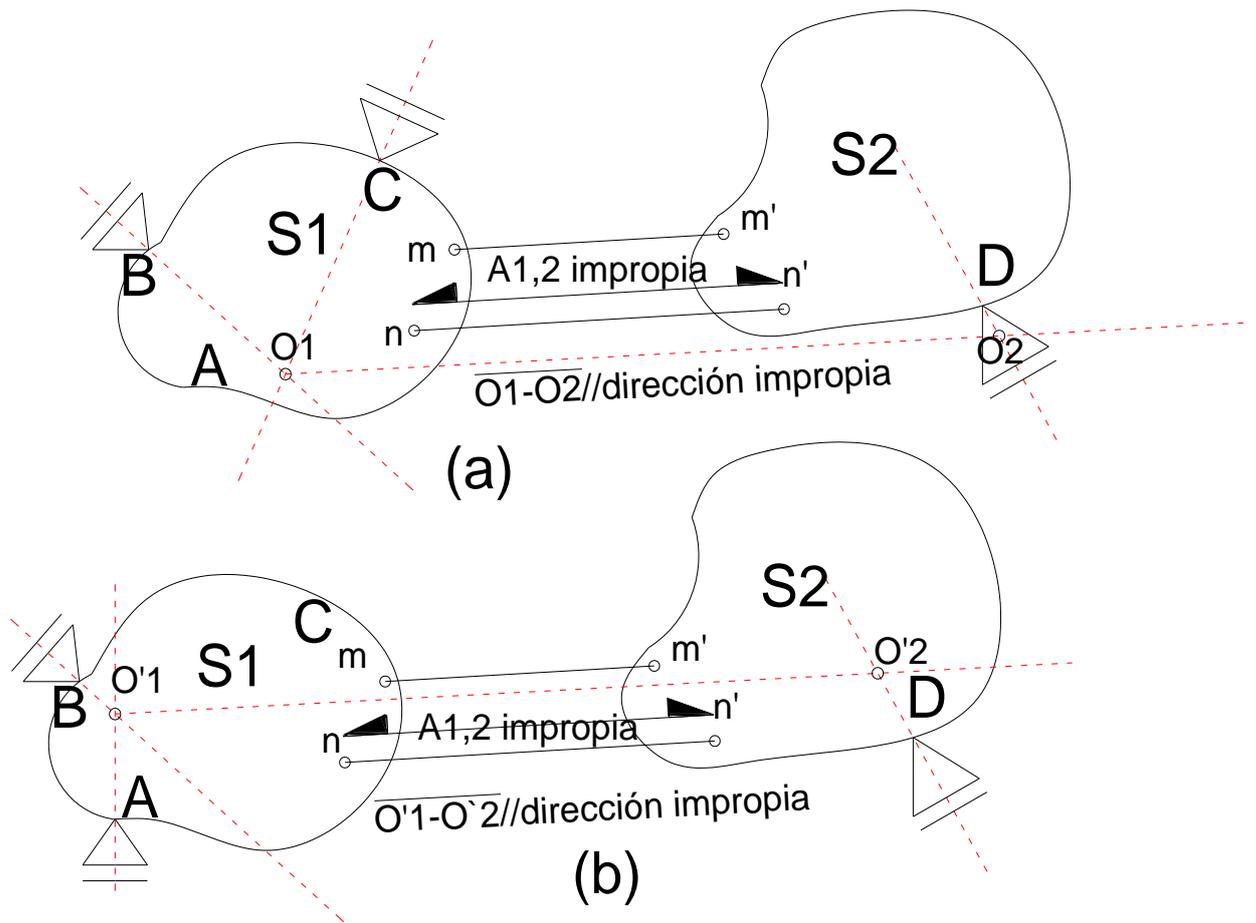
A continuación, analizamos la distribución 3-1 con articulación ficticia impropia, con las bielas  $mm'//nn'$  indicada en la figura n ° 5.

figura n ° 5



En la figura n ° 6, realizamos un análisis análogo al efectuado anteriormente.

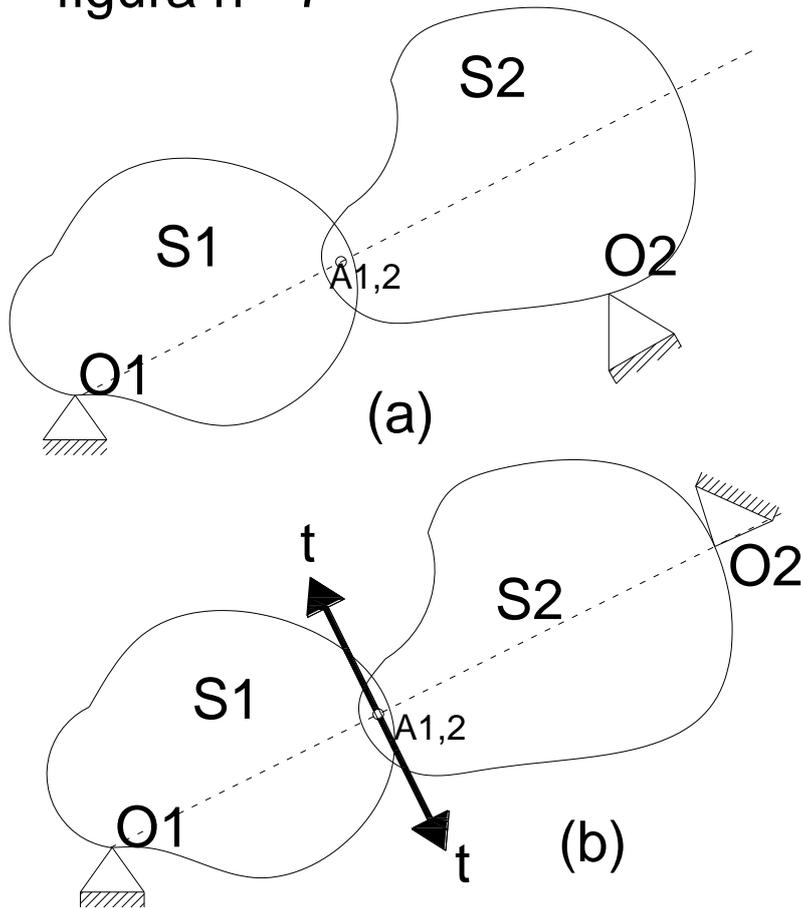
figura n ° 6



Por procedimiento análogo al realizado al caso anterior determinamos los puntos fijos  $O_1, O'_1, O_2$ , y  $O'_2$  de las chapas  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente, necesarios para mostrar la condición de cinemáticamente invariable del sistema. Cabe mencionar que las bielas para cumplir con la condición de pasar por la articulación, deberán ser paralelas a la dirección impropia..

Seguidamente, analizaremos la distribución 2-2, es decir, dos condiciones de vínculo en cada chapa. En la figura n ° 7, mostramos dos configuraciones posibles que explican cuando un sistema es cinemáticamente invariable, y cuando no lo es.

figura n ° 7

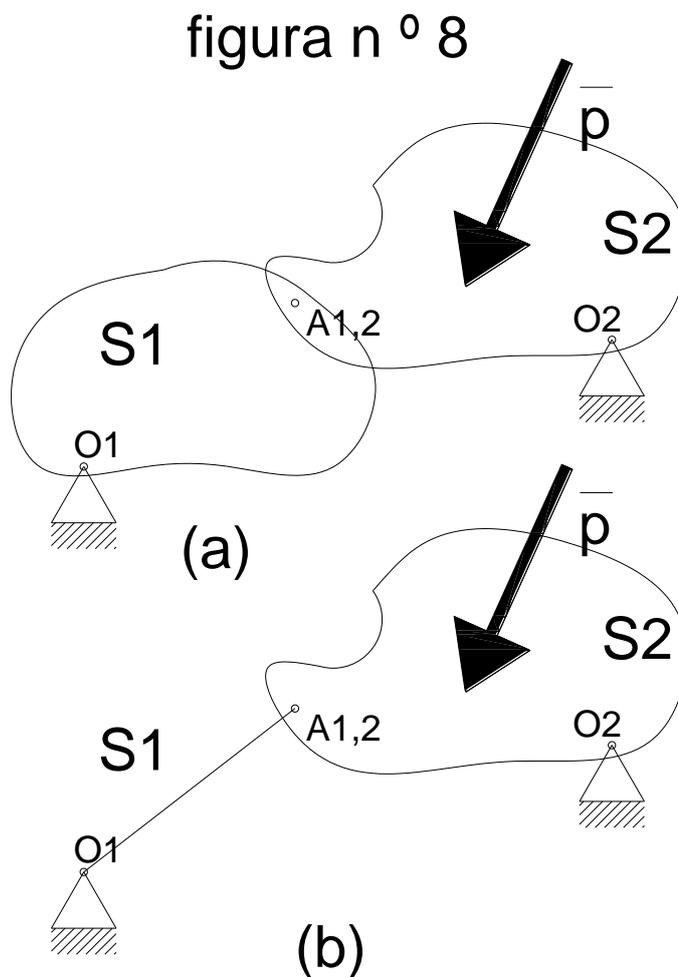


Observamos en la figura n ° 7(a) que el punto fijo  $O_1$  de  $S_1$ , la articulación  $A_{1,2}$ , y el punto fijo  $O_2$  de  $S_2$  no están alineados en una misma recta, con lo que no hay posibilidad de desplazamiento relativo entre chapas, consecuentemente, el sistema es cinemáticamente invariable, mientras que en la cadena de la figura n ° 7(b), se encuentran alineados el punto fijo  $O_1$  de  $S_1$ , la articulación  $A_{1,2}$ , y el punto fijo  $O_2$  de  $S_2$  en la recta  $\overline{O_1 A_{1,2} O_2}$ , permitiendo a la chapa  $S_1$  desplazamientos relativos en la dirección  $\mathbf{t-t}$ , resultante de giro alrededor del punto fijo  $O_1$  y radio  $\overline{O_1 A_{1,2}}$ , y, a la chapa  $S_2$  desplazamientos relativos en la dirección  $\mathbf{t-t}$ , resultante de giro alrededor del punto fijo  $O_2$  y radio  $\overline{O_2 A_{1,2}}$ , por lo que concluimos que esta cadena es cinemáticamente variable, habiendo vinculación aparente.

Entonces, "para que una cadena cinemática de dos chapas con vínculos de 2 ° especie en cada chapa sea cinemáticamente invariable, no deben estar alineados en una misma recta los puntos fijos de los apoyos con la articulación".

Una cadena cinemática de dos chapas con un vínculo de 2 ° especie en cada una de ellas y una articulación real, se denomina arco a tres articulaciones.

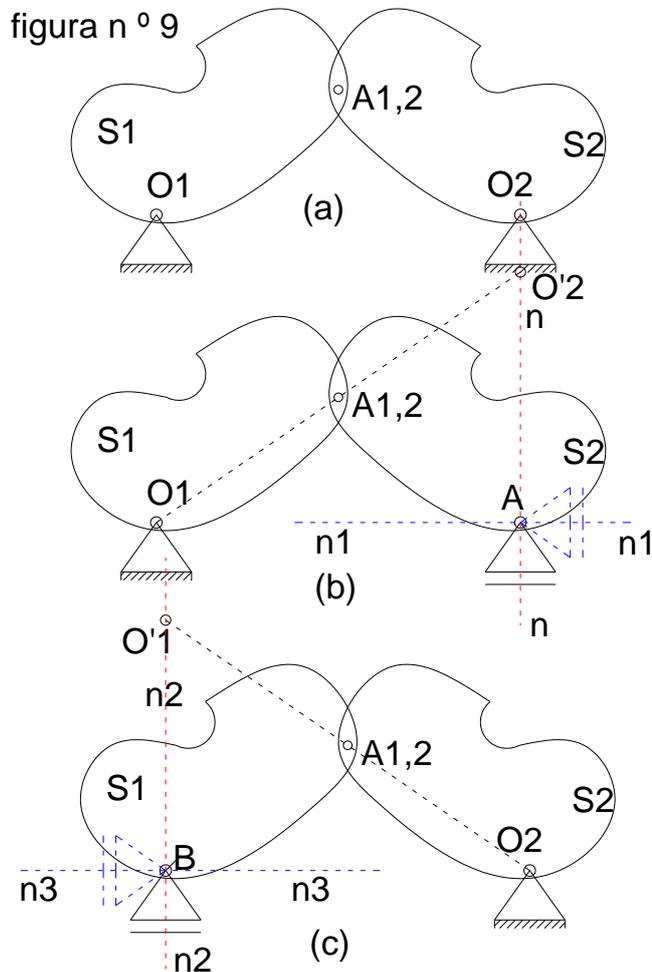
Debemos destacar en una cadena cinemática de 2 chapas, cuando una de ellas se encuentra descargada, la misma solo le transmite una biela a la chapa restante, pudiéndose considerar la cadena como una sola chapa como lo mostramos en la figura n ° 8.



En la figura n ° 8(a) observamos que de las 2 chapas, solamente  $S_2$  se

encuentra cargada, en consecuencia, la chapa  $S_1$  puede ser reemplazada por una biela  $\overline{O_1 A_{1,2}}$  como se indica en la figura n ° 8(b).

A continuación, determinaremos puntos fijos en las chapas  $S_1$  y  $S_2$  con un apoyo de 2 ° especie en cada chapa de la figura n ° 9.

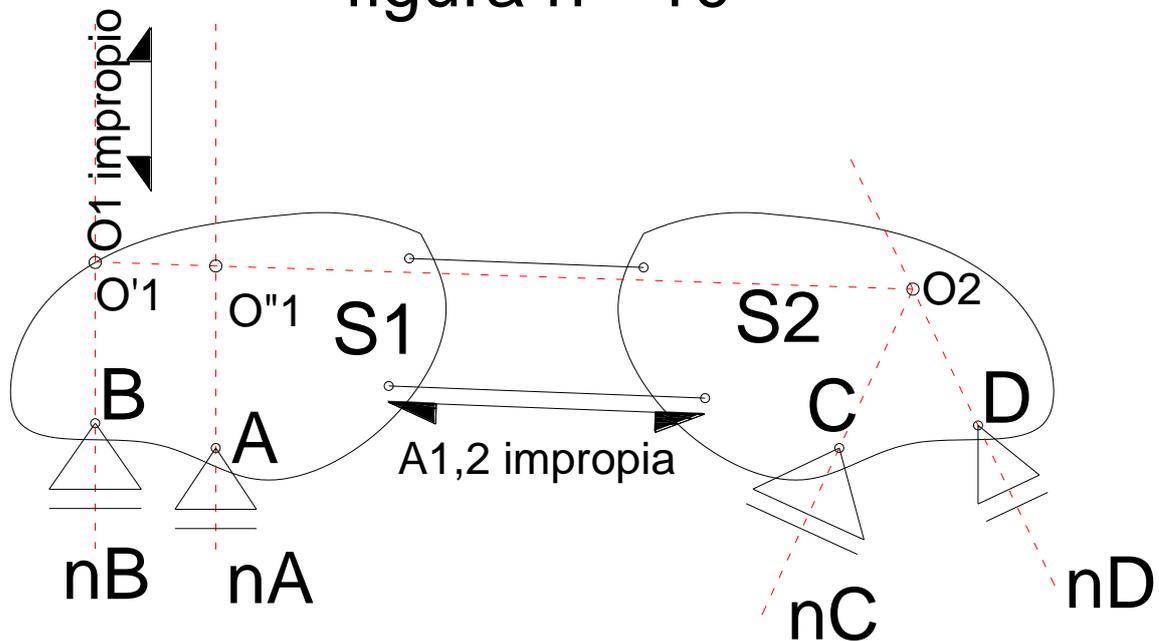


En la figura n ° 9(a) observamos la cadena cinemática con dos apoyos fijos uno en cada chapa. En la figura n ° 9(b), reemplazamos el apoyo fijo  $O_2$  por dos vínculos de 1 ° especie cuyas normales  $\mathbf{n-n}$  y  $n_1-n_1$  son perpendiculares entre si. Suprimimos uno de estos vínculos, por ejemplo aquel cuya normal es  $n_1-n_1$ , transformando la cadena en hipostática. Desde  $O_1$  de la chapa  $S_1$  llevamos una biela a la chapa  $S_2$  pasando por  $A_{1,2}$  hasta interceptar la normal

$n-n$  en  $O'_2$ , nuevo punto fijo de la chapa  $S_2$ . Ahora bien, restituimos el vínculo suprimido anteriormente, devolviéndole el punto fijo  $O_2$ , y esta chapa se encuentra fija por poseer 2 puntos fijos. Luego, como la articulación  $A_{1,2}$  pertenece ambas chapas, la misma es un punto fijo tanto de  $S_2$  como de  $S_1$ , teniendo aquí, esta última chapa otro punto fijo además de  $O_1$ , y, en consecuencia al tener 2 puntos fijos  $S_1$ , la misma se encuentra fija, y la cadena cinemática es cinemáticamente invariable. El mismo razonamiento lo podíamos realizar respecto del apoyo fijo  $O_1$  indicado en la figura n ° 9(c), reemplazando por dos vínculos de 1 ° especie de normales  $n_2-n_2$  y  $n_3-n_3$ , y suprimimos el vínculo de esta última normal, quedando el sistema hipostático con un vínculo de 1 ° especie en  $S_1$ . Llevamos desde  $O_2$  una biela a  $S_1$  pasando por  $A_{1,2}$  hasta interceptar la normal  $n_2-n_2$  en  $O'_1$ , obteniéndose así un punto fijo de  $S_1$ , y, restituyendo el vínculo suprimido, la chapa tiene ahora 2 puntos fijos, quedando la misma inmovilizada, junto con la articulación perteneciente también a  $S_2$ , quedando, en consecuencia esta última chapa con dos puntos fijos e inmovilizada. En consecuencia, la cadena cinemática es cinemáticamente invariable.

En la figura n ° 10 mostramos una cadena de distribución 2-2 con la articulación impropia  $A_{1,2} \rightarrow \infty$ , un punto fijo de  $S_1$  también impropio  $O_1 \rightarrow \infty$ .

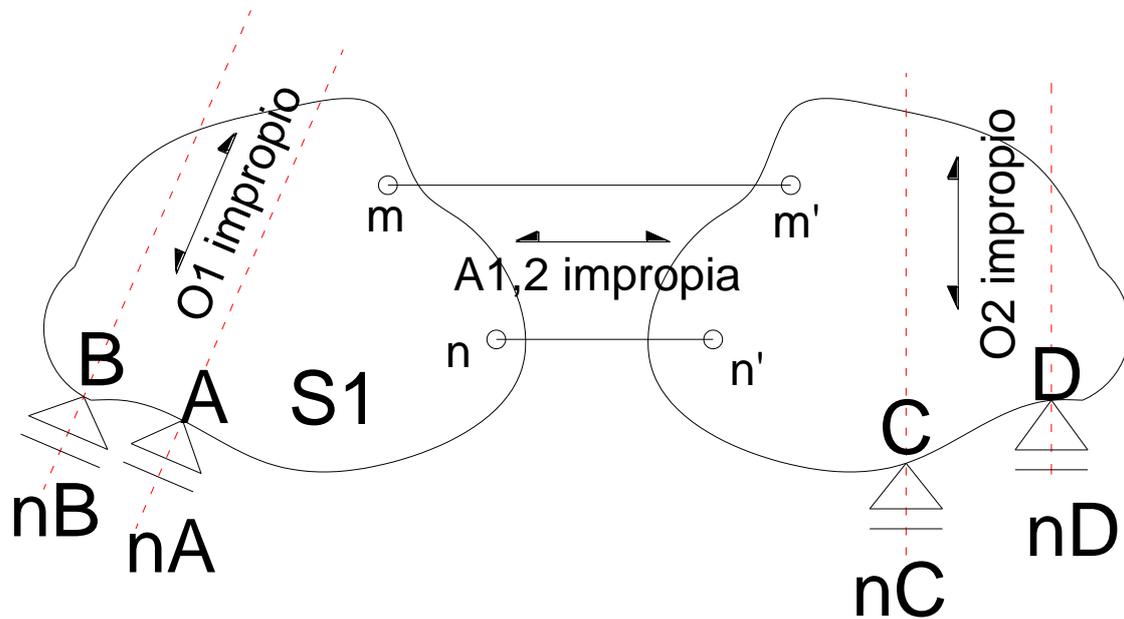
figura n ° 10



En la figura n ° 10 observamos que desde el punto fijo  $O_2$  llevamos una biela a la chapa  $S_1$ , en donde pudimos determinar los puntos fijos  $O'_1$  y  $O''_1$ , con lo cual, la chapa  $S_1$  posee 3 puntos fijos, con lo cual, la misma posee 3 puntos fijos, estando la misma inmovilizada, y, como la articulación pertenece impropia pertenece ambas chapas, con lo cual la misma es un punto fijo también de  $S_2$ . Entonces  $S_2$  tiene un mínimo de 2 puntos fijos, y en consecuencia, la misma está inmovilizada. Podemos concluir que la cadena representa un sistema cinemáticamente invariable.

En el caso que los puntos fijos sean impropios  $O_1 \rightarrow \infty$ ,  $O_2 \rightarrow \infty$  y la articulación  $A_{1,2} \rightarrow \infty$ , la cadena es cinemáticamente variable, pues 3 puntos impropios definen la recta impropia del plano (figura n ° 11)

figura n<sup>o</sup> 11



### Ecuaciones de equilibrio en cadenas cinemáticas de 2 chapas

Como hemos estudiado, estas cadenas poseen cuatro grados de libertad, pero de la estática tenemos

### Ecuaciones de equilibrio absoluto

$$(1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Mom}^c = 0 \end{cases}$$

Como podemos contemplar, son insuficientes para determinar las reacciones de vínculo, razón por la cual, debemos considerar ecuaciones complementarias. Debido a que no se pueden transmitir momentos a través de

las articulaciones, entonces, la sumatoria de momentos de cada chapa respecto de las articulaciones debe ser nula. Estas ecuaciones las llamaremos,

Ecuaciones de equilibrio relativo

$$(2) \begin{cases} \sum Mom_{S_1}^{A_{1,2}} = 0 \\ \sum Mom_{S_2}^{A_{1,2}} = 0 \end{cases}$$

La primera de las ecuaciones de (2) indica que la sumatoria de momentos de la chapa  $S_1$  respecto de la articulación  $A_{1,2}$  debe ser nula, mientras que la segunda ecuación refiere el mismo concepto respecto de la chapa  $S_2$ .

