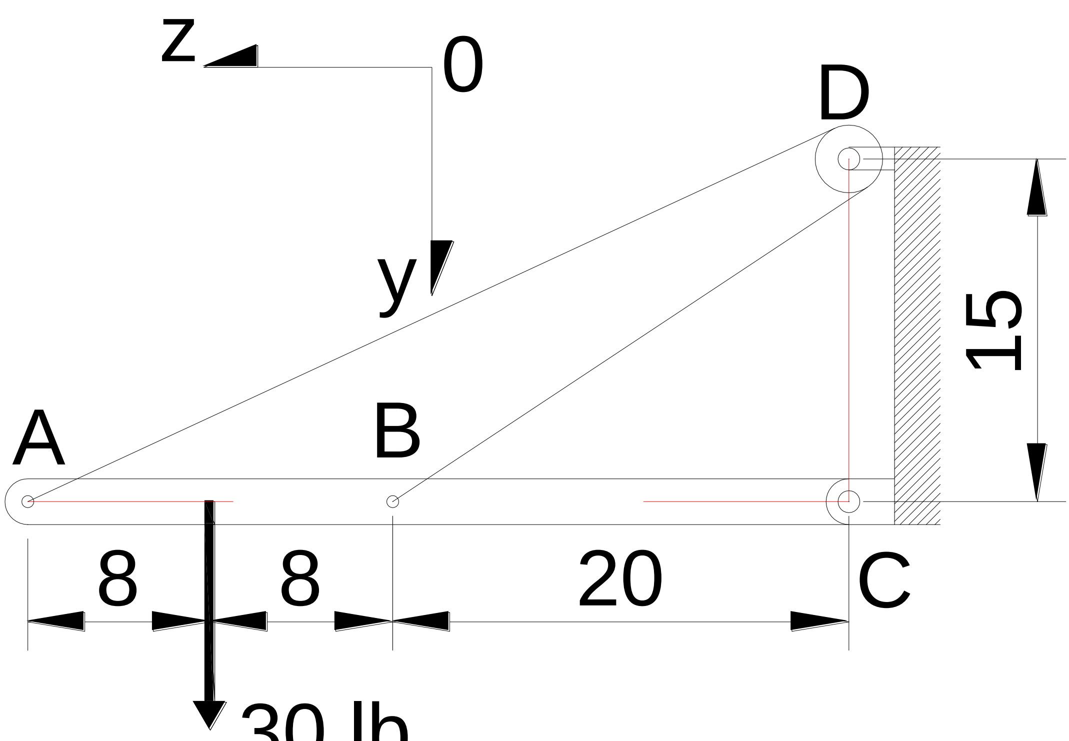
EJERCICIOS RESUELTOS DE ESTRUCTURAS FERROVIARIAS I.

REACCIONES DE VÍNCULO EN EL PLANO

NOTA: Estos ejercicios fueron extraídos del libro *MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, TOMO I, ESTÁTICA, Ferdinand P. Beer- E. Russell Johnston, Jr - Elliot R. Eisenberg, séptima edición, Editorial Mc Graw Hill, páginas 178 a 182.*

Problema n º 1: Determinar, a) las reacciones de vínculo en la rótula **C** de la estructura de la figura n º 1, que se trata de una barra con un peso de **30 libras** ubicado a **8"** del extremo A, que puede girar alrededor de **C**, y está soportada a su vez, por un cable ADB que pasa por una polea fija en D. b) Calcular la tensión en el cable **ADB**.

figura n º 1



longitudes en "

Solución

a) Análisis cinemático.