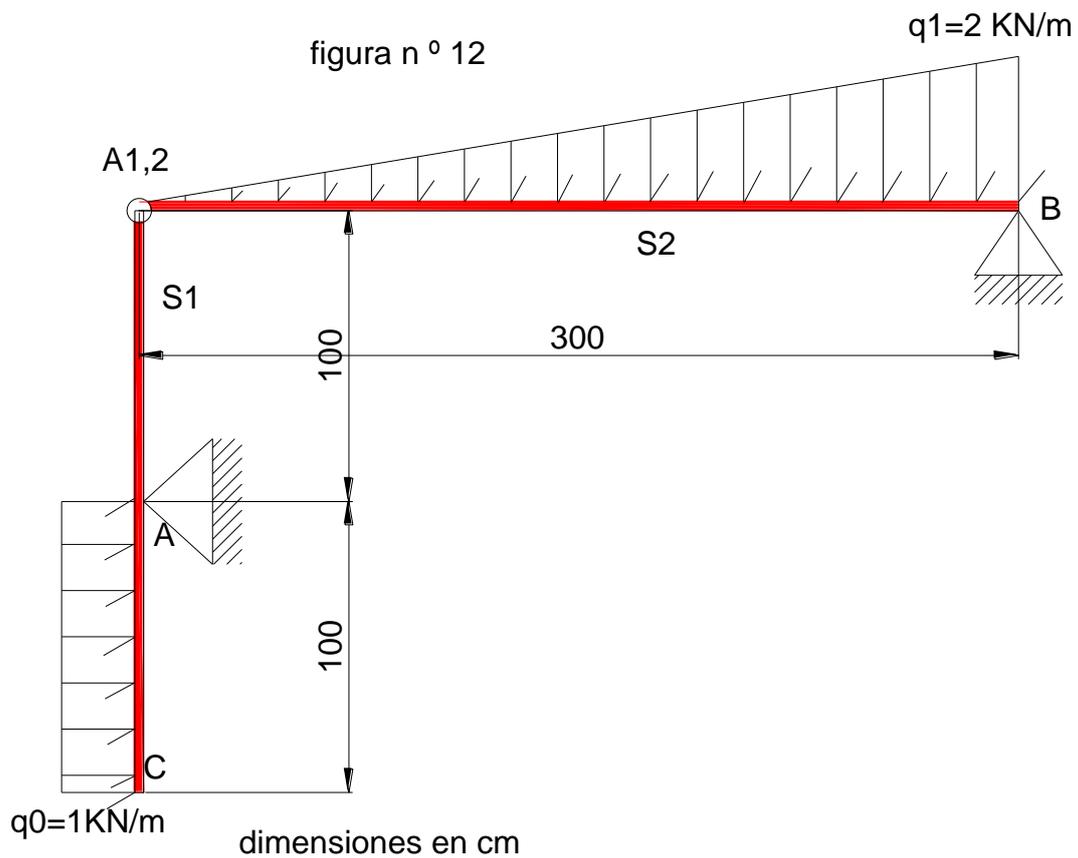
Para clarificar conceptos, graficaremos con un ejemplo.

**Problema de aplicación n ° 1:** Determinar las reacciones de vínculo externas e internas en la cadena cinemática siguiente. Se trata de un arco a tres

articulaciones con una carga uniformemente repartida de magnitud  $q_0 = 1 \frac{KN}{m}$

en la chapa  $S_1$ , y una carga linealmente distribuida de máxima magnitud

$q_1 = 2 \frac{KN}{m}$  en la chapa  $S_2$  como indicamos en la figura n ° 12.



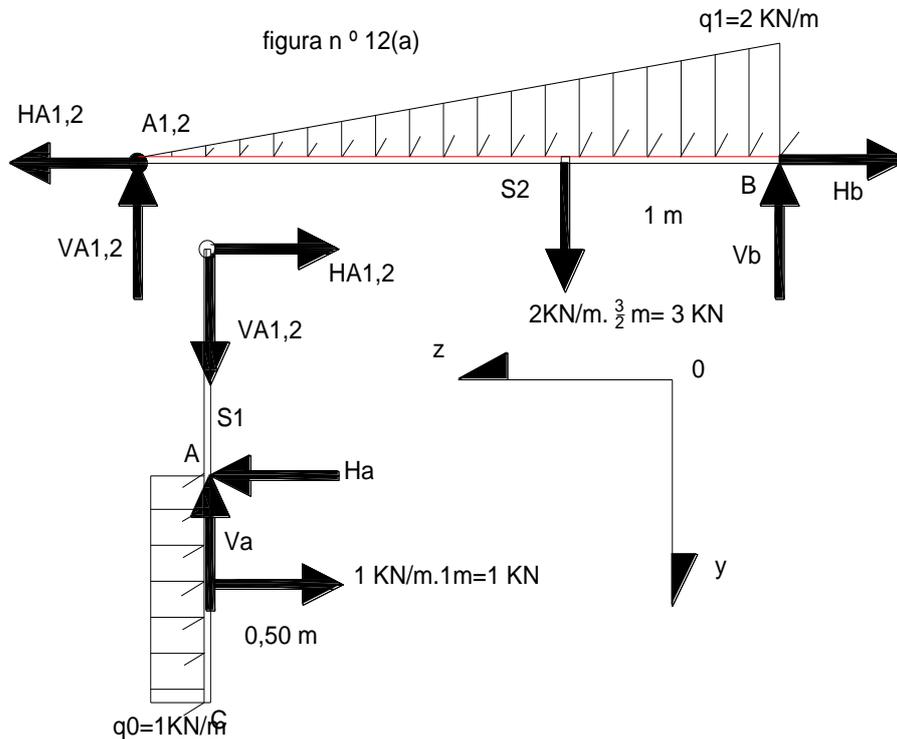
### Solución

#### 1 °) *Análisis cinemático*

Al tratarse de un arco a tres articulaciones, y siendo que no están alineados los puntos fijos **A**, **B** y la articulación  $A_{1,2}$ , entonces la cadena cinemática es cinemáticamente invariable no habiendo vinculación aparente, en consecuencia tiene solución única;

#### 2 °) *Diagrama de cuerpo libre*

En el mismo se reemplazan los vínculos externos e internos por fuerzas desconocidas como se indica en la figura n ° 12(a).



En la figura n ° 12(a) además de reemplazar los vínculos externos por fuerzas desconocidas  $V_A; H_A; V_B; H_B$ , también los vínculos internos en la articulación  $V_{A1,2}; H_{A1,2}$ , y también reemplazamos las cargas distribuidas exteriores por cargas concentradas ubicadas en los respectivos baricentros de las cargas distribuidas.

**\* 3 °) Análisis del equilibrio**

*Ecuaciones de equilibrio absoluto*

$$(A1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -1\text{KN} + H_A - H_B = 0 \rightarrow H_A - H_B = 1\text{KN} \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow -V_A - V_B + 3\text{KN} = 0 \rightarrow V_A + V_B = 3\text{KN} \\ \sum \text{Mom}^A = 0 \rightarrow 1\text{KN} \cdot 0,5\text{m} - 3\text{KN} \cdot 2\text{m} + V_B \cdot 3\text{m} - H_B \cdot 1\text{m} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 3V_B - H_B = 5,5\text{KN} \end{cases}$$

*Ecuaciones de equilibrio relativo*

Elegimos aplicar momentos respecto de la articulación de la chapa  $S_1$ , aunque se pudo haber elegido respecto de la chapa  $S_2$ . Es decir, la elección es arbitraria.

$$(B1) \begin{cases} \sum \text{Mom}_{S_1}^{A1,2} = 0 \rightarrow -H_A \cdot 1\text{m} + 1\text{KN} \cdot 1,5\text{m} = 0 \\ H_A = 1,5\text{KN} \end{cases}$$

Con este valor de  $H_A$ , en las ecuaciones de equilibrio absoluto determinamos el resto de las reacciones de vínculo externas.

En las ecuaciones (A1),

$$(C1) \begin{cases} H_B = 1,5\text{KN} - 1\text{KN} \rightarrow H_B = 0,5\text{KN} \\ V_B = \frac{5,5\text{KN} + 0,5\text{KN}}{3} \rightarrow V_B = 2\text{KN} \\ V_A = 3\text{KN} - 2\text{KN} \rightarrow V_A = 1\text{KN} \end{cases}$$

Aunque no son indispensables para determinar las reacciones de vínculos internos en las cadenas cinemáticas abiertas, calcularemos las reacciones de vínculos internos  $V_{A1,2}$  y  $H_{A1,2}$ , para lo cual elegimos estudiar el equilibrio desde la chapa  $S_2$  en forma arbitraria. Puesto que las reacciones de vínculo interno reemplazan la parte suprimida en este caso de la chapa  $S_1$ , es necesario que el sistema se encuentre en equilibrio en su totalidad en cada tramo parcial elegido.

$$(D1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{yy}^{S2} = 0 \rightarrow -V_B - V_{A1,2} + 3\text{KN} = 0 \rightarrow V_{A1,2} = 3\text{KN} - 2\text{KN} \\ V_{A1,2} = 1\text{KN} \\ \sum \text{Proy}_{zz}^{S2} = 0 \rightarrow H_{A1,2} - H_B = 0 \rightarrow H_{A1,2} = 0,5\text{KN} \end{cases}$$

Verificamos estas reacciones respecto de la chapa  $S_1$

$$(E1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{yy}^{S1} = 0 \rightarrow -V_A + V_{A1,2} = 0 \rightarrow -1\text{KN} + 1\text{KN} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz}^{S2} = 0 \rightarrow -1\text{KN} + H_A - H_{A1,2} = 0 \rightarrow -1\text{KN} + 1,5\text{KN} - 0,5\text{KN} = 0 \end{cases}$$

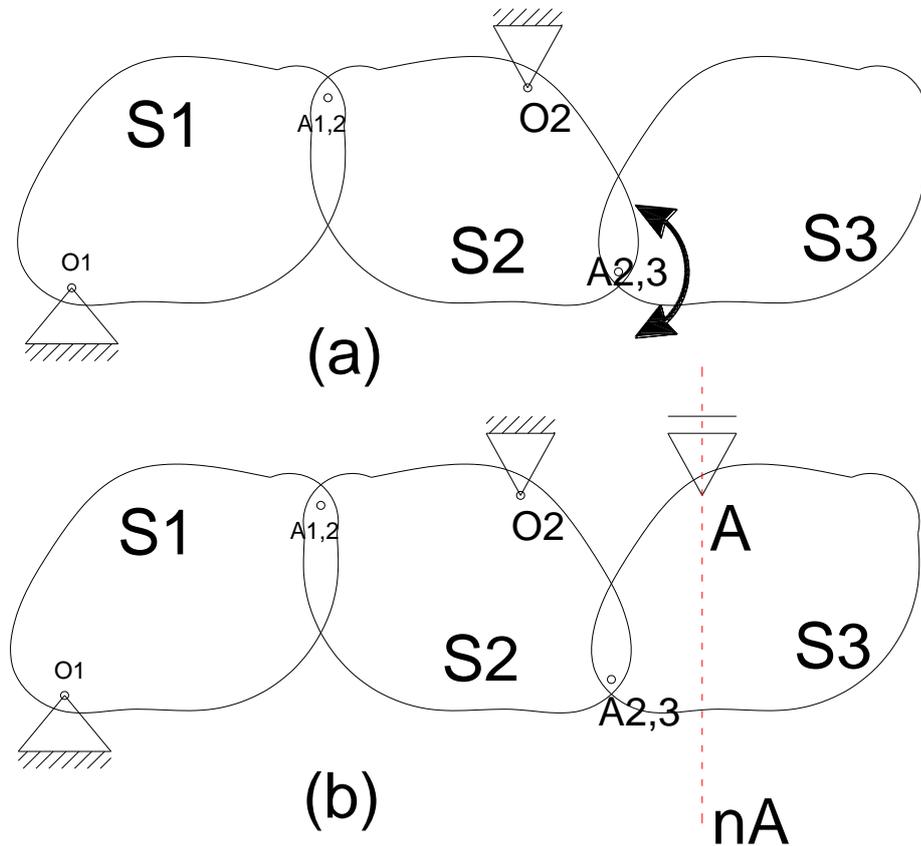
Finalizando, realizamos una verificación del conjunto

$$(F1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 3\text{KN} - 1\text{KN} - 2\text{KN} = 0 \text{ verifica} \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -1\text{KN} + 1,5\text{KN} - 0,5\text{KN} = 0 \text{ verifica} \\ \sum \text{Mom}_{A1,2} = 0 \rightarrow -3\text{KN} \cdot 2\text{m} + 2\text{KN} \cdot 3\text{m} + 1\text{KN} \cdot 1,5\text{m} - 1,5\text{KN} \cdot 1\text{m} = 0 \text{ Verifica} \end{cases}$$

### Cadena cinemática abierta de 3 chapas

Consideremos la cadena cinemática de dos chapas  $S_1$  y  $S_2$  en equilibrio de la figura n ° 13, a la cual, le articulamos una 3 ° chapa  $S_3$  en  $A_{2,3}$ .

figura n ° 13



En la figura n ° 13(a), observamos que la chapa  $S_3$  puede girar alrededor de la articulación  $A_{2,3}$ , con lo cual, se deberá restringir este movimiento de giro con un vínculo de 1 ° especie convenientemente ubicado. En la figura n ° 13(b) podemos observar que colocando un apoyo de 1 ° especie en **A** cuya normal  $n_A$  no concorra a la articulación  $A_{2,3}$ . En nuestro ejemplo, la cadena cinemática queda inmovilizada en esta forma, y cinemáticamente invariable. De aquí, que una cadena cinemática abierta de **3** chapas posee **5** grados de libertad (**GL=5**).

Podemos concluir con respecto a la cantidad de grados de libertad de una cadena cinemática abierta de **n** chapas, resumido en el siguiente cuadro:

N ° de chapas	Grados de libertad (GL)
1	1+2=3

2	<b>2+2=4</b>
3	<b>3+2=5</b>
4	<b>4+2=6</b>
n	<b>n+2</b>

En general,

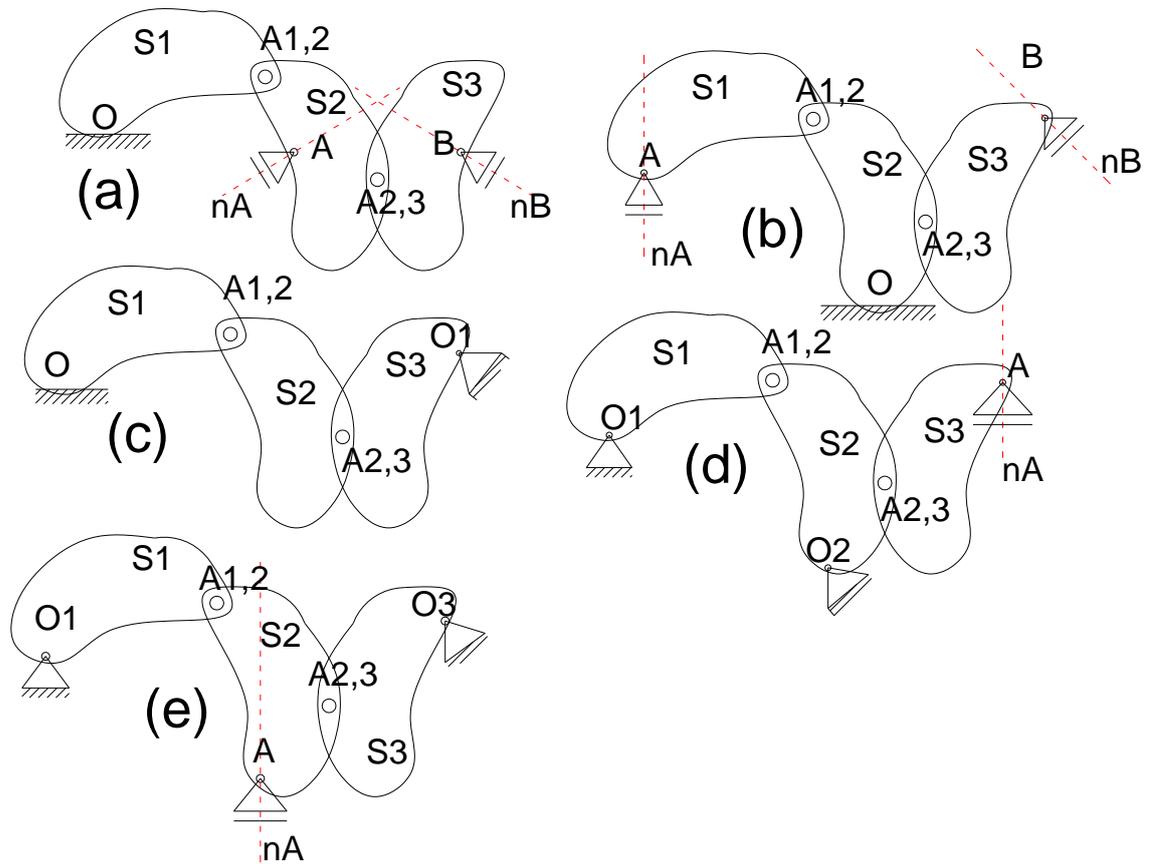
$$GL = n + 2 \quad (3)$$

Las distribuciones de vínculos posibles para una cadena cinemática abierta de 3 chapas son,

$S_1$	$S_2$	$S_3$
3	<b>1</b>	<b>1</b>
1	<b>3</b>	<b>1</b>
3	<b>0</b>	<b>2</b>
2	<b>2</b>	<b>1</b>
2	<b>1</b>	<b>2</b>

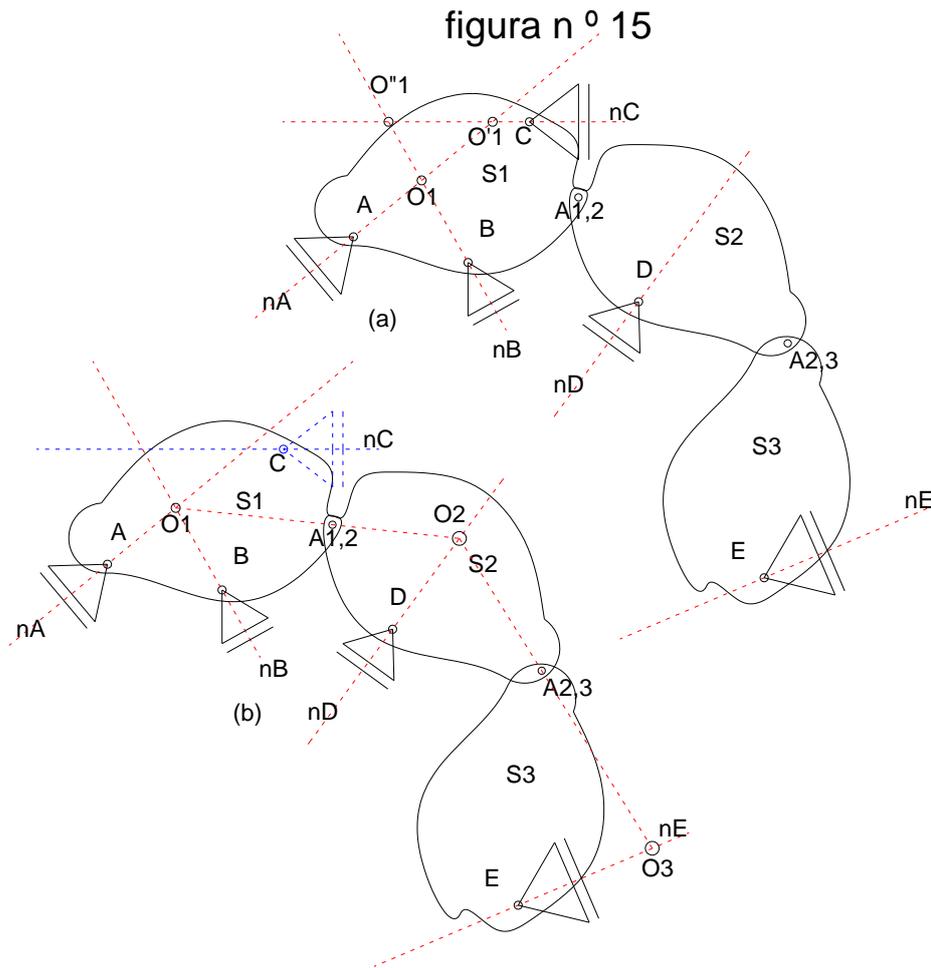
En la figura n ° 14 mostramos estas disposiciones

figura n<sup>o</sup> 14



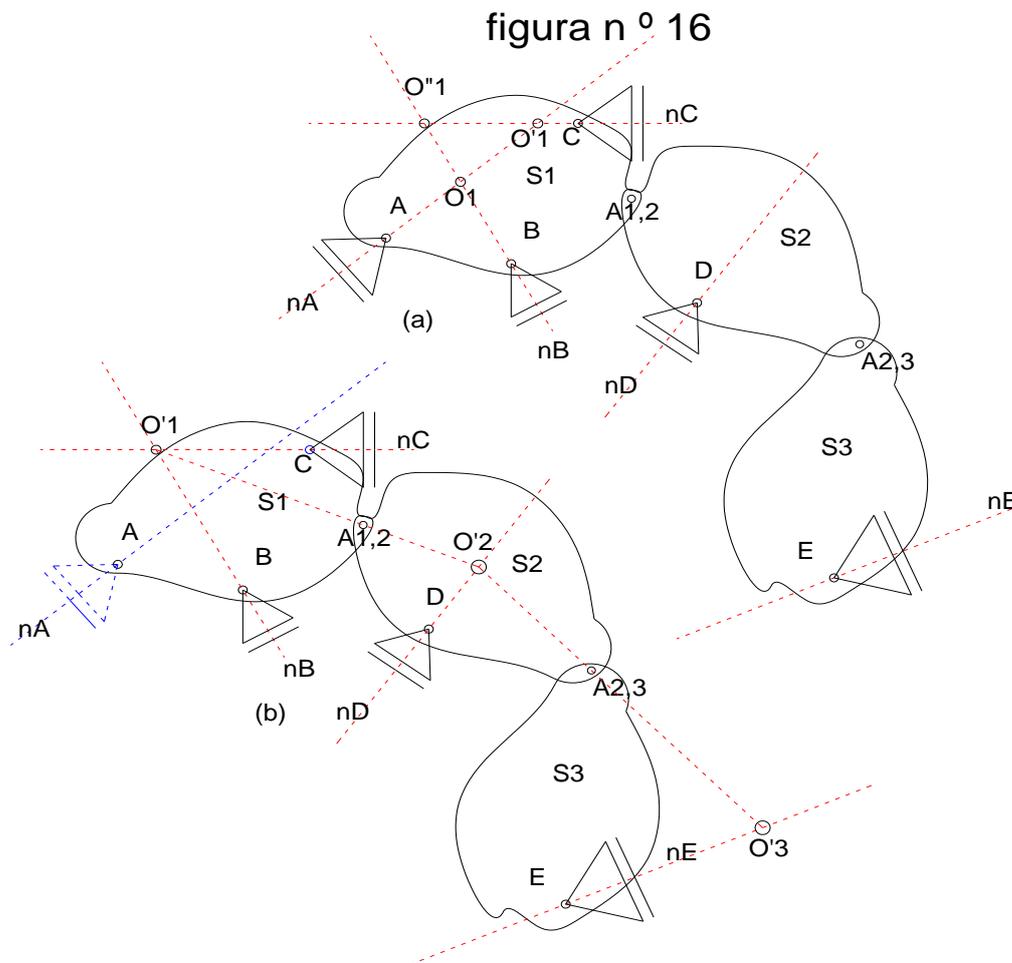
Seguidamente, analizamos los casos (a), (b), (c) y (e), pues el restantes caso se puede deducir análogamente de estos.

En la figura n<sup>o</sup> 15 analizamos cinemáticamente el caso (a) de distribución **3-1-1**. Suprimiendo un vínculo móvil de  $S_1$  para determinar puntos fijos en las restantes chapas.



En la figura n<sup>o</sup> 15(b) se suprimió el apoyo móvil  $C$ , transformando la cadena en hipostática, luego, donde se interceptan las normales  $n_A$  y  $n_B$  tenemos el punto fijo  $O_1$  de  $S_1$ . Desde  $O_1$  llevamos la biela  $\overline{O_1 A_{1,2}}$  a  $S_2$  pasando por la articulación de ambas chapas hasta interceptar la normal  $n_D$  del apoyo móvil  $D$  de  $S_2$  en el punto fijo  $O_2$  de esta. Desde  $O_2$  llevamos la biela  $\overline{O_2 A_{2,3}}$  a  $S_3$  pasando por la articulación de ambas chapas hasta interceptar la normal  $n_E$  del apoyo móvil  $E$  en el punto fijo  $O_3$  de esta. De esta forma hemos encontrado los puntos fijos  $O_1, O_2, O_3$  de las respectivas chapas  $S_1, S_2$  y  $S_3$  respectivamente. A continuación, procedemos en forma similar, con la figura n

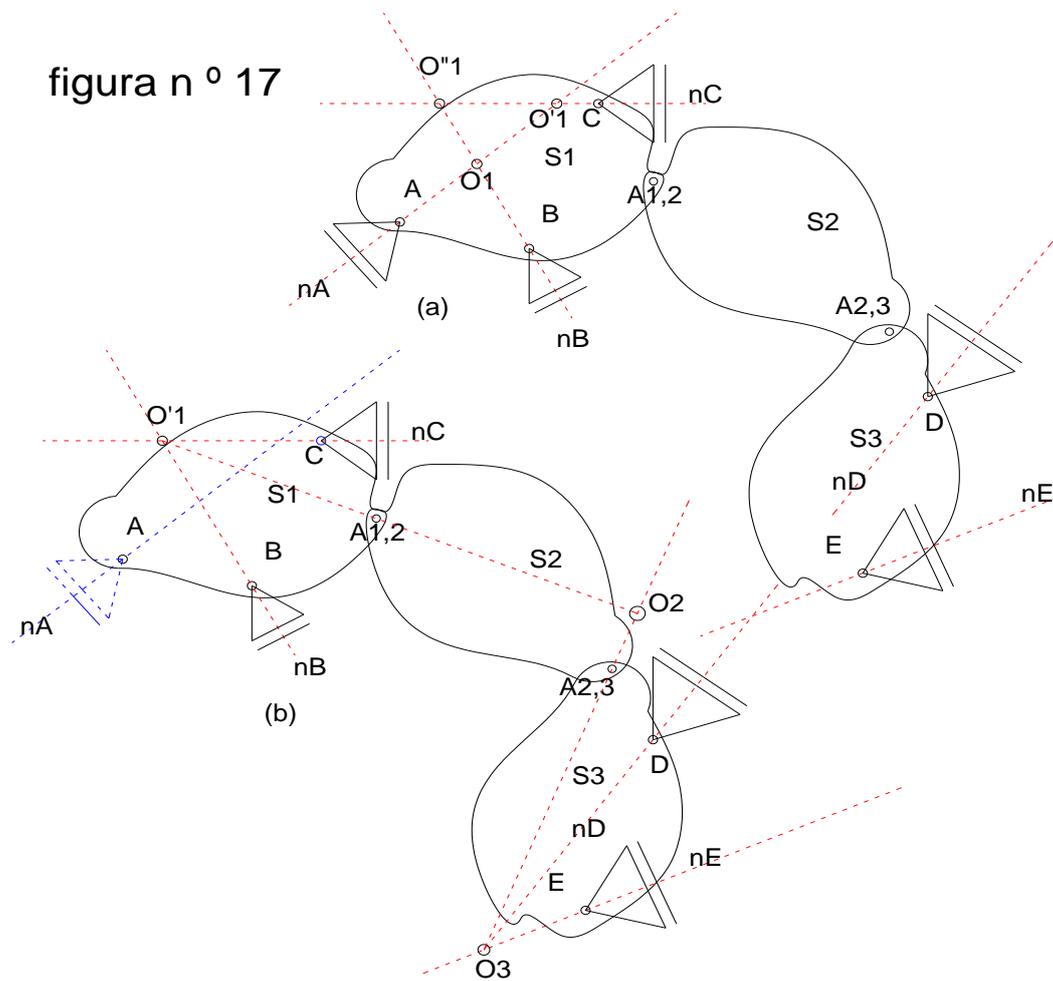
° 15(a), para encontrar un nuevo punto fijo en cada chapa, suprimido esta vez el apoyo móvil **A**, como mostramos en la figura n ° 16(b).



De la figura n ° 16(b), hemos suprimido el apoyo **A** de normal  $n_A$ , con lo cual, el sistema se transforma en hipostático. Las normales  $n_B$  y  $n_C$  se interceptan en el punto fijo  $O'_1$ , y desde aquí, transmitimos una biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  a  $S_2$  a través de la articulación  $A_{1,2}$ , que intercepta a la normal  $n_D$  al apoyo móvil **D** en el punto fijo  $O'_2$ . Desde aquí, transmitimos una biela a  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$  a  $S_3$  a través de  $A_{2,3}$  hasta interceptar la normal  $n_E$  en E en el punto fijo  $O'_3$ . Con esto, la chapa  $S_1$ , posee los puntos fijos  $O_1$  y  $O'_1$ , mientras que la chapa  $S_2$ , posee los puntos fijos  $O_2$  y  $O'_2$ , y la chapa  $S_3$ , los puntos fijos  $O_3$  y  $O'_3$ .

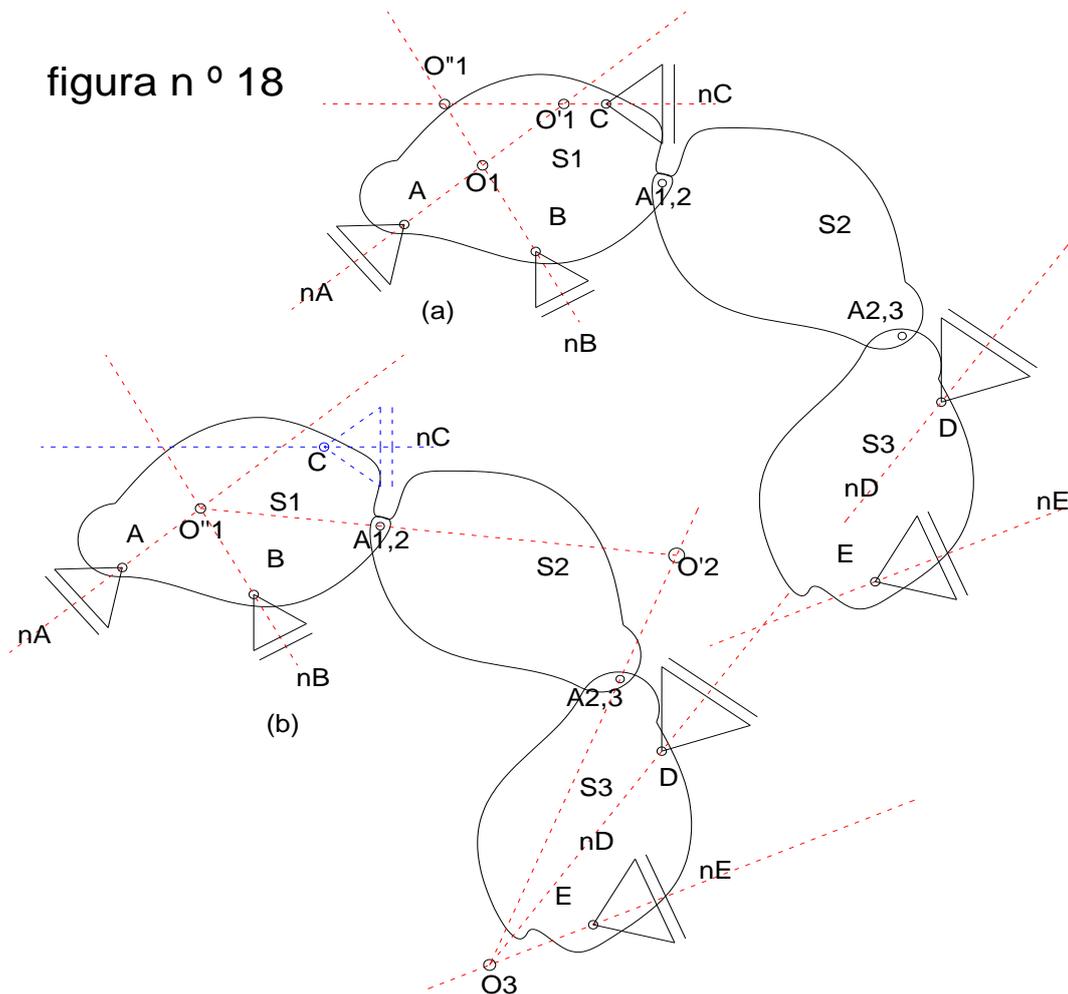
Teniendo cada chapa 2 puntos fijos, las mismas están fijas a tierra, y por consiguiente la cadena cinemática se encuentra fija a tierra, y la misma es cinemáticamente invariable.

Seguidamente, estudiaremos la cinemática de la distribución **3-0-2**. En la figura n ° 17 mostramos una cadena cinemática de 3 chapas con esta distribución.



En la figura n ° 17(a), tenemos una cadena cinemática de 3 chapas con 3 vínculos de 1 ° especie en  $S_1$ , y 2 apoyos de 1 ° especie en  $S_3$ . En una primer instancia suprimimos el apoyo móvil A quedando la cadena hipostáticamente sustentada como lo indicamos en la figura n ° 17(b), entonces, las normales  $n_B$  y  $n_C$  se interceptan en el punto fijo  $O'_1$  de  $S_1$ , y desde éste último, llevamos una biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  a  $S_2$ . Desde  $S_3$ , y, donde se interceptan las

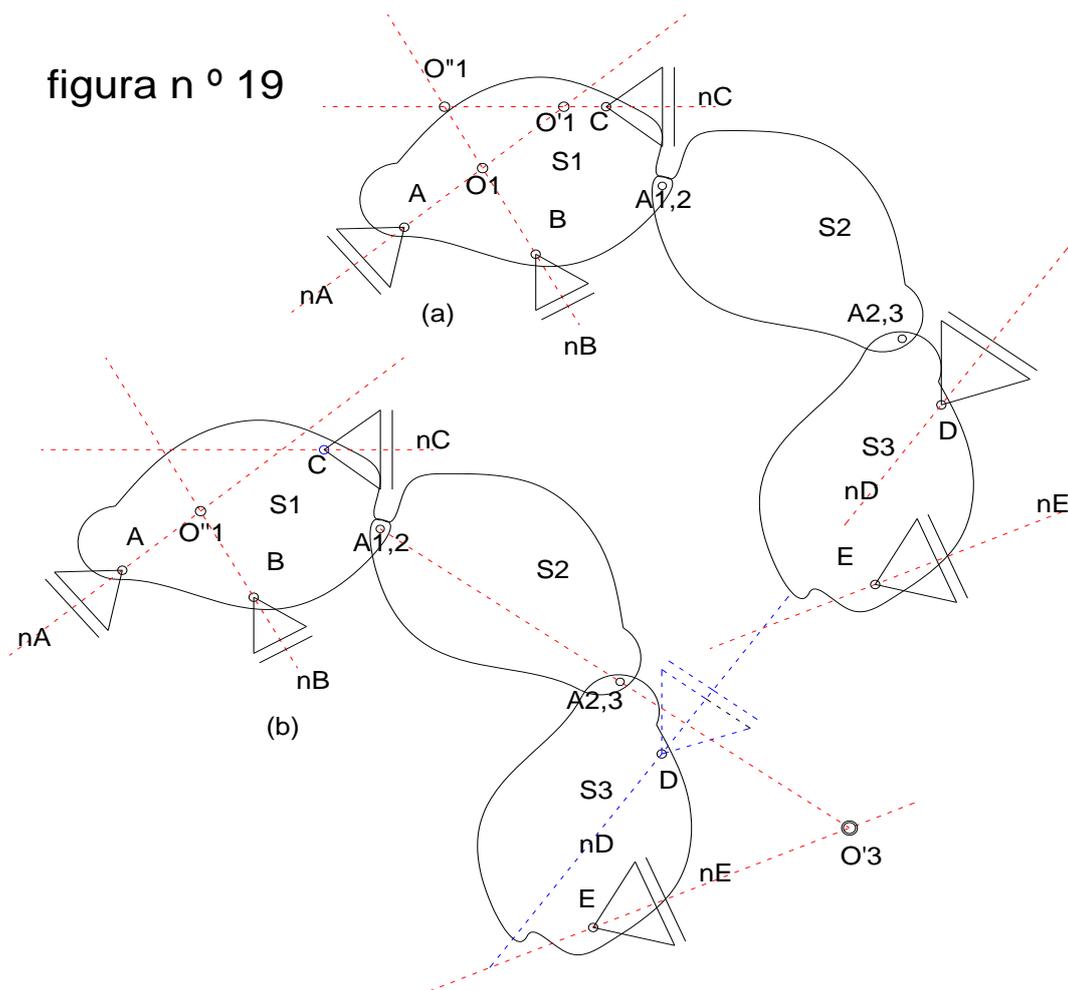
normales  $n_D$  y  $n_E$  de los vínculos móviles en D y E, tenemos el punto fijo  $O_3$  de esta chapa, y desde el mismo llevamos una biela  $\overline{O_3A_{2,3}}$ , hasta interceptar la biela  $\overline{O_1A_{1,2}}$  en un punto fijo  $O_2$  de  $S_2$ , encontrando de esta forma, un punto fijo de esta chapa. Seguidamente, repetimos el procedimiento explicado recientemente, suprimiendo el vínculo **C** de  $S_1$  como lo mostramos en la figura n ° 18.



En la figura n ° 18(b), observamos que las normales  $n_A$  y  $n_B$  de  $S_1$  se interceptan en el punto fijo  $O''_1$  de esta, y desde aquí, transmitimos una biela  $\overline{O''_1A_{1,2}}$  a  $S_2$  hasta interceptar en  $O'_2$  la biela  $\overline{O_3A_{2,3}}$  transmitida desde  $S_3$  a  $S_2$ , obteniéndose de esta forma un segundo punto fijo de  $S_2$ . En

consecuencia, la chapa  $S_1$  posee los puntos fijos  $O'_1$  y  $O''_1$ , estando la misma fija a tierra, mientras que  $S_2$  se mantiene fija a tierra debido a los puntos fijos  $O_2$  y  $O'_2$ , y,  $S_3$  posee el punto fijo  $O_3$ , y, siendo la articulación  $A_{2,3}$  común a  $S_2$  y  $S_3$ , entonces esta última chapa posee así 2 puntos fijos, con lo cual la misma permanece fija también a tierra, y, de esta forma la cadena cinemática se encuentra fija a tierra.

También podemos encontrar otro punto fijo de  $S_3$  suprimiendo un vínculo móvil de la misma como lo hacemos en la figura n ° 19.

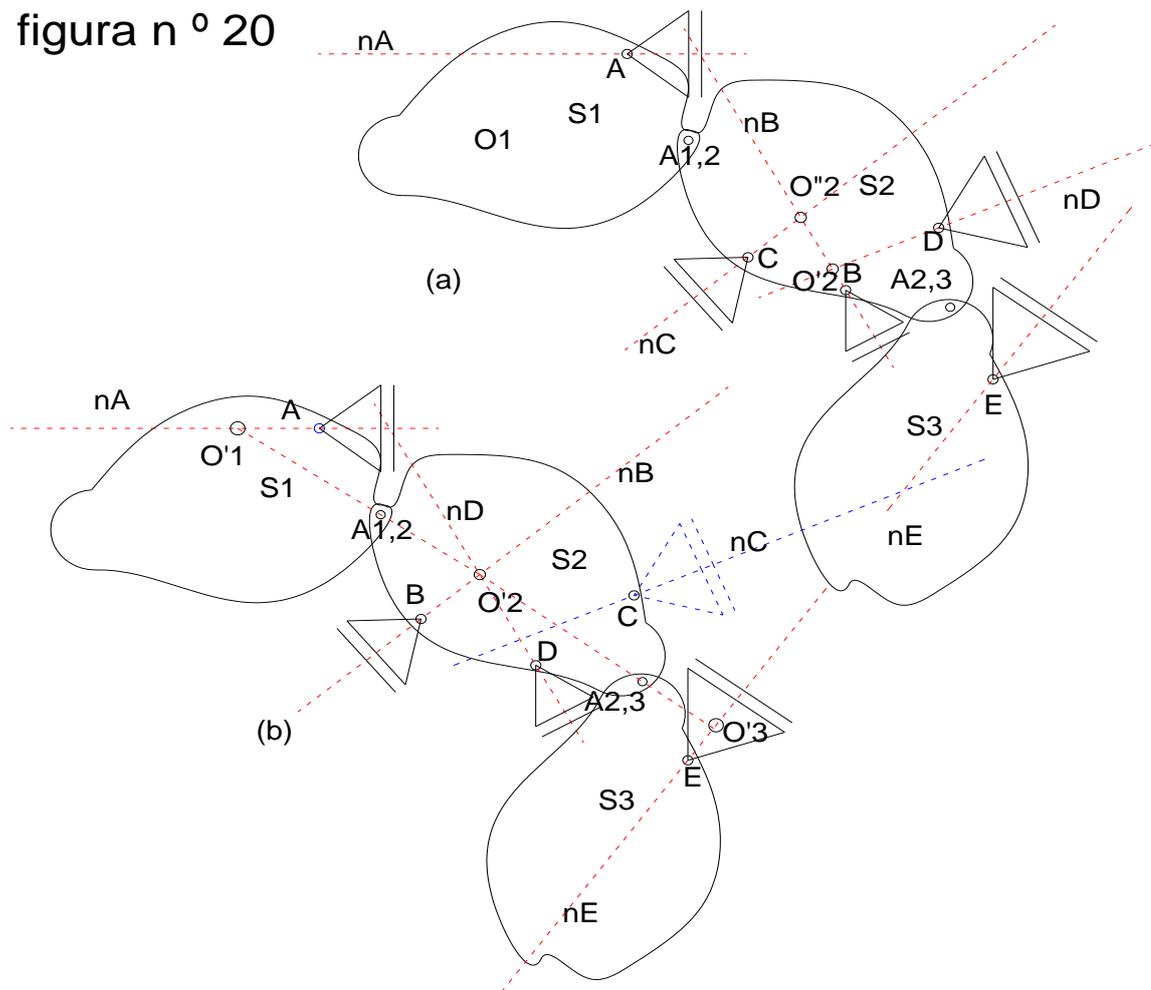


En la figura n ° 19(b), suprimimos el apoyo **D**. Luego,  $S_1$  se encuentra fija a tierra, pues tiene impuestas convenientemente ubicadas 3 condiciones de vínculo que inmovilizan la misma, son lo que la articulación  $A_{1,2}$  es un punto

fijo de  $S_2$ , y desde la misma llevamos a  $S_3$  la biela  $\overline{A_{1,2}A_{2,3}}$  que se intercepta en  $O'_3$  con la normal  $n_E$  del apoyo  $E$ , quedando determinado, de esta forma un punto fijo alternativo de  $S_3$ . Hemos explicado aquí, un método alternativo de encontrar un punto fijo para  $S_3$ , y que la misma posea 2 puntos fijos a tierra para ser inmovilizada.

A continuación, analizamos la distribución **1-3-1**, para lo cual, en la figura n ° 20 consideramos una cadena cinemática con un vínculo de 1 ° especie en  $S_1$ , 3 vínculos de 1 ° especie en  $S_2$ , y un vínculo de 1 ° especie en  $S_3$ .

figura n ° 20

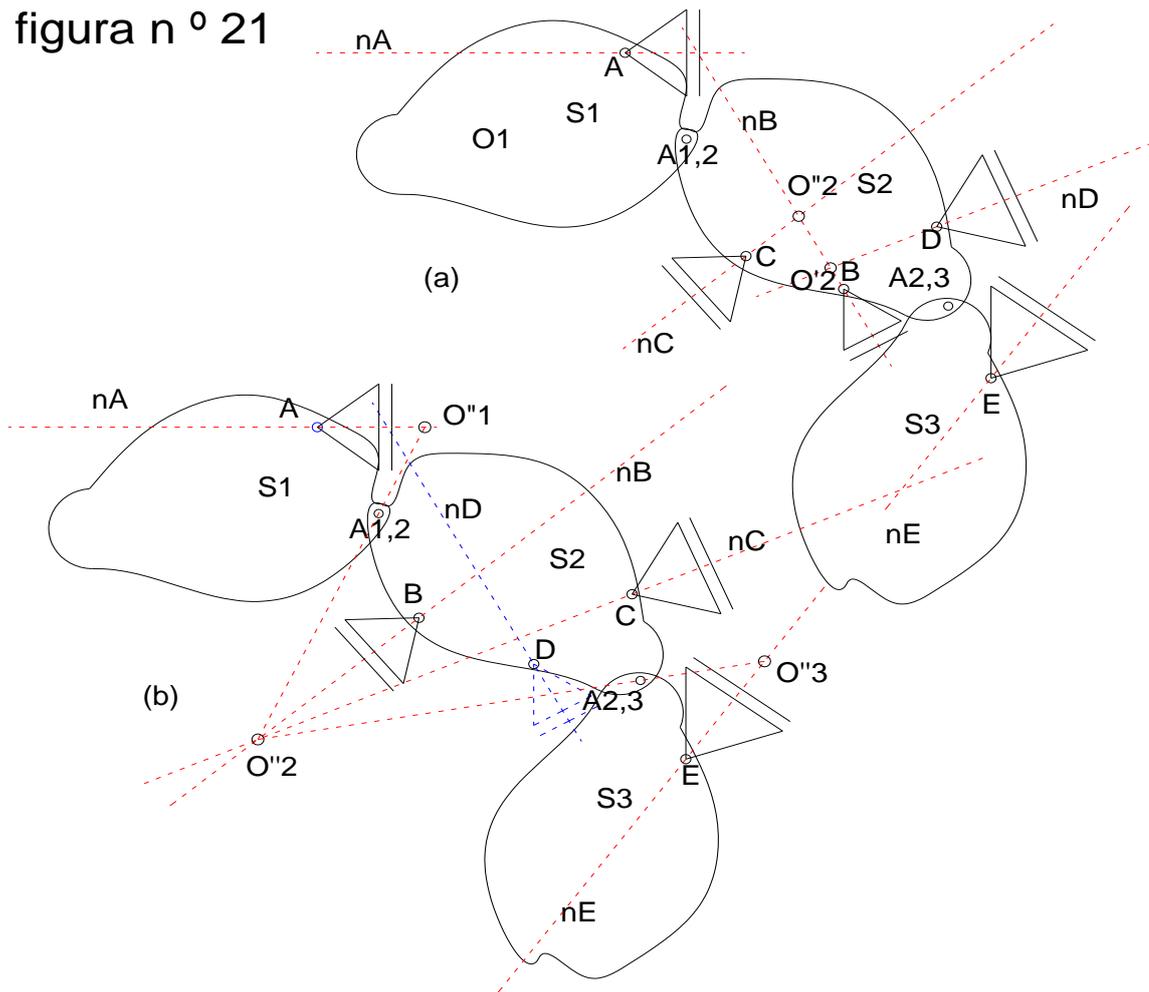


En la figura n ° 20(b), suprimimos vínculo móvil **C**, con lo cual la cadena se encuentra hipostáticamente sustentada. Luego, en la intercepción de las

normales  $n_B$  y  $n_D$  se encuentra un punto fijo  $O'_2$  de  $S_2$ . Desde este punto fijo, transmitimos las bielas  $\overline{O'_2 A_{1,2}}$  a  $S_1$  determinando el punto fijo  $O'_1$  de esta chapa en su intercepción con la normal  $n_A$  del apoyo móvil **A**, y  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$  a  $S_3$  determinando el punto fijo  $O'_3$  en su intercepción con la normal  $n_E$  del apoyo móvil **E**, encontrando de esta forma un punto fijo en cada chapa.

Seguidamente, en la figura n ° 21 repetimos el procedimiento suprimiendo el apoyo móvil **D**.

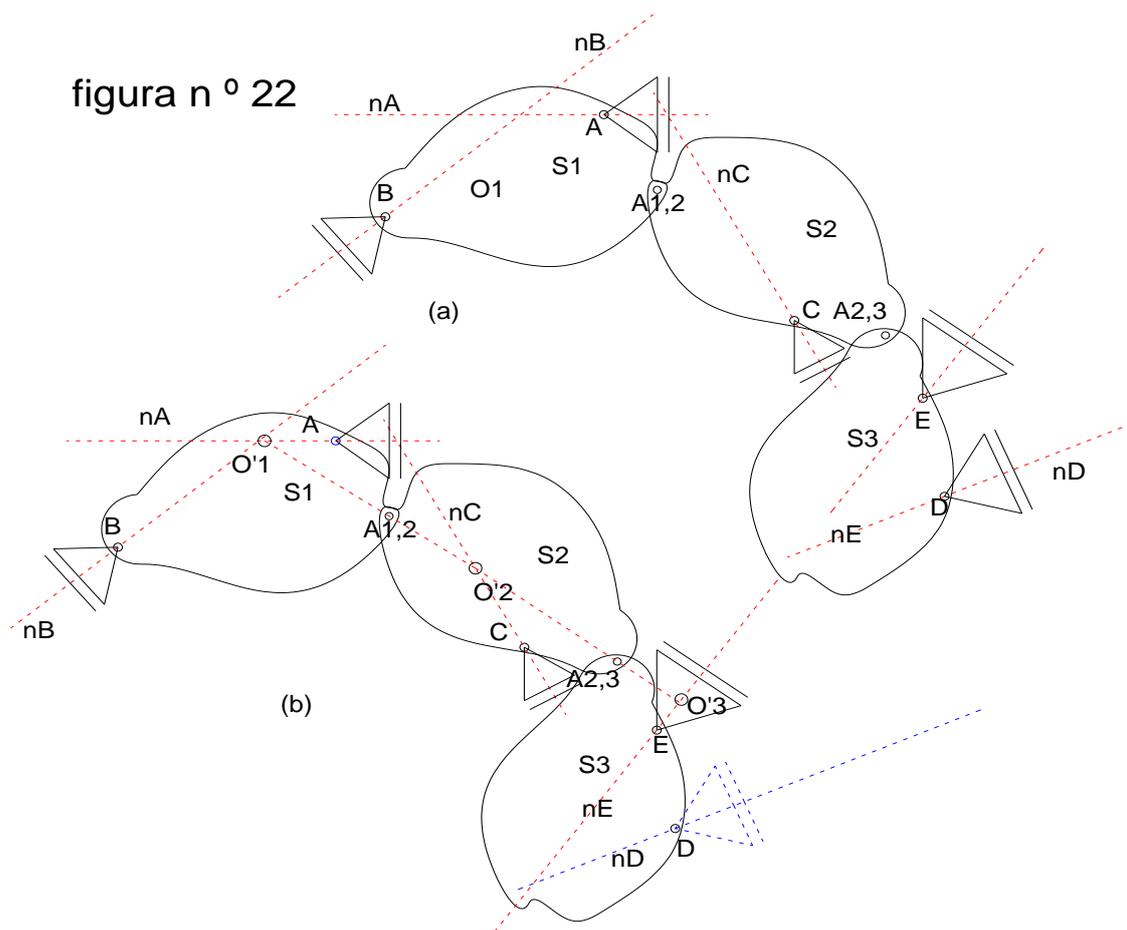
figura n ° 21



Como podemos observar en la figura n ° 21(b), al suprimir el vínculo **D** de  $S_2$ , las normales  $n_B$  y  $n_C$  se interceptan en el punto fijo  $O''_2$  de  $S_2$ , y desde este, transmitimos las bielas  $\overline{O''_2 A_{1,2}}$  a  $S_1$  hasta interceptar en  $O''_1$  la normal  $n_A$

de **A**, y,  $\overline{O''_2 A_{2,3}}$  a  $S_3$  hasta interceptar en  $O''_2$  la normal  $n_E$  de **E**, obteniéndose de esta forma, un nuevo punto fijo en cada chapa de la cadena. En consecuencia, cada una de las chapas de la cadena cinemática tiene 2 puntos fijos, estando así, fijas a tierra y la cadena permanece inmóvil.

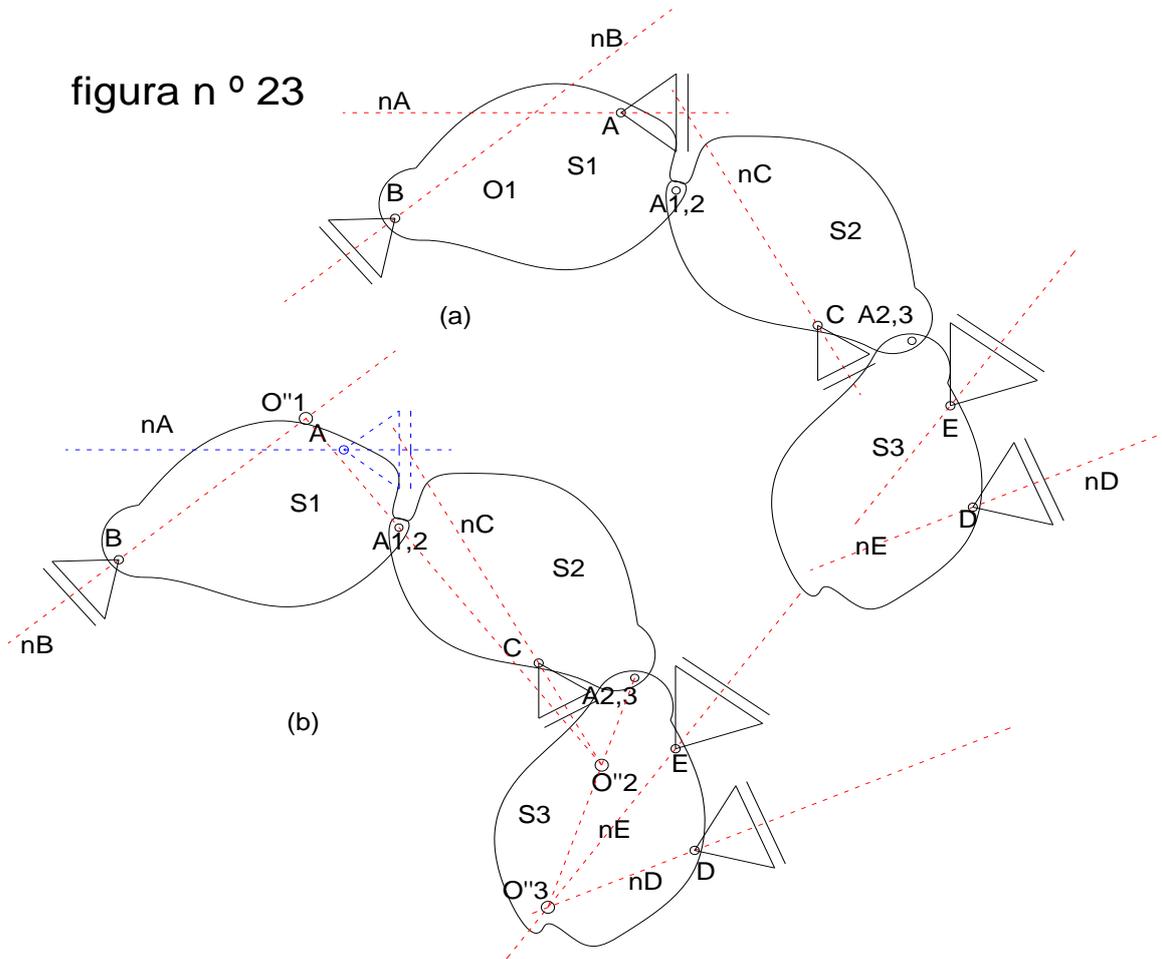
Seguidamente, analizamos la distribución **2-1-2**. En la figura n ° 22 mostramos esta distribución para su posterior análisis. En la chapa  $S_3$  suprimimos el vínculo **D**.



Según observamos en la figura n ° 21(b), las normales  $n_A$  y  $n_B$  se interceptan en el punto fijo  $O'_1$  de  $S_1$ , y, desde aquí le transmitimos la biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  que se intercepta con la normal  $n_C$  de **C** en  $O'_2$ , punto fijo de  $S_2$ , y, desde aquí, le

transmitimos una biela  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$  que se intercepta con la normal  $n_E$  de **E** en  $O'_3$ , punto fijo de  $S_3$ .

Ahora, en la figura n ° 23, repetimos el procedimiento, sustituyendo esta vez, el apoyo móvil **A** de  $S_1$  transformando la cadena en hipostática.



Como observamos en la figura n ° 23(b), las normales  $n_D$  y  $n_E$  de los vínculos **D** y **E** respectivamente, se interceptan en el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$ , y desde el mismo transmitimos la biela  $\overline{O''_3 A_{2,3}}$ , interceptando la normal  $n_C$  de **C** en el punto fijo ficticio  $O''_2$  de  $S_2$ , y desde el mismo transmitimos la biela  $\overline{O''_2 A_{1,2}}$  hasta interceptar la normal  $n_B$  de **B** en el punto fijo  $O''_1$  de  $S_1$ . En esta forma, cada chapa de la cadena cinemática posee 2 puntos fijos a tierra, quedando

las mismas inmovilizadas, y la cadena cinemática se encuentra cinemáticamente invariable.

En cuanto a la distribución **2-2-1** se pueden obtener sencillamente puntos fijos de forma análoga a esta última distribución, por lo cual, omitimos la explicación, dejando esa tarea al alumno.

### **Ecuaciones de equilibrio en una cadena cinemática abierta de 3 chapas**

#### **Ecuaciones de equilibrio absoluto o externo**

Como hemos señalado anteriormente, son aquellas que establecen las condiciones de equilibrio de la cadena respecto de tierra. Las mismas son dos ecuaciones de sumatoria de proyecciones de fuerzas y una ecuación de sumatoria de momentos respecto de un punto.

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \\ \sum \text{Mom}^C = 0 \end{array} \right.$$

#### **Ecuaciones de equilibrio relativo o interno**

Según hemos estudiado, la cadena cinemática de 3 chapas posee 5 grados de libertad, en consecuencia se le deben imponer 5 condiciones de vínculo. Luego, las ecuaciones de equilibrio absoluto son insuficientes para determinar las reacciones de vínculo, por lo que necesitamos ecuaciones adicionales que nos permitan determinar el valor de todas las reacciones de vínculo.

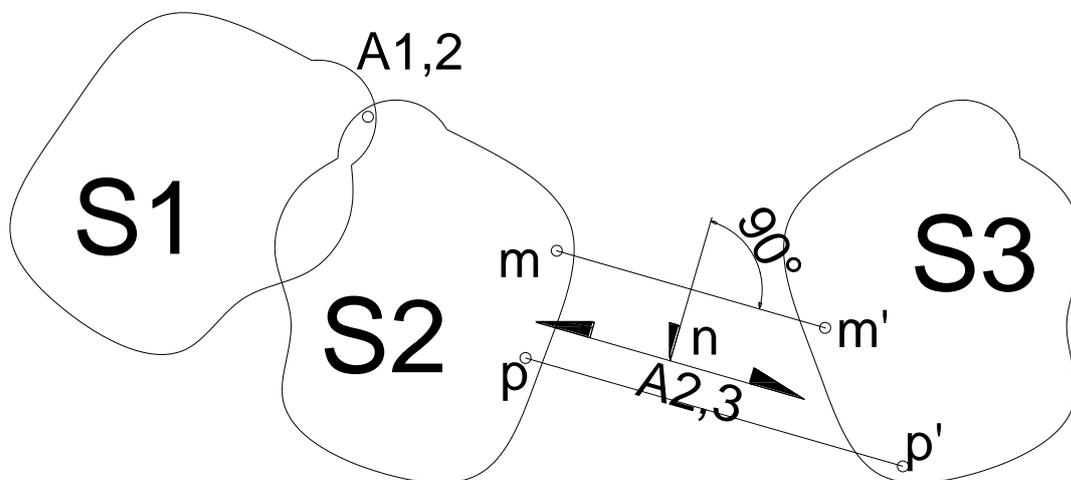
Las ecuaciones de equilibrio relativo, o de equilibrio interno, son ecuaciones de equilibrio de una parte de la cadena respecto de una articulación. Las mismas son ecuaciones de momentos respecto de la misma, debido a que no se pueden transmitir momentos respecto de articulaciones. Estas pueden ser,

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Mom}_{S_1}^{A_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_2+S_3}^{A_{1,2}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2}^{A_{2,3}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_3}^{A_{2,3}} = 0 \end{array} \right.$$

En el caso que una articulación sea impropia (ejemplo  $A_{2,3}$ ), la ecuación de equilibrio relativo de momentos se reemplaza por una ecuación de sumatoria de proyecciones en la dirección normal a la dirección impropia. Por ejemplo, si tenemos la articulación impropia de la figura n ° 24, cuya dirección normal es  $\mathbf{n-n}$ , las ecuaciones de equilibrio relativo alternativas son,

$$(6) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{m, S_3}^{A_{2,3}} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{m, S_1+S_2}^{A_{2,3}} = 0 \end{cases}$$

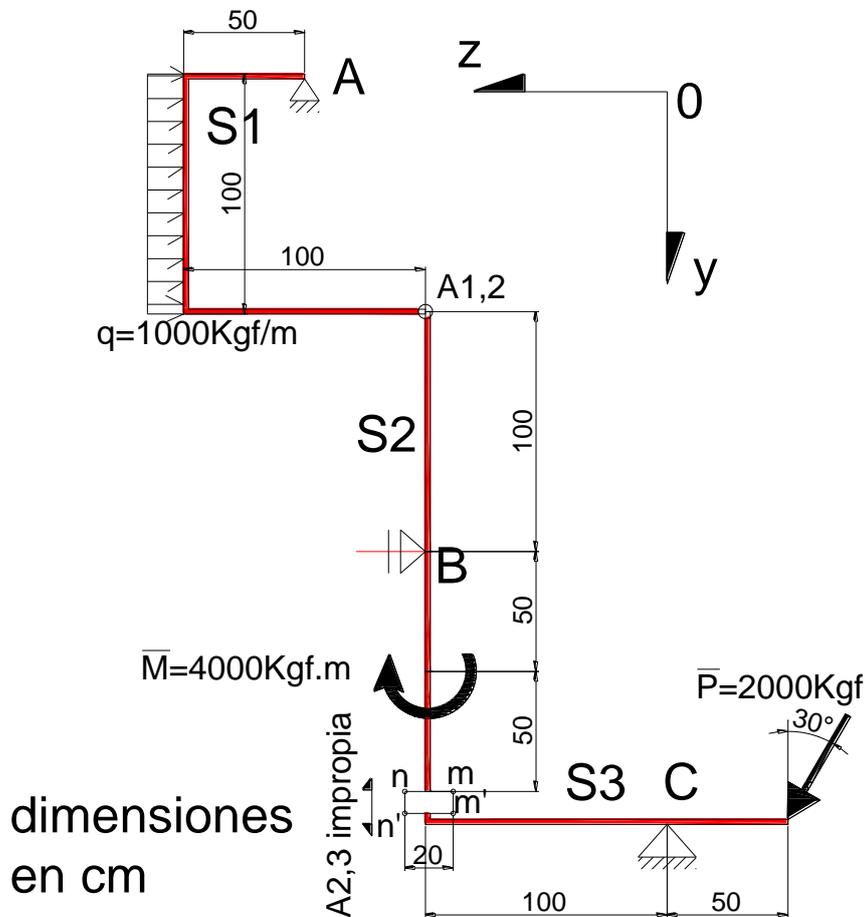
figura n ° 24



A continuación, resolveremos un ejercicio con la finalidad de aclarar conceptos.

**Problema de aplicación n ° 2.** Determinar las reacciones de vínculo externas e internas en la cadena cinemática de 3 chapas de la figura n ° 25, con una articulación real  $A_{1,2}$ , y otra impropia  $A_{2,3}$ .

figura n ° 25



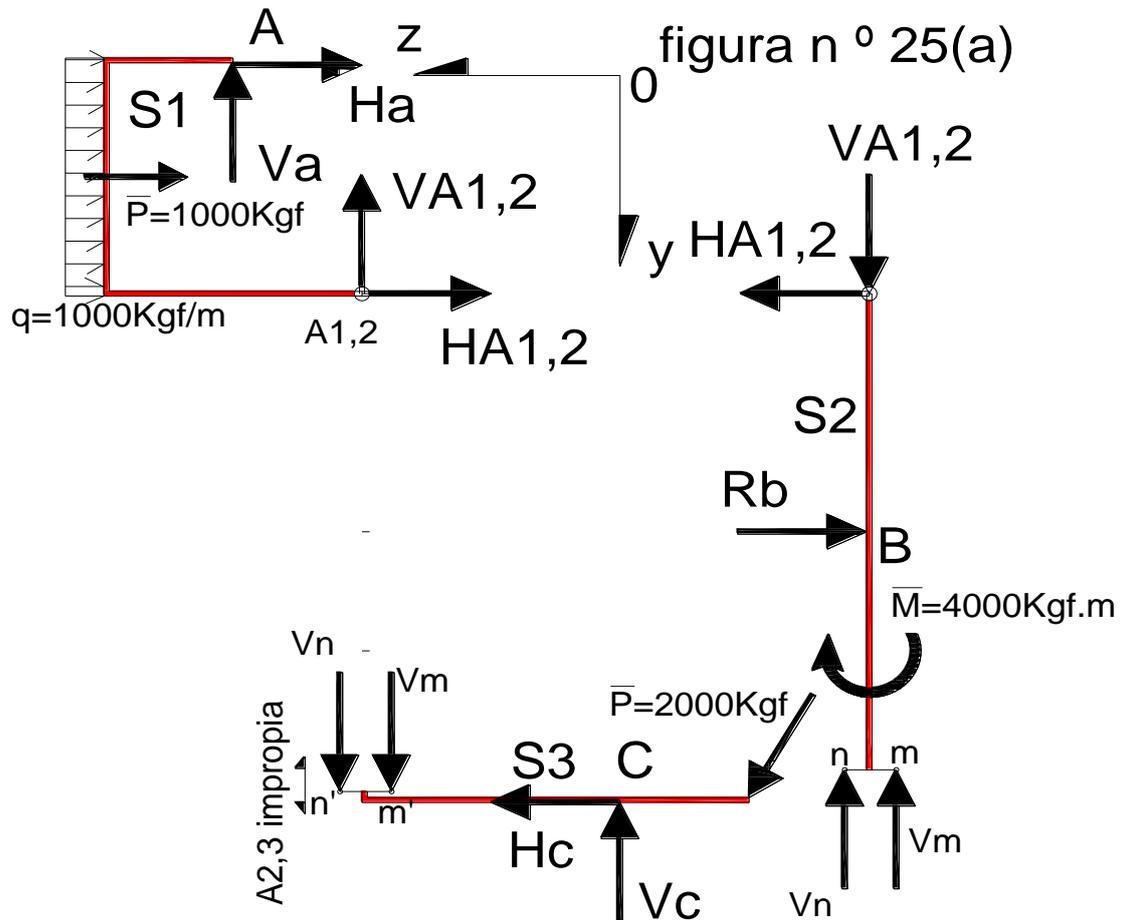
### Solución

#### \* 1 °) Análisis cinemático

Como observamos, la chapa  $S_2$ , posee un vínculo móvil cuya normal no concurre a la articulación  $A_{1,2}$ , ni es paralela a la dirección impropia de la articulación  $A_{2,3}$ , por lo que no existe vinculación aparente, por lo que la cadena es cinemáticamente invariable.

#### \* 2 °) Diagrama de cuerpo libre

En la figura n ° 25(a) reemplazamos los vínculos y articulaciones por fuerzas desconocidas, con sentidos arbitrariamente asignados.



En la figura n ° 25(a), reemplazamos, además la carga uniformemente repartida  $q$  por la carga concentrada  $\vec{P} = q \cdot 1m = 1000 \frac{\text{Kgf}}{m} \cdot 1m = 1000 \text{Kgf}$ .

### \* 3 °) Estudio del equilibrio

*Ecuaciones de equilibrio absoluto*

$$(A2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -1000\text{Kgf} - H_A + H_C + 2000\text{Kgf} \cdot \text{sen } 30^\circ = 0 \\ H_A - H_C + \overline{R}_B = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 2000\text{Kgf} \cdot \cos 30^\circ - V_A - V_C = 0 \\ V_A + V_C = 1732\text{Kgf} \\ \sum \text{Mom}^A = 0 \rightarrow 1000\text{Kgf} \cdot 0,5\text{m} + R_B \cdot 2\text{m} - 4000\text{Kgf} \cdot \text{m} - H_C \cdot 3\text{m} + V_C \cdot 1,5\text{m} - \\ - 2000\text{Kgf} \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot 3\text{m} - 2000\text{Kgf} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2\text{m} = 0 \\ 2R_B - 3H_C + 1,5V_C = 9964\text{Kgf} \end{array} \right.$$

Ecuaciones de equilibrio relativo

En la chapa  $S_3$  aplicamos una sumatoria de proyecciones de fuerzas en equilibrio en la dirección normal del impropio, que coincide con el eje y.

$$(B2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{nn}^{S_3} = \sum \text{Proy}_{zz}^{S_3} = 0 \rightarrow H_C + 1000\text{Kgf} = 0 \\ H_C = -1000\text{Kgf} \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado} \end{array} \right.$$

En las chapas  $S_2 + S_3$  aplicamos una sumatoria de momentos en equilibrio respecto de la articulación  $A_{1,2}$ .

$$(C2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Mom}_{S_2+S_3}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -4000\text{Kgf} \cdot \text{m} + R_B \cdot 1\text{m} + V_C \cdot 1\text{m} - 2000\text{Kgf} \cdot \cos 30^\circ \cdot 1,5\text{m} + \\ - H_C \cdot 2\text{m} - 1000\text{Kgf} \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot 2\text{m} = 0 \\ R_B + V_C \cong 6600\text{Kgf} \end{array} \right.$$

De los sistemas (A2), (B2), y (C2) resulta,

$$(D2) \left\{ \begin{array}{l} R_B = -5872\text{Kgf} \leftarrow \text{sentido opuesto al asignado} \\ V_C = 12472\text{Kgf} \\ V_A = -10470\text{Kgf} \downarrow \text{sentido opuesto al asignado} \\ H_A = 4872\text{Kgf} \\ H_C = -1000\text{Kgf} \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado} \end{array} \right.$$

**\* 4 °) Verificación de los valores obtenidos.**

Mediante las ecuaciones de equilibrio absoluto realizamos la comprobación del equilibrio externo.

$$(E2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -4872\text{Kgf} - 1000\text{Kgf} + 5872\text{Kgf} + 2000\text{Kgf} \cdot \text{sen } 30^\circ - 1000\text{Kgf} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 10740\text{Kgf} + 2000\text{Kgf} \cdot \text{cos } 30^\circ - 12472\text{Kgf} = 0 \\ \sum \text{Mom}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -1000\text{Kgf} \cdot 0,5\text{m} + 10740\text{Kgf} \cdot 0,5\text{m} - 4872\text{Kgf} \cdot 1\text{m} - 4000\text{Kgf} \cdot \text{m} - \\ - 5872\text{Kgf} \cdot 1\text{m} - 1000\text{Kgf} \cdot 2\text{m} + 1000\text{Kgf} \cdot 2\text{m} + 12472\text{Kgf} \cdot 1\text{m} - 2000\text{Kgf} \cdot 1,5\text{m} \cdot \text{cos } 30^\circ = 0 \end{array} \right.$$

Podemos concluir que verifican todas las igualdades de (E2), con lo cual, los valores hallados de los vínculos externos son los correctos.

Reacciones de vínculo interno

Establecemos el equilibrio interno mediante ecuaciones de equilibrio

Determinación de las reacciones de vínculo interno en  $A_{1,2}$  considerando equilibrio interno en  $S_1$ .

$$(F2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{yy}^{S_1} = 0 \rightarrow V_A - V_{A_{1,2}} = 0 \rightarrow V_{A_{1,2}} = 10740\text{Kgf} \\ \sum \text{Proy}_{zz}^{S_1} = 0 \rightarrow -H_A - 1000\text{Kgf} - H_{A_{1,2}} = 0 \rightarrow H_{A_{1,2}} = -5872\text{Kgf} \leftarrow \\ \text{sensido opuesto al asignado} \end{array} \right.$$

Verificación

Verificamos los valores obtenidos de las reacciones en  $A_{1,2}$  considerando las chapas  $S_2 + S_3$ , como se muestra,

$$(G2) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{yy}^{S_2+S_3} = 0 \rightarrow -12472\text{Kgf} + 2000\text{Kgf} \cdot \text{cos } 30^\circ + 10740\text{Kgf} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz}^{S_2+S_3} = 0 \rightarrow 5872\text{Kgf} + 2000\text{Kgf} \cdot \text{sen } 30^\circ - 1000\text{Kgf} - 5872\text{Kgf} = 0 \end{array} \right.$$

Observamos en (G2), que las mismas verifican las ecuaciones de equilibrio, por lo cual convenimos que los valores hallados de las reacciones internas  $V_{A_{1,2}}$  y  $H_{A_{1,2}}$  son los correctos.

Determinación de las reacciones de vínculo interno en  $A_{2,3}$ . Debido que la articulación es impropia, las reacciones en las bielas  $\mathbf{m-m'}$ , y  $\mathbf{n-n'}$  deben ser paralelas a la dirección impropia. Por conveniencia, determinamos las mismas mediante ecuaciones de equilibrio interno respecto de  $S_3$ .

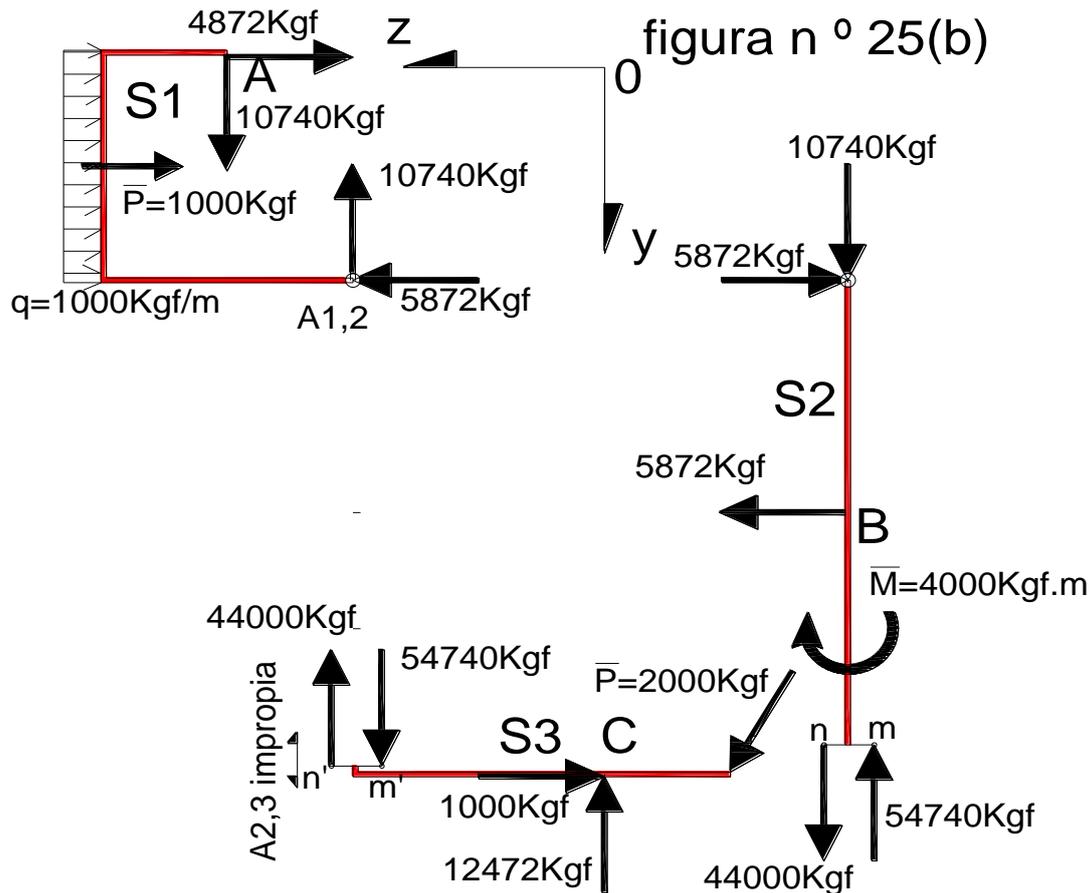
$$(H2) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{S_3}^{m'} = 0 \rightarrow -2000Kgf \cdot \cos 30^\circ \cdot 1,40m + 12472Kgf \cdot 0,9m + V_n \cdot 0,2m = 0 \\ \rightarrow V_n \cong -44000Kgf \uparrow \text{ sentido opuesto al asignado} \\ \sum Proy_{yy}^{S_3} = 0 \rightarrow V_m - 44000Kgf - 12472Kgf + 2000Kgf \cdot \cos 30^\circ = 0 \\ V_m = 54740Kgf \end{array} \right.$$

Verificación

La verificación de estos valores se efectúa desde las chapas  $S_1 + S_2$ , con una ecuación de sumatoria de proyecciones de equilibrio interno,

$$(I2) \left\{ \sum Proy_{yy}^{S_1+S_2} = 0 \rightarrow 10740Kgf + 44000Kgf - 54740Kgf = 0 \right.$$

Observamos que se verifica esta igualdad, por lo cual, los valores obtenidos de las reacciones en las bielas  $m-m'$ , y  $n-n'$  son los correctos. En la figura n ° 25(b) mostramos los verdaderos valores y sentidos de las reacciones de vínculo externas e internas de la cadena cinemática.



### Expresión general para determinar los grados de libertad de una cadena cinemática de chapas

Como hemos estudiado, una articulación entre 2 o más chapas es equivalente a un vínculo de 2° especie interno, por lo que le restringe 2 grados de libertad a cada chapa concurrente a la misma, por lo que se puede generalizar, considerando una cadena cinemática cualquiera de  $n$  chapas, considerando que son 2 los grados de libertad restringidos por articulación, y llamando  $I$  al número de grados de libertad restringidos por articulaciones, siendo  $r$ , el número de chapas concurrentes a una articulación, podemos expresar,

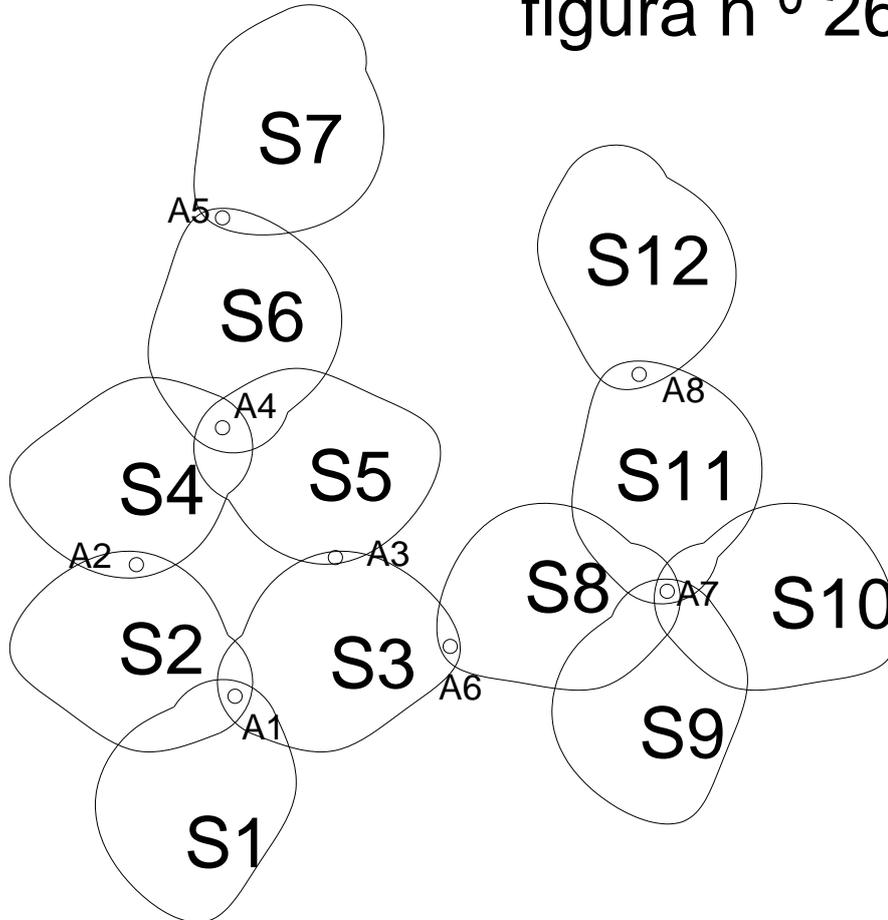
$$(7) \quad GL = 3.n - \sum(I.r - I)$$

Para el caso de chapas  $I=2$ , quedando (7),

$$(8) \quad GL = 3.n - \sum(2.r - 2)$$

Como ejemplo, determinaremos los **GL** en la cadena cinemática de la figura n<sup>o</sup> 26,

figura n<sup>o</sup> 26



Los **GL** se determinan considerando que tenemos **n=12 chapas**, y en cada articulación concurren,

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} A_1 \rightarrow r = 3 \text{ chapas} \quad ; \quad A_6 \rightarrow r = 2 \text{ chapas} \\ A_2 \rightarrow r = 2 \text{ chapas} \quad ; \quad A_7 \rightarrow r = 4 \text{ chapas} \\ A_3 \rightarrow r = 2 \text{ chapas} \quad ; \quad A_8 \rightarrow r = 2 \text{ chapas} \\ A_4 \rightarrow r = 3 \text{ chapas} \\ A_5 \rightarrow r = 2 \text{ chapas} \end{array} \right.$$

En consecuencia, los grados de libertad serán, de acuerdo a (8),

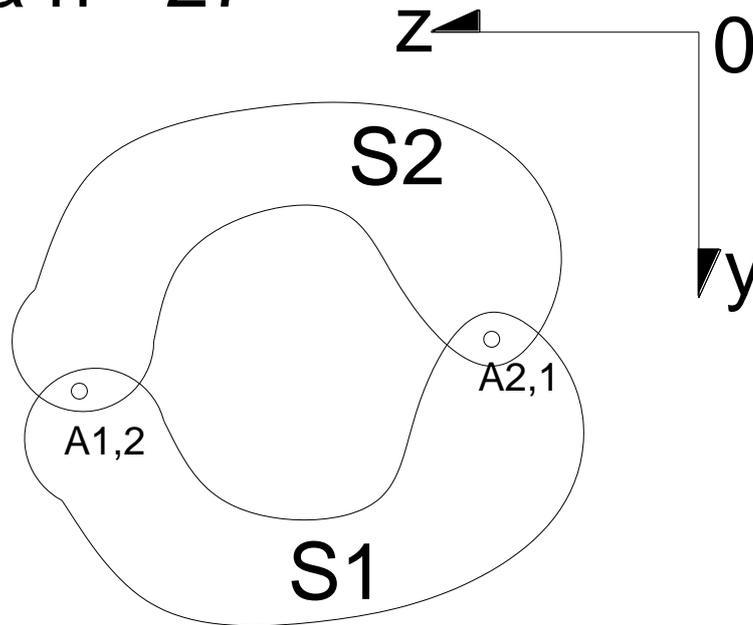
$$GL = 3 \cdot 12 - 2 \cdot (3 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 + 2 - 1) = 12$$

### CADENA CINEMÁTICA CERRADA

#### Cadena cinemática cerrada de 2 chapas

En la figura n ° 27 mostramos una cadena cerrada de chapas  $S_1$  y  $S_2$ .

figura n ° 27



De acuerdo a (8), los **GL** de la cadena es,

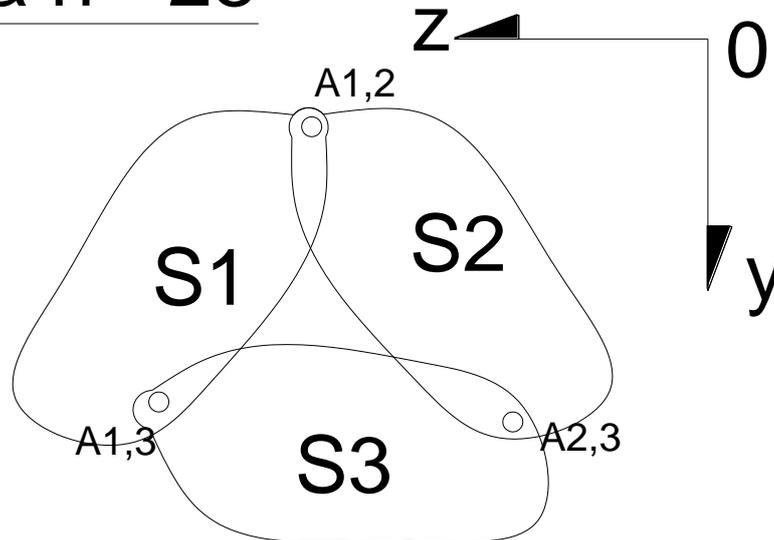
$$(9) \quad GL = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (2 - 1 + 2 - 1) = 2$$

Lo cual no se concibe en condiciones isostáticas, por lo que se trata de un sistema hipostático. Entonces, no existen cadenas cerradas de 2 chapas en condiciones isostáticas.

### Cadena cinemática cerrada de 3 chapas

En la figura n ° 28 se muestra esta cadena cinemática, a partir de la misma efectuamos el análisis cinemático.

figura n ° 28



Los **GL** de la cadena son,

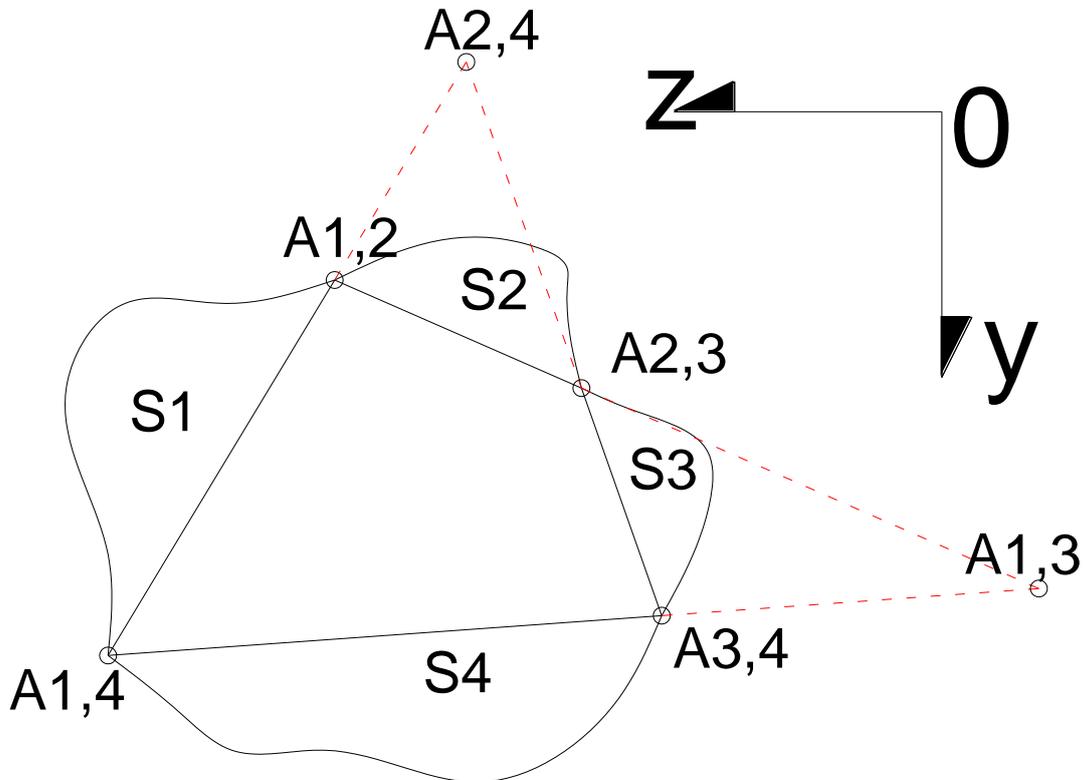
$$(10) \quad GL = 3 \cdot 3 - 2(2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1) = 3$$

Como observamos en (10), una cadena cinemática cerrada de 3 chapas posee igual cantidad de grados de libertad que una chapa, por lo que se trata de un sistema indeformable, porque si una chapa se considera rígido ideal con tres grados de libertad, una cadena cerrada de 3 chapas también lo será. Consecuentemente, tendrá idéntico comportamiento que una chapa, e igual será su análisis, es por ello que se la puede considerar como chapa única, por lo que no realizaremos estudio alguno sobre el equilibrio de las mismas.

**Cadena cinemática cerrada de 4 chapas**

En la figura n ° 29 graficamos esta cadena cinemática, a partir de la cual efectuaremos el análisis cinemático.

figura n ° 29



Los **GL** de la cadena son,

$$(11) \quad GL = 3 \cdot 4 - 2(2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1) = 4$$

Respecto de **GL**, podemos inferir para cadenas cinemáticas cerradas de n chapas,

N ° de chapas	GL
2	2
3	3
4	4

**n**

**n**

Es decir, generalizando,

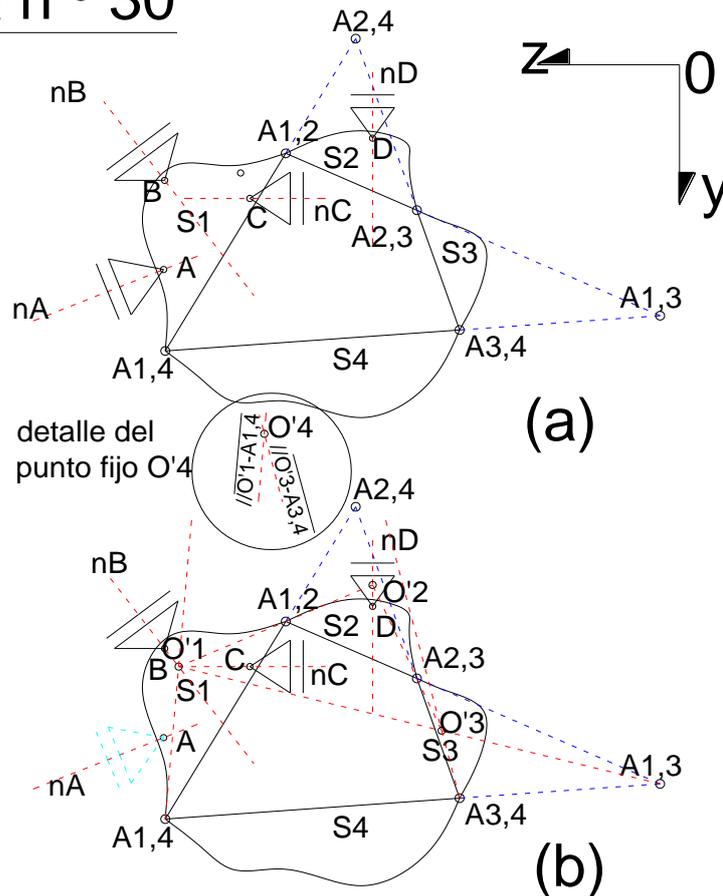
$$(12) \quad GL = n$$

Luego, las distribuciones de vínculos posibles son,

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
3	1	0	0
3	0	1	0
2	2	0	0
2	0	2	0
2	1	1	0
2	1	0	1
1	1	1	1

A continuación, analizamos la distribución **3-1-0-0**. En la figura n ° 30(a) consideramos una cadena cinemática cerrada de 4 chapas con 3 vínculos de 1 ° especie en  $S_1$  convenientemente ubicados, y un vínculo de 1 ° especie en  $S_2$ .

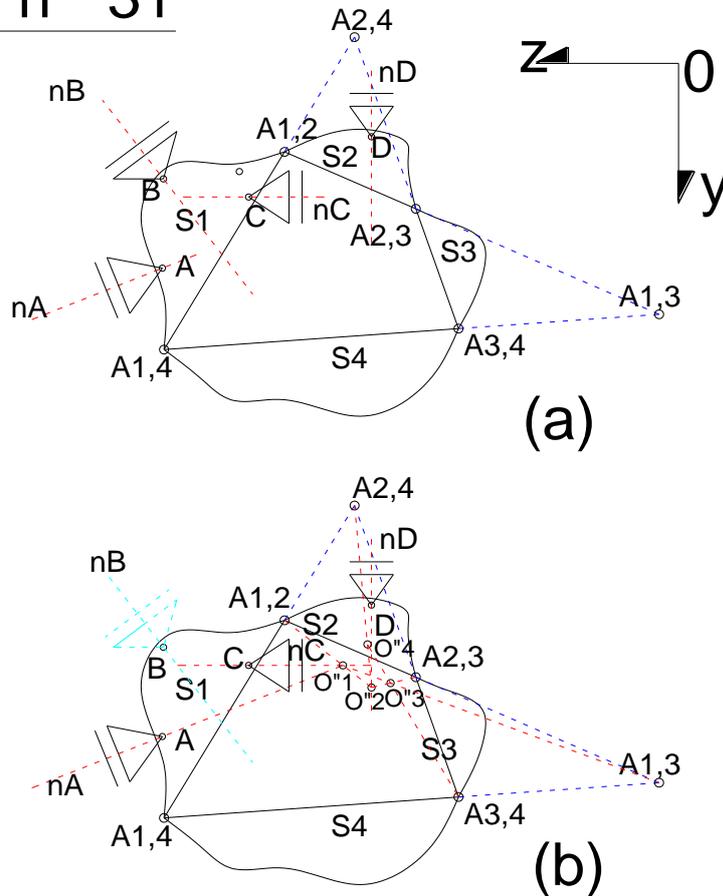
figura n ° 30



En la figura n ° 30(b), suprimimos el apoyo móvil **A**, quedando en consecuencia, la cadena hipostáticamente sustentada. En la chapa  $S_1$ , donde se interceptan las normales  $n_B$  y  $n_C$  de los vínculos **B** y **C** respectivamente, se encuentra el punto fijo  $O'_1$  de  $S_1$ , y, desde aquí, transmitimos a  $S_2$  la biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$ , que se intercepta con la normal  $n_D$  del vínculo **D** en el punto fijo  $O'_2$ . Desde  $O'_1$  llevamos la biela  $\overline{O'_1 A_{1,3}}$  a  $S_3$ , y, desde  $O'_2$  llevamos a  $S_3$  la biela  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$  por la articulación  $A_{2,3}$ , que se intercepta con la anterior biela en el punto fijo  $O'_3$  de  $S_3$ . Desde los puntos fijos  $O'_1$  y  $O'_3$  de  $S_1$  y  $S_3$  transmitimos a la chapa  $S_4$  las respectivas bielas  $\overline{O'_1 A_{1,4}}$  y  $\overline{O'_3 A_{3,4}}$  que se interceptan en el punto fijo  $O'_4$  de  $S_4$  (el mismo se muestra en el detalle en círculo, pues quedaba fuera de los límites del dibujo).

En la figura n ° 31, se obtienen 4 puntos fijos de la cadena, suprimiendo esta vez el vínculo móvil **B**.

figura n ° 31

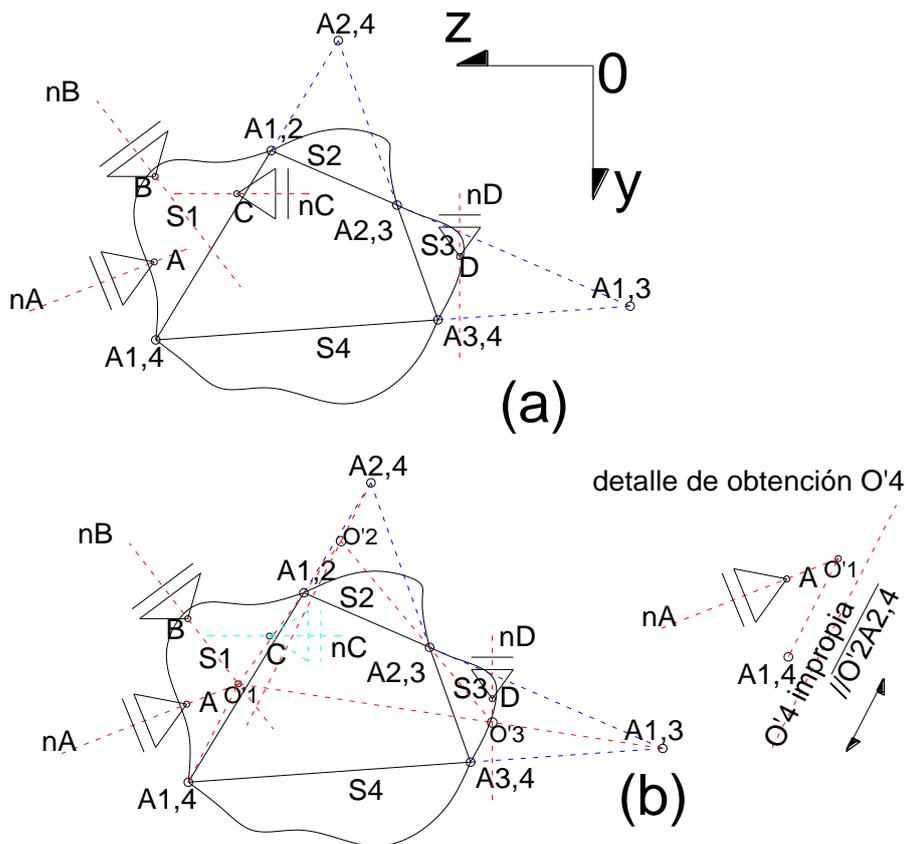


Como observamos en la figura n ° 31(b), las normales  $n_A$  y  $n_C$  de **A** y **C** se interceptan en el punto fijo  $O''_1$  de  $S_1$ , y, desde el mismo transmitimos a  $S_2$  a través de la articulación  $A_{1,2}$  la biela  $\overline{O''_1 A_{1,2}}$  que se intercepta con la normal  $n_D$  en el punto fijo  $O''_2$  de  $S_2$ . Desde  $O''_1$  y  $O''_2$ , transmitimos a  $S_3$  a través de las articulaciones  $A_{1,3}$  y  $A_{2,3}$  las bielas  $\overline{O''_1 A_{1,3}}$  y  $\overline{O''_2 A_{2,3}}$  que se interceptan en el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$ . Desde  $O''_2$  y  $O''_3$  transmitimos a  $S_4$  a través de sus articulaciones  $A_{3,4}$  y  $A_{2,4}$ , las bielas  $\overline{O''_2 A_{2,4}}$  y  $\overline{O''_3 A_{3,4}}$  que se interceptan en el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . De esta forma cada chapa de la

cadena se encuentra fija a tierra por poseer 2 puntos fijos estando fija y cinemáticamente invariable la cadena cinemática.

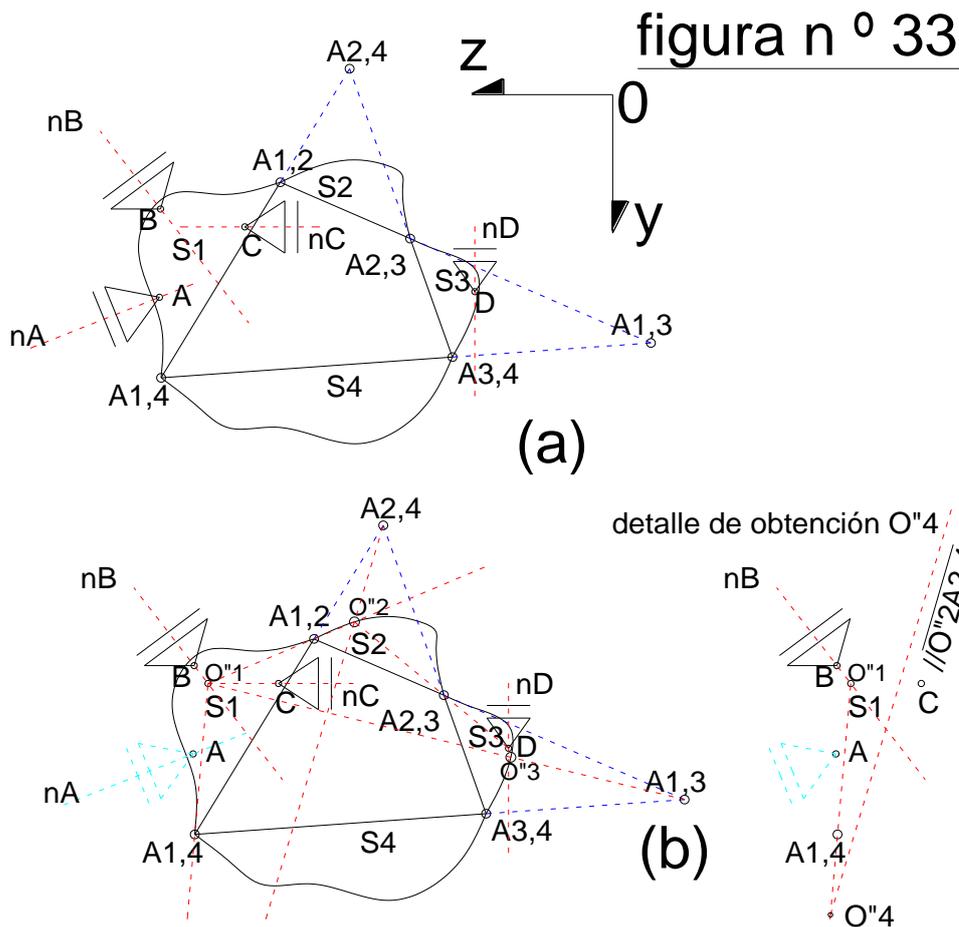
Continuamos con el análisis de la distribución **3-0-1-0**. En la figura n ° 32(a), graficamos una cadena cinemática con 3 vínculos de 1 ° especie en  $S_1$  y un vínculo de 1 ° especie en  $S_3$ .

figura n ° 32



Como observamos, en la figura n ° 32(b), suprimimos el apoyo móvil **C**. Donde se interceptan las normales  $n_A$  y  $n_B$  de los vínculos **A** y **B** se obtiene  $O'_1$  de  $S_1$ , desde aquí transmitimos a  $S_2$  a través de  $A_{1,2}$  la biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  que determina el punto fijo  $O'_2$  de  $S_2$ . Ahora, desde  $O'_1$  y  $O'_2$  llevamos a través de  $A_{1,4}$  y  $A_{2,4}$  las bielas  $\overline{O'_1 A_{1,4}}$  y  $\overline{O'_2 A_{2,4}}$  a  $S_4$ . El punto de intercepción de estas dos bielas determina el punto fijo  $O'_4$  de  $S_4$ . Nos cabe destacar que el punto

impropio  $O'_4$  de  $S_4$ , como se muestra en el detalle, es casualidad que el mismo sea impropio, no ocurriendo esto en la mayoría de los casos con articulación propia. Luego, determinamos un punto fijo de  $S_3$ , transmitiendo una biela  $\overline{O'_1 A_{1,3}}$  que pasa por  $A_{1,3}$ , donde se interceptan con la normal  $n_D$  de vínculo **D**, tenemos el punto fijo  $O'_3$ . De esta forma, cada chapa tiene un poco fijo en la cadena. En la figura n ° 33(b) repetimos el procedimiento eliminando el vínculo **A** de  $S_1$ .

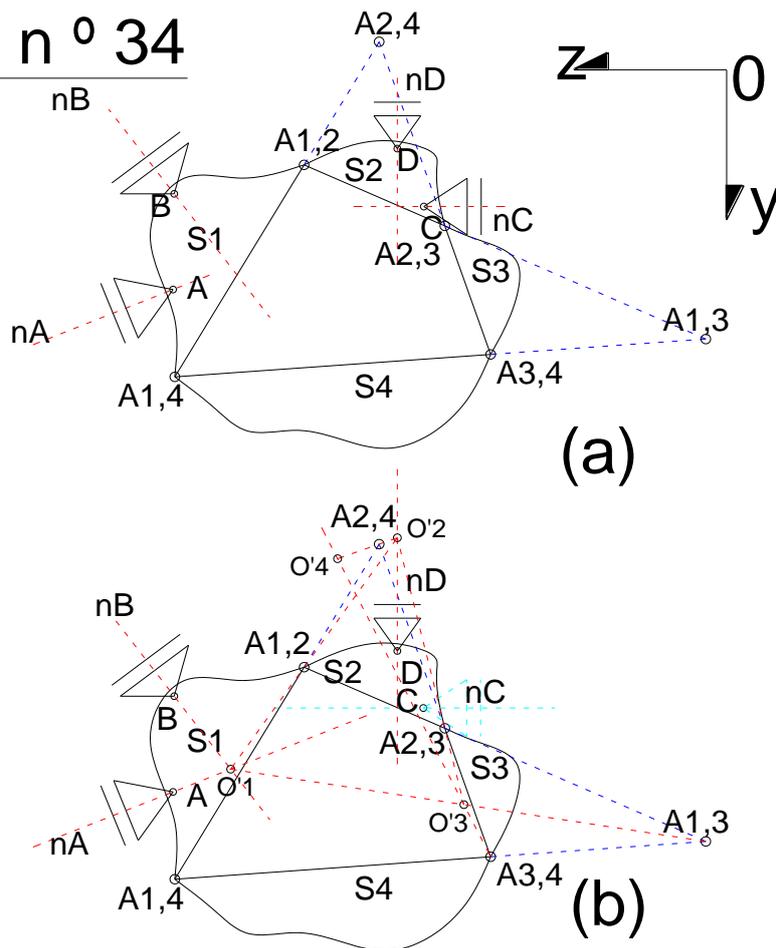


Según observamos, en la figura n ° 33(b), donde se interceptan las normales  $n_B$  y  $n_C$  tenemos el punto fijo  $O''_1$  de  $S_1$ , y, desde aquí transmitimos a  $S_3$ , a través de  $A_{2,3}$ , la biela  $\overline{O''_1 A_{1,3}}$ , que se intercepta con la normal  $n_D$  en el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$ . Desde  $O''_1$ , y pasando por  $A_{1,2}$  transmitimos la biela

$\overline{O''_1 A_{1,2}}$  a  $S_2$ , y, desde  $O''_3$ , y pasando por  $A_{2,3}$ , transmitimos la biela  $\overline{O''_3 A_{2,3}}$  a  $S_3$ . Donde se interceptan estas bielas se obtiene el punto fijo  $O''_2$  de  $S_2$ . Desde  $O''_2$  pasando por  $A_{2,4}$ , se transmite la biela  $\overline{O''_2 A_{2,4}}$  a  $S_4$ , y, desde  $O''_1$  pasando por  $A_{1,4}$  transmitimos a  $S_4$  la biela  $\overline{O''_1 A_{1,4}}$ . Ambas bielas se interceptan en el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . Cabe destacar que  $O''_4$  caía fuera de los límites del dibujo, por lo cual mostramos el detalle. De esta forma, cada chapa posee 2 puntos fijos, estando las mismas fijadas a tierra, y la cadena se puede decir que es cinemáticamente invariable.

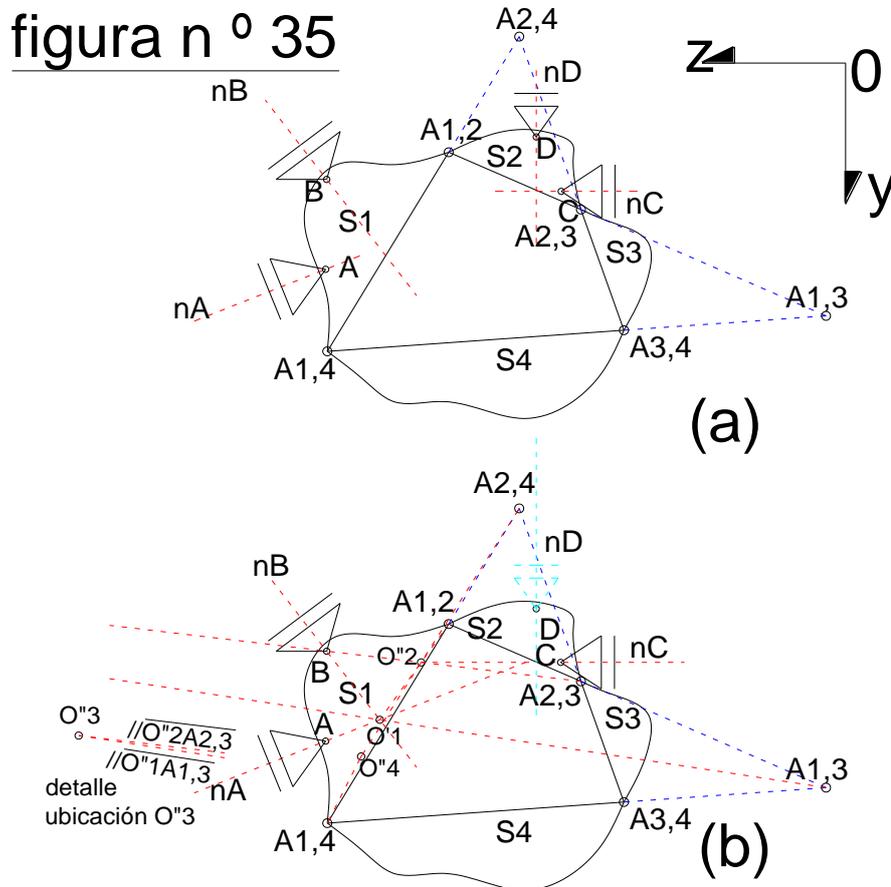
A continuación, analizaremos la distribución **2-2-0-0**. En la figura n ° 34(a), mostramos esta distribución con 2 vínculos móviles en  $S_1$ , y 2 más en  $S_2$ .

figura n<sup>o</sup> 34



Observamos en la figura n<sup>o</sup> 34(b) que hemos suprimido el vínculo  $C$ , transformando la cadena en hipostática. En  $S_1$ , donde se interceptan las normales  $n_A$  y  $n_B$  se obtiene el punto fijo  $O'_1$  de  $S_1$ , desde aquí, transmitimos a través de  $A_{1,2}$  la biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  que intercepta la normal  $n_D$  del vínculo D en el punto fijo  $O'_2$  de  $S_2$ . Desde aquí, transmitimos a través de  $A_{2,3}$  a  $S_3$  la biela  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$ , y, análogamente desde  $O'_1$  a través de  $A_{1,3}$  transmitimos la biela  $\overline{O'_1 A_{1,3}}$  a  $S_3$ , y, donde se interceptan estas 2 bielas tenemos el punto fijo  $O'_3$  de  $S_3$ . Desde  $O'_3$ , y a través de  $A_{3,4}$  transmitimos la biela  $\overline{O'_3 A_{3,4}}$  a  $S_4$ . Análogamente, desde  $O'_2$  transmitimos a través de  $A_{2,4}$  la biela  $\overline{O'_2 A_{2,4}}$  a  $S_4$ . Estas 2 bielas se interceptan en el punto fijo  $O'_4$  de  $S_4$ . De esta forma, cada chapa posee un punto fijo.

A continuación, en la figura n ° 35(b) analizamos el caso suprimiendo el vínculo **D** de  $S_2$ .

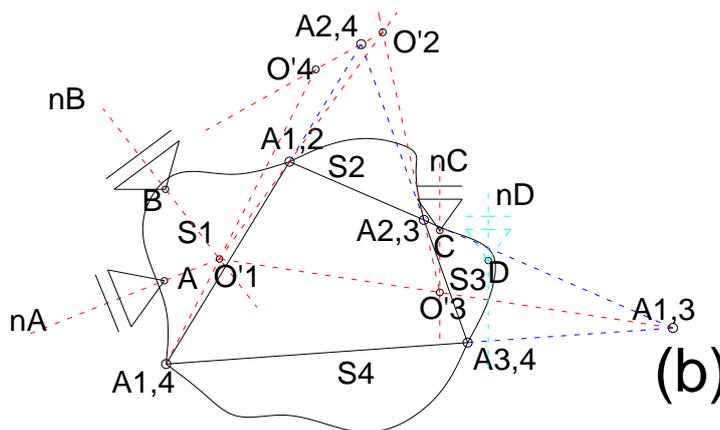
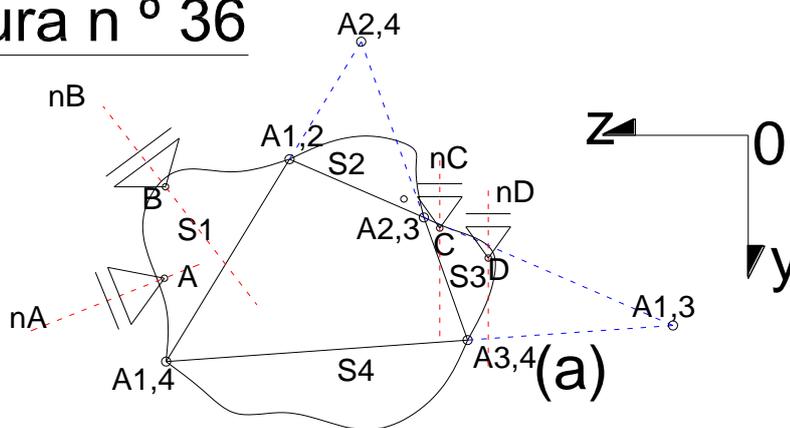


Donde se interceptan  $n_A$  y  $n_B$ , se encuentra el punto fijo  $O''_1$  de  $S_1$ , y, desde aquí, transmitimos a través de  $A_{1,2}$  la biela  $\overline{O''_1 A_{1,2}}$ , que se intercepta con la normal  $n_C$  en el punto fijo  $O''_2$  de  $S_2$ . Transmitimos desde  $O''_2$  a través de  $A_{2,3}$  la biela  $\overline{O''_2 A_{2,3}}$  a  $S_3$ , y desde  $O''_1$ , transmitimos a través de  $A_{1,3}$  a  $S_3$  la biela  $\overline{O''_1 A_{1,3}}$ , y, donde interceptan ambas bielas tenemos el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$  (el mismo, por encontrarse fuera de los límites del dibujo, lo representamos en el detalle adjunto). Ahora, desde  $O''_2$ , a través de  $A_{2,4}$  transmitimos a  $S_4$  la biela  $\overline{O''_2 A_{2,4}}$ , y, desde  $O''_1$ , a través de  $A_{1,4}$  a  $S_4$  la biela  $\overline{O''_1 A_{1,4}}$ . Donde se

interceptan estas bielas, se encuentra el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . De esta forma, cada chapa posee 2 puntos fijos, estando fijas a tierra cada una de ellas, quedando, en consecuencia la cadena cinemáticamente invariable.

A continuación, analizamos la distribución **2-0-2-0**. En la figura n<sup>o</sup> 36(a) consideramos una cadena con 2 vínculos de 1<sup>o</sup> especie en  $S_1$ , y 2 vínculos de 1<sup>o</sup> especie en  $S_3$ .

figura n<sup>o</sup> 36

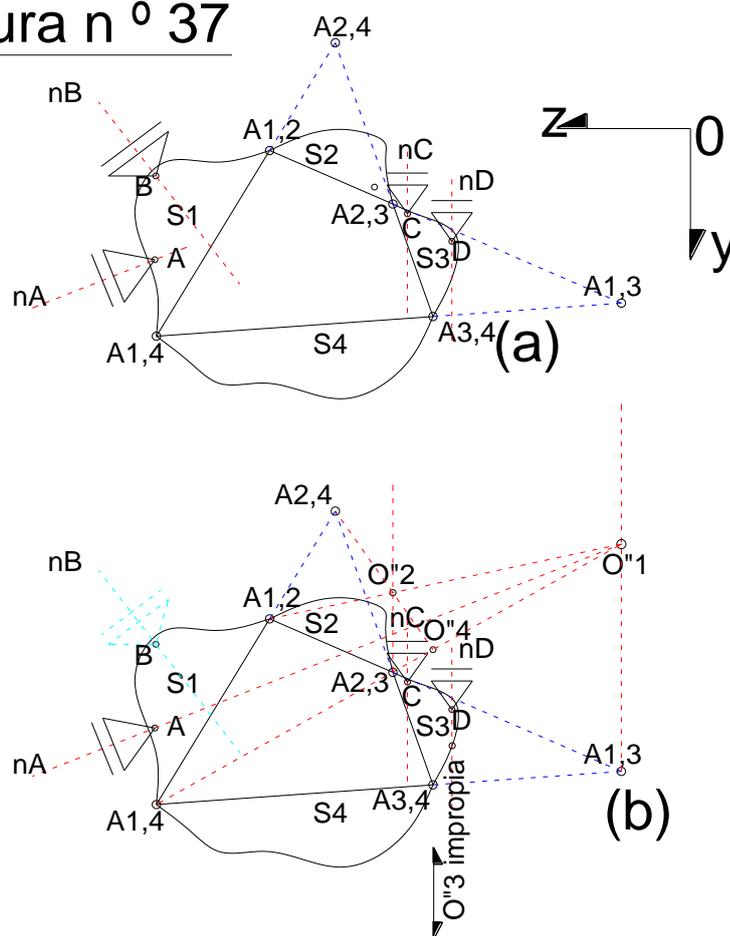


En la figura n<sup>o</sup> 36(b), hemos suprimido el vínculo **D** con lo que la cadena queda hipostáticamente sustentada. Luego, donde se interceptan las normales  $n_A$  y  $n_B$  obtenemos el punto fijo  $O'_1$  de  $S_1$ . Desde aquí, llevamos a través de  $A_{1,3}$  la biela  $\overline{O'_1 A_{1,3}}$  a  $S_3$  que se intercepta con la normal del vínculo **C** en el punto fijo  $O'_3$  de  $S_3$ . Desde éste último, llevamos por  $A_{2,3}$  la biela  $\overline{O'_3 A_{2,3}}$  a

$S_2$ , y, desde  $O'_1$  transmitimos a través de  $A_{1,2}$  a  $S_2$  la biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  que se intercepta con la anterior biela en el punto fijo  $O'_2$  de  $S_2$ . Desde este punto fijo, transmitimos a través de  $A_{2,4}$  la biela  $\overline{O'_2 A_{2,4}}$ , y, desde  $O'_1$  transmitimos a través de  $A_{1,4}$  la biela  $\overline{O'_1 A_{1,4}}$  que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O'_4$  de  $S_4$ , quedando, de esta forma, cada chapa con 1 punto fijo.

En la figura n ° 37(b), hemos suprimido el vínculo de primera especie **B**, de  $S_1$  para realizar un análisis análogo al anterior.

figura n ° 37



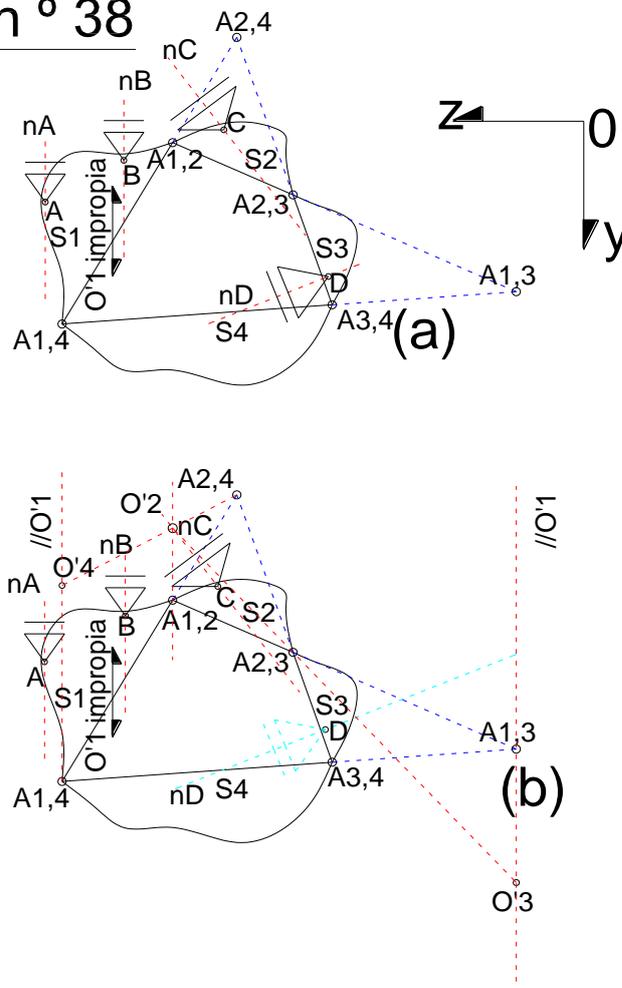
En la figura n ° 37(b), transmitimos a  $S_1$  a través de  $A_{1,3}$  la biela  $\overline{O''_3 A_{1,3}}$ , que se intercepta con  $n_A$  en el punto fijo de  $S_1$ ,  $O''_1$ . El punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$  es impropio en este caso, cuya dirección se indica en la figura. Desde  $O''_1$ ,

pasando por  $A_{1,2}$ , transmitimos a  $S_2$  la biela  $\overline{O''_1 A_{1,2}}$ , y, desde  $A_{2,3}$  transmitimos a  $S_2$  la biela  $\overline{O''_3 A_{2,3}}$  paralela a la dirección impropia de  $O''_3$ , que se intercepta con la anterior biela en el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . De esta forma, cada chapa tiene un punto fijo.

Considerando estos análisis, cada chapa posee 2 puntos fijos a tierra, estando estas fijas, en consecuencia, la cadena es cinemáticamente invariable.

A continuación, analizamos la distribución **2-1-1-0**. En la figura n° 38(a), observamos una cadena cinemática con dos vínculos móviles paralelos en  $S_1$ , y un vínculo de primera especie en  $S_2$ , y otro vínculo de 1° especie en  $S_3$ .

figura n° 38

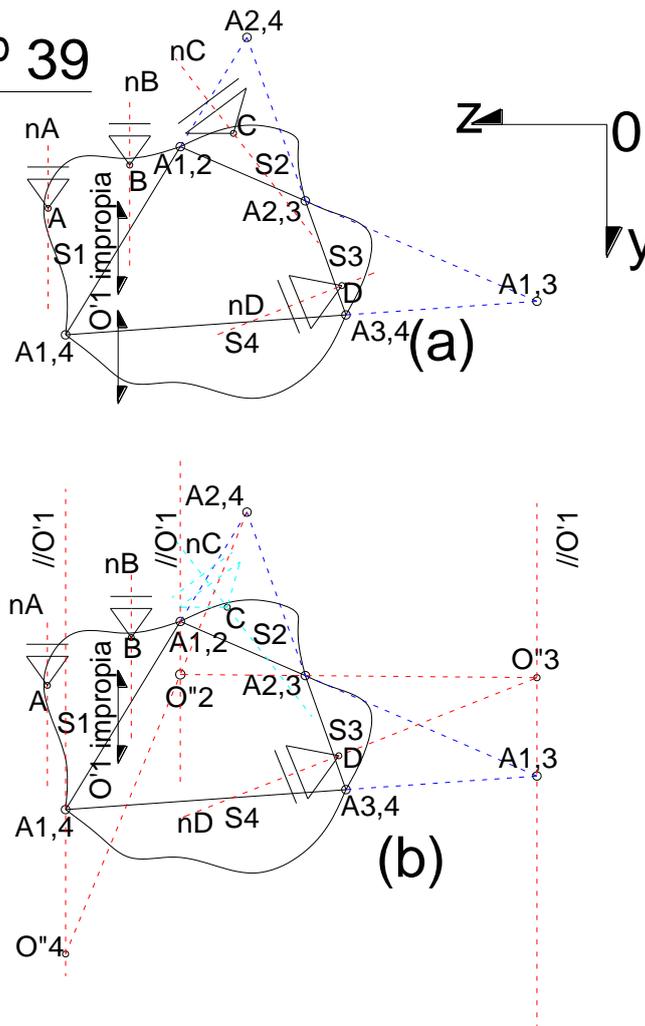


En la figura n° 38(b), Suprimimos el vínculo móvil **D** en  $S_3$ . Transmitimos, a

través de  $A_{1,2}$ , la biela  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$ , paralela a la dirección impropia de  $O'_1$ , que se intercepta con la normal  $n_C$  en el punto fijo  $O'_2$  de  $S_2$ . Desde este punto fijo, y, a través de la articulación  $A_{2,3}$ , transmitimos la biela  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$  a  $S_3$ , y, pasando por  $A_{1,3}$ , transmitimos una biela paralela a la dirección del punto fijo impropio  $O'_1$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O'_3$  de  $S_3$ . Luego, desde  $O'_2$ , a través de  $A_{2,4}$ , transmitimos a  $S_4$  la biela  $\overline{O'_2 A_{2,4}}$ , y, desde  $A_{1,4}$ , transmitimos una biela paralela a la dirección del punto fijo impropio  $O'_1$ , que se intercepta con la anterior biela en el punto fijo  $O'_4$  de  $S_4$ , quedando, de esta manera cada chapa con un punto fijo.

En el próximo análisis, suprimimos el vínculo móvil **C** en  $S_2$  como se indica en la figura n ° 39(b).

figura n ° 39

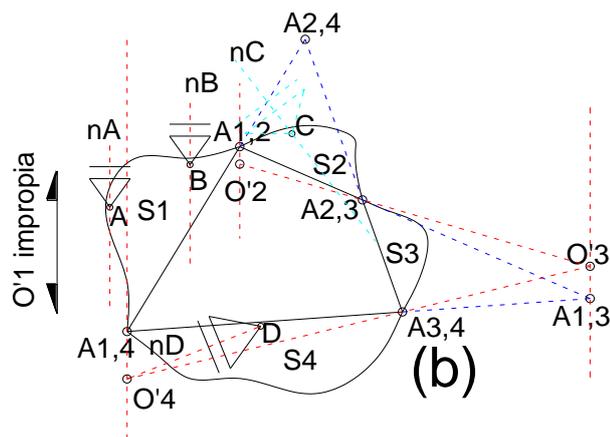
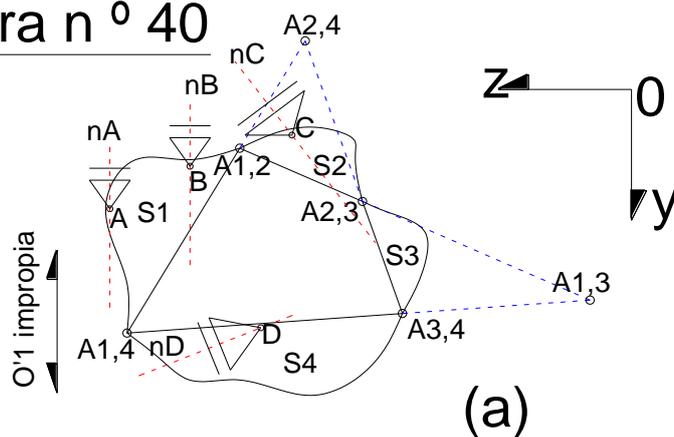


Luego, en la figura n ° 39(b), transmitimos a  $S_3$  a través de  $A_{1,3}$  una biela paralela a la dirección del punto fijo impropio  $O'_1$  que se intercepta con la normal  $n_D$  en el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$ , desde aquí, transmitimos a  $S_2$ , y, a través de  $A_{2,3}$  la biela  $\overline{O''_3 A_{2,3}}$ , y, a través de  $A_{1,2}$ , transmitimos una biela paralela a la dirección del  $O'_1$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O''_2$  de  $S_2$ . Seguidamente, desde  $O''_2$ , a través de  $A_{2,4}$ , transmitimos la biela  $\overline{O''_2 A_{2,4}}$ , y, pasando por la articulación  $A_{1,4}$  transmitimos la biela paralela a la dirección del impropio  $O'_1$ , interceptándose con la biela anterior en el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . De esta forma, las chapas  $S_2$ ,  $S_3$ , y  $S_4$ , tienen 2 puntos fijos a tierra cada una de ellas, estando fijas a tierra, en consecuencia, como las articulaciones  $A_{1,2}$  y  $A_{1,4}$ , pertenecen a las

chapas  $S_1; S_2$ , y  $S_1; S_4$  respectivamente, la chapa  $S_1$  posee 3 puntos fijos a tierra, con lo que la misma permanece fija a tierra también, y, en consecuencia, la cadena cinemática es cinemáticamente invariable.

A continuación, analizamos la distribución **2-1-0-1**. En la figura n ° 40(a), observamos una cadena cinemática con dos vínculos móviles paralelos en  $S_1$ , y un vínculo de primera especie en  $S_2$ , y otro vínculo de 1 ° especie en  $S_4$ .

figura n ° 40

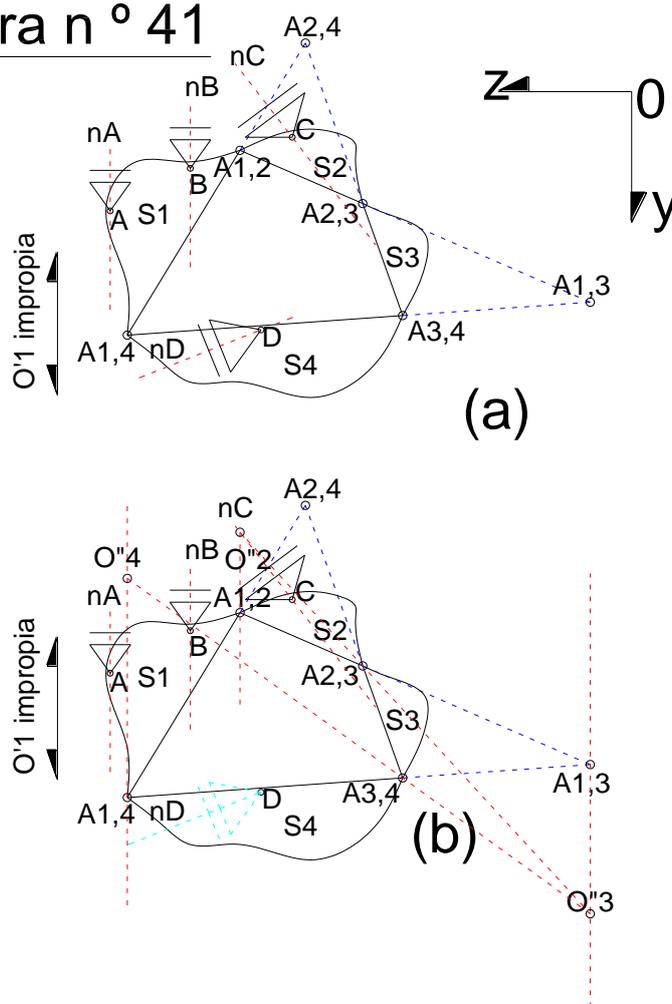


En la figura n ° 40(b) eliminamos el vínculo móvil **C** de  $S_2$  transformando la cadena cinemática en isostática. Luego, transmitimos una biela paralela a la dirección impropia de  $O'_1$  a través de  $A_{1,4}$  a  $S_4$ , que se intercepta con la normal  $n_D$  en el punto fijo  $O'_4$  de  $S_4$ . Desde  $O'_4$  transmitimos a  $S_3$  la biela  $\overline{O'_4 A_{3,4}}$  a través de  $A_{3,4}$ , y, por  $A_{1,3}$ , transmitimos una biela paralela a la

dirección de  $O'_1$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O'_3$  de  $S_3$ . Desde  $O'_3$ , pasando por  $A_{2,3}$ , transmitimos a  $S_2$  la biela  $\overline{O'_3 A_{2,3}}$ , y, transmitimos desde  $A_{1,2}$  una biela a  $S_2$  paralela a la dirección del punto fijo impropio  $O'_1$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O'_2$  de  $S_2$ , teniendo, de esta forma, cada chapa un punto fijo.

A continuación, en la figura n ° 41(b), repetimos el procedimiento, sustituyendo, esta vez el vínculo móvil **D** de  $S_4$ .

figura n ° 41

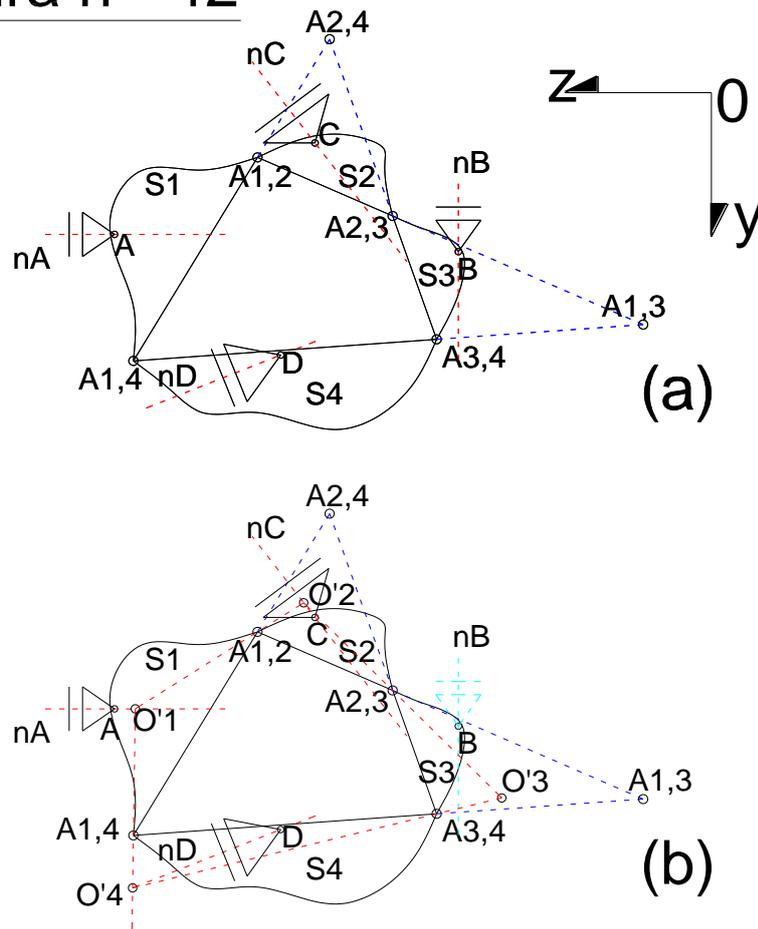


Según podemos observar en la figura n ° 41(b), transmitimos a través de  $A_{1,2}$ , a  $S_2$  una biela paralela a la dirección impropia  $O''_1$ , que intercepta la normal

$n_c$  en el punto fijo  $O''_2$  de  $S_2$ . Desde  $O''_2$ , a través de  $A_{2,3}$  transmitimos a  $S_3$  la biela  $\overline{O''_2 A_{2,3}}$ , y, a través de  $A_{2,3}$ , transmitimos una biela paralela a la dirección del impropio  $O'_1$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$ . Desde  $O''_3$ , a través de  $A_{3,4}$ , transmitimos la biela  $\overline{O''_3 A_{3,4}}$  a  $S_4$ , y, a través de  $A_{1,4}$  transmitimos a  $S_4$  una biela paralela a la dirección impropia de  $O'_1$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . De esta manera, las chapas  $S_2, S_3$ , y  $S_4$  tienen cada una 2 puntos fijos a tierra, y, siendo que, sus articulaciones  $A_{1,2}, A_{1,3}$ , y  $A_{1,4}$  pertenecen tanto a estas chapas como a  $S_1$ , entonces, esta última posee 3 puntos fijos a tierra, y, en consecuencia, la cadena cinemática es cinemáticamente invariable.

Para finalizar, analizaremos la distribución **1-1-1-1**. En la figura n ° 42(a), observamos la cadena cinemática con un vínculo móvil en cada chapa.

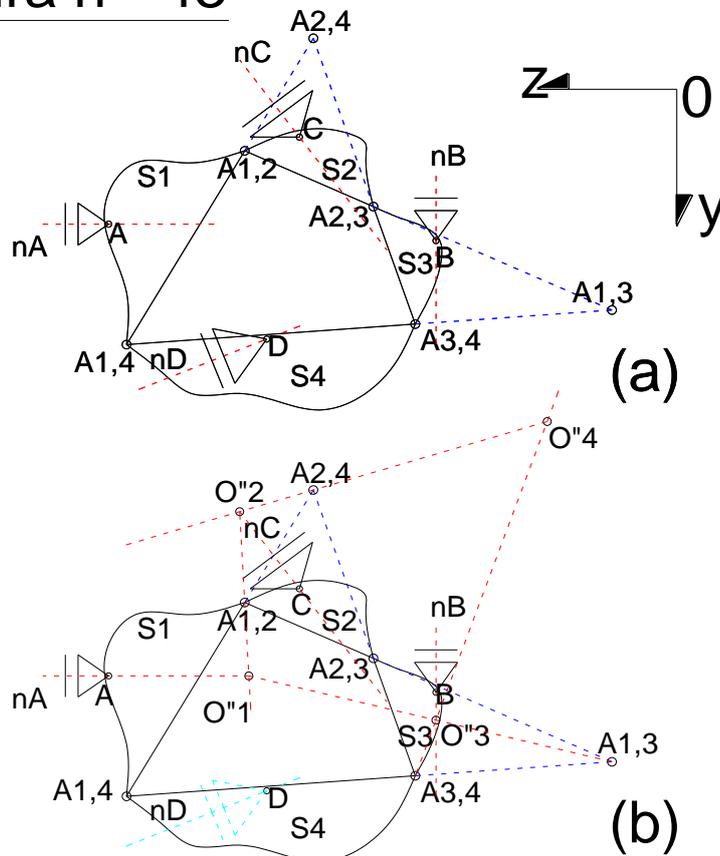
figura n ° 42



Considerando el procedimiento utilizado para determinar puntos fijos en las chapas, a diferencia de los casos anteriores, ninguna chapa posee un apoyo fijo, por lo que debemos considerar que la cadena actúa de forma tal que provoca un punto fijo en uno de los vínculos. En la figura n ° 42(b), suprimimos el vínculo **B** de  $S_3$ , y consideramos que hay un punto fijo  $O'_1$  en la normal  $n_A$  en  $S_1$ . Desde  $O'_1$  transmitimos a través de  $A_{1,2}$  y  $A_{1,4}$ , las bielas  $\overline{O'_1 A_{1,2}}$  y  $\overline{O'_1 A_{1,4}}$  a  $S_2$  y  $S_4$  respectivamente, que se interceptan con las normales  $n_C$  y  $n_D$  de estas chapas, en los respectivos puntos fijos  $O'_2$  y  $O'_4$ . Desde  $O'_4$  transmitimos a  $S_3$ , a través de  $A_{3,4}$ , la biela  $\overline{O'_4 A_{3,4}}$ , y desde  $O'_2$  transmitimos, también a  $S_3$ , a través de  $A_{2,3}$ , la biela  $\overline{O'_2 A_{2,3}}$ , que se intercepta con la biela anterior en el punto fijo  $O'_3$ . De esta forma, cada chapa tiene un punto fijo.

En la figura n ° 43(b), repetimos el procedimiento, suprimiendo el vínculo **D** en  $S_4$ .

figura n ° 43



En el sistema consideremos un punto fijo  $O''_2$ . Desde  $O''_2$ , y, a través de  $A_{1,2}$  y  $A_{2,4}$ , se transmiten a  $S_1$  y  $S_4$  las bielas  $\overline{O''_2 A_{1,2}}$  y  $\overline{O''_2 A_{2,4}}$ . La biela  $\overline{O''_2 A_{1,2}}$  se intercepta con la normal  $n_A$  en el punto fijo  $O''_1$  de  $S_1$ . Desde  $O''_1$  transmitimos a través de  $A_{1,3}$ , la biela  $\overline{O''_1 A_{1,3}}$  que se intercepta con la normal  $n_B$  en el punto fijo  $O''_3$  de  $S_3$ . Desde  $O''_3$ , a través de  $A_{3,4}$  transmitimos la biela  $\overline{O''_3 A_{3,4}}$  que se intercepta con la biela  $\overline{O''_2 A_{2,4}}$  en el punto fijo  $O''_4$  de  $S_4$ . De esta forma, cada chapa posee 2 puntos fijos a tierra, en consecuencia, la cadena cinemática se encuentra cinemáticamente invariable.

**Ecuaciones de equilibrio en una cadena cinemática cerrada de 4 chapas**

**Ecuaciones de equilibrio absoluto**

Estas, no son diferentes a las ecuaciones que estudiamos en casos anteriores,

$$(13) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \\ \sum \text{Mom}^c = 0 \end{cases}$$

**Ecuaciones de equilibrio relativo**

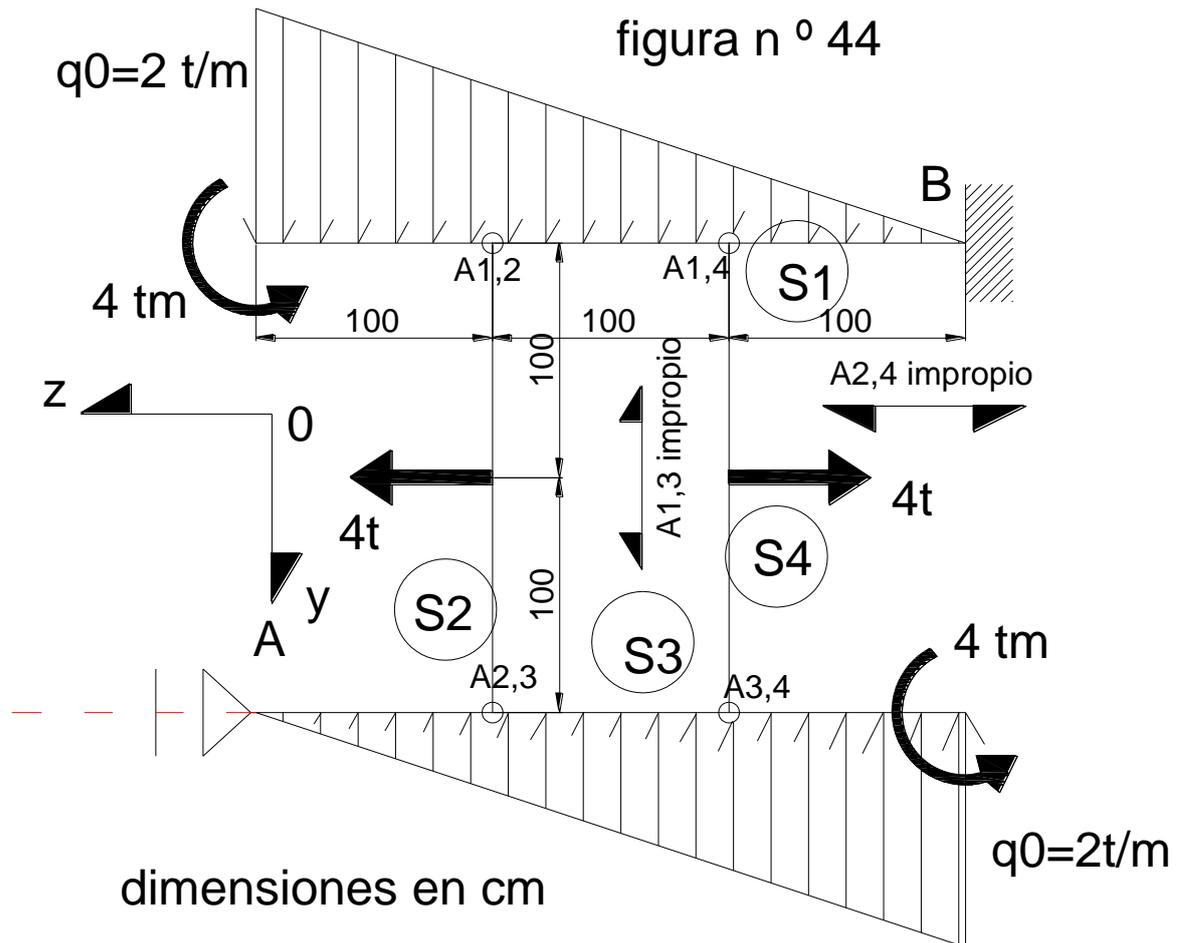
Entre estas ecuaciones, podemos inferir que son necesarias determinar las reacciones de vínculo internas para poder calcular las reacciones de vínculo externas, para lo cual se presentan varias alternativas para plantear las mismas, como ser,

$$(14) \begin{cases} \sum \text{Mom}_{S_1}^{A_{1,2}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_2}^{A_{1,2}} = 0 & ; \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_4}^{A_{1,2}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_4+S_3}^{A_{1,2}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_2+S_3}^{A_{1,2}} = 0 & ; \\ \sum \text{Mom}_{S_2+S_3+S_4}^{A_{1,2}} = 0 & ; \\ \sum \text{Mom}_{S_1}^{A_{1,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_3}^{A_{1,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_2}^{A_{1,3}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_4}^{A_{1,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_2+S_3}^{A_{1,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_3+S_2+S_4}^{A_{1,3}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1}^{A_{1,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_4}^{A_{1,4}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_3}^{A_{1,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_2}^{A_{1,4}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_4+S_2+S_3}^{A_{1,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_3+S_4}^{A_{1,4}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_2}^{A_{2,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_3}^{A_{2,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_2}^{A_{2,3}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_4}^{A_{2,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_3}^{A_{2,3}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_3+S_4}^{A_{2,3}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_2}^{A_{2,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_4}^{A_{2,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_3}^{A_{2,4}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_3}^{A_{2,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_4}^{A_{2,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_4}^{A_{2,4}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_3}^{A_{3,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_4}^{A_{3,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_4}^{A_{3,4}} = 0 \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_4}^{A_{3,4}} = 0 & ; & \sum \text{Mom}_{S_1+S_3}^{A_{3,4}} = 0 & ; \\ \sum \text{Mom}_{S_1+S_2+S_3}^{A_{3,4}} = 0 \end{cases}$$

Ilustraremos estos conceptos con un ejemplo numérico.

**Problema de aplicación n ° 3.** Una estructura que se muestra en la figura n ° 44 consta de un empotramiento en la chapa  $S_1$ , un vínculo de 1 ° especie en  $S_3$ , y solicitado como se indica. Se pide;

- \* a) Determinar las reacciones de vínculo internas en las articulaciones;
- \* b) Determinar las reacciones de vínculo externas.



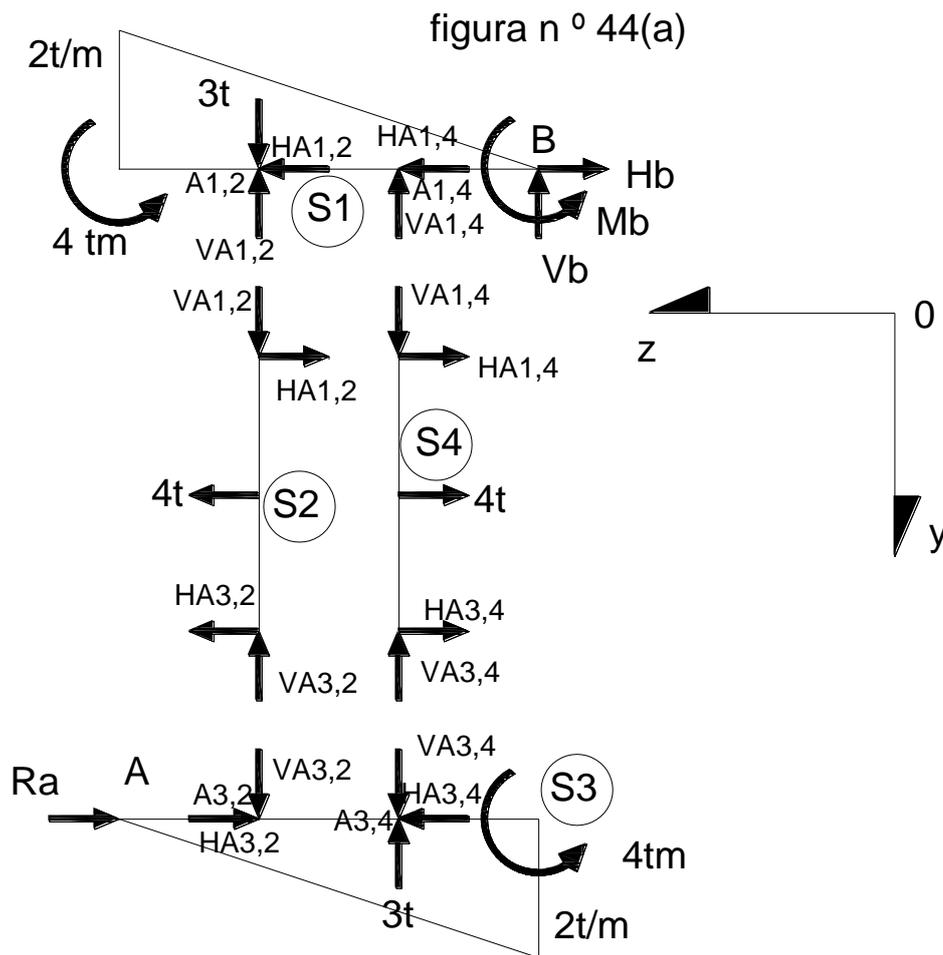
### Solución

- \* 1 °) *Análisis cinemático*

La chapa  $S_1$  se encuentra con un empotramiento que restringe toda posibilidad de movimiento, en consecuencia, sus articulaciones  $A_{1,2}$ ,  $A_{1,4}$  y  $A_{1,3}$  son puntos fijos de la misma. Llevando una biela paralela a la dirección impropia  $A_{1,3}$  que se intercepta con la normal en  $\mathbf{A}$  en el punto fijo  $O_3$  de  $S_3$ . La normal del apoyo móvil en  $\mathbf{A}$  no es paralela a la dirección impropia de  $A_{1,3}$ , por lo que no existe vinculación aparente. Luego,  $S_3$  posee 2 puntos fijos a tierra, con lo que la misma está fija, lo mismo que sus articulaciones  $A_{2,3}$ ,  $A_{3,4}$ . Al ser las articulaciones puntos fijos de 2 chapas, la chapas  $S_2$  y  $S_4$  poseen 2 puntos fijos cada una, que son sus articulaciones, por consiguiente, las mismas están fijadas a tierra, y la cadena es cinemáticamente invariable.

**\* 2 °) diagrama de cuerpo libre.**

El mismo se muestra en la figura n ° 44(a), donde ponemos en evidencia las reacciones de vínculo externas e internas, y reemplazamos las mismas por fuerzas desconocidas, a la vez que las cargas repartidas las reemplazamos por su equivalente concentrada en su baricentro.



\* 3 °) *Análisis del equilibrio*

**Ecuaciones de equilibrio absoluto**

$$(A3) \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 3t - 3t + V_B = 0 \rightarrow V_B = 0 \\ \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow 4t - 4t - H_B - R_A = 0 \rightarrow H_B = -R_A \\ \sum \text{Mom}^B = 0 \rightarrow M_B + 4tm + 4tm + R_A \cdot 2m + 4t \cdot 1m - 4t \cdot 1m + 3t \cdot 2m - 3t \cdot 1m = 0 \\ M_B + 2R_A m = -11tm \end{array} \right.$$

**Ecuaciones de equilibrio relativo**

En chapa  $S_3$

$$(B3) \begin{cases} \sum Mom_{S_3}^{A_{3,4}} = 0 \rightarrow 4tm + V_{A_{3,2}} \cdot 1m = 0 \\ V_{A_{3,2}} = -4t \uparrow \text{ sentido opuesto al asignado} \\ \sum Mom_{S_3}^{A_{2,3}} = 0 \rightarrow -V_{A_{3,4}} \cdot 1m + 4tm + 3t \cdot 1m = 0 \\ V_{A_{3,4}} = 7t \end{cases}$$

En chapa  $S_2$

$$(C3) \begin{cases} \sum Mom_{S_2}^{A_{1,2}} = 0 \rightarrow -4t \cdot 1m - H_{A_{2,3}} \cdot 2m = 0 \rightarrow H_{A_{2,3}} = -2t \rightarrow \text{sentido opuesto} \\ \sum Mom_{S_2}^{A_{2,3}} = 0 \rightarrow 4t \cdot 1m - H_{A_{1,2}} \cdot 2m = 0 \rightarrow H_{A_{1,2}} = 2t \\ \sum Proj_{yy}^{S_2} = 0 \rightarrow V_{A_{2,3}} + V_{A_{1,2}} = 0 \rightarrow V_{A_{1,2}} = -4t \uparrow \text{ sentido opuesto} \end{cases}$$

En chapa  $S_4$

$$(D3) \begin{cases} \sum Mom_{S_4}^{A_{3,4}} = 0 \rightarrow -4t \cdot 1m - H_{A_{1,4}} \cdot 2m = 0 \rightarrow H_{A_{1,4}} = -2t \leftarrow \text{ sentido opuesto} \\ \sum Mom_{S_4}^{A_{1,4}} = 0 \rightarrow 4t \cdot 1m + H_{A_{3,4}} \cdot 2m = 0 \rightarrow H_{A_{3,4}} = -2t \leftarrow \text{ sentido opuesto} \\ \sum Proj_{yy}^{S_4} = 0 \rightarrow V_{A_{1,4}} - V_{A_{3,4}} = 0 \rightarrow V_{A_{1,4}} = 7t \end{cases}$$

En chapa  $S_1$

$$(E3) \begin{cases} \sum Proj_{zz}^{S_1} = 0 \rightarrow 2t - 2t - H_B = 0 \\ H_B = 0 \end{cases}$$

Luego, reemplazando en las ecuaciones de equilibrio absoluto (A3), resulta,

$$(E3) \begin{cases} R_A = 0 \\ M_A = -11tm \rightarrow \text{sentido giro horario.} \end{cases}$$

**\* 4 °) Verificación de las reacciones de vínculo en el equilibrio.**

Plantaremos las ecuaciones de equilibrio considerando fuerzas activas y reactivas considerando los valores y sentidos hallados de las reacciones,

$$(F3) \begin{cases} \sum Proj_{yy} = 0 \rightarrow 3t - 3t = 0 \text{ verifica} \\ \sum Proj_{zz} = 0 \rightarrow 4t - 4t = 0 \text{ verifica} \\ \sum Mom_A = 0 \rightarrow 4tm + 4tm + 4t \cdot 1m - 4t \cdot 1m - 3t \cdot 1m + 3t \cdot 2m - 11tm = 0 \text{ verifica} \end{cases}$$

Con (F3) observamos que el sistema se encuentra en equilibrio.

\* 5 °) **Diagrama de cuerpo libre de activas y reactivas.**

En la figura n ° 44(b) podemos observar esta situación con los vectores en su sentido definitivo, y magnitudes de las mismas.