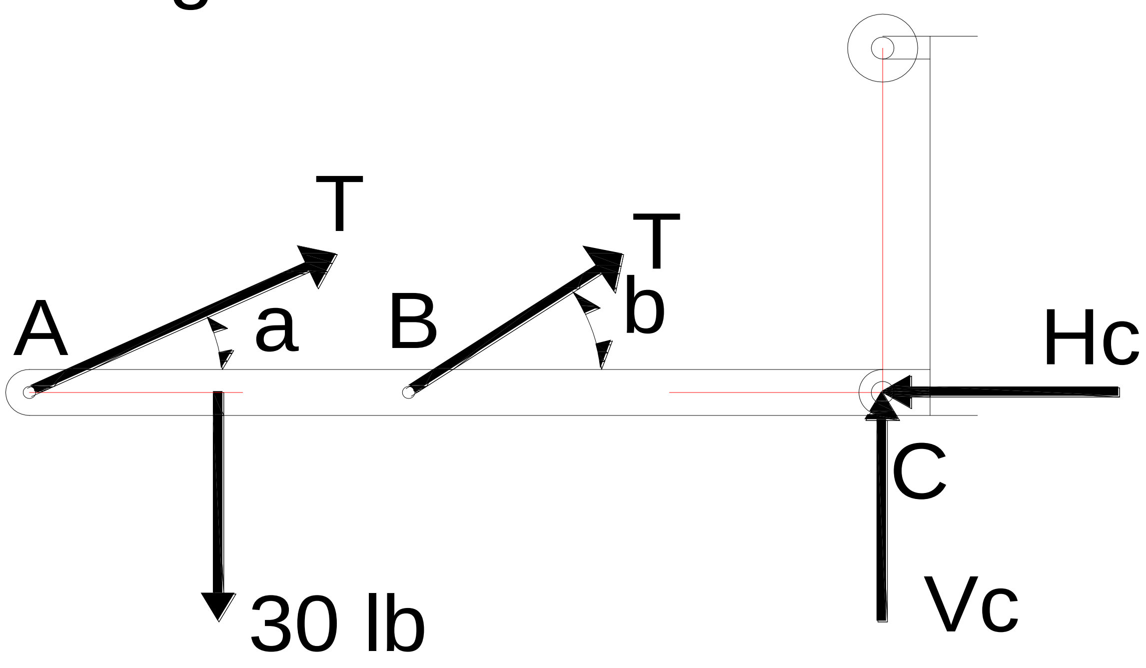
Se trata de una chapa articulada en **C** con un apoyo de segunda especie, con lo cual se la han restringido 2 grados de libertad. Luego posee una polea fija en **D**, con un cable que hace la función de biela **AD**, y **BD** como apoyo móvil. Se podría pensar que el sistema tiene cuatro condiciones de vínculo impuestas, pero al estar pasando el cable por la polea, La reacción **AD** y la reacción **BD** es la misma y se puede considerar como una sola reacción.

Ahora bien, debido a que las direcciones de **AD** y **BD** no concurren al apoyo fijo en **C**, no existe vinculación aparente en el sistema, y concluimos que el sistema es cinemáticamente invariable.

b) Diagrama de cuerpo libre.

En el mismo se reemplazan los apoyos fijos y móvil por fuerzas cuyas direcciones conocemos, pero asignando los sentidos de las mismas arbitrariamente. El mismo se muestra en la figura n º 1-a.

figura n º 1-a



3 º) Análisis del equilibrio. Determinación de las reacciones de vínculo en C.

Llamando **T** a la reacción en el cable, y $\hat{a}$ y $\hat{b}$ los correspondientes ángulos del cable con la barra **AC**, es decir **CAD** y **CBD** respectivamente, funciones trigonométricas son:

$$(1A)\begin{cases} sen\,\hat{a} = \dfrac{15}{\sqrt{15^2+36^2}} = \dfrac{15}{39} \;\; ; \; \cos\hat{a} = \dfrac{36}{39} \\ \operatorname{sen}\hat{b} = \dfrac{15}{\sqrt{15^2+20^2}} = \dfrac{15}{25} \;\; ; \; \cos\hat{b} = \dfrac{20}{25} \end{cases}$$

Ecuaciones de equilibrio absoluto. Mediante dos ecuaciones de sumatoria de proyecciones de fuerzas respecto a los ejes **z ; y**, y una ecuación de sumatoria de momentos respecto de un punto arbitrario determinamos los valores de las reacciones de vínculo, y la reacción **T**.

Comenzamos con la ecuación de sumatoria de momentos respecto de un punto arbitrario, que decidimos elegir el nodo **C** por conveniencia, al anularse los respectivos momentos de las proyecciones de la reacción en dicho nodo.

$$(1B)\ \sum \mathrm{Mom}^{\mathrm{C}} = 0 \quad \rightarrow \ -\mathrm{T}.\frac{15}{39}.36\,\mathrm{inch} - \mathrm{T}.\frac{15}{25}.20\,\mathrm{inch} + 30\mathrm{lbs}.28\,\mathrm{inch} = 0$$

Surgiendo de (1B),

$$T = \frac{30.28}{15\left(\dfrac{36}{39}+\dfrac{20}{25}\right)}\,lbs \cong 32{,}5\,\mathrm{lbs} \quad (1\mathrm{C})$$

Las ecuaciones de sumatoria de las proyecciones son:

$$(1D)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0 \ \rightarrow -\mathrm{T}.\dfrac{15}{39} - \mathrm{T}.\dfrac{15}{25} + 30\mathrm{lbs} - \mathrm{V}_{\mathrm{C}} = 0 \\ \sum \mathrm{Proy}_{zz} = 0 \ \rightarrow -\mathrm{T}.\dfrac{36}{39} - T.\dfrac{20}{25} + H_C = 0 \end{cases}$$

De (1D) se obtiene,

$$(1E)\begin{cases} V_C = -2lbs \quad \rightarrow \text{ sentido opuesto al asignado } \downarrow \\ \mathrm{H_C} = 56lbs \end{cases}$$

En cuanto a la reacción $\overrightarrow{R_C}$ en **C**, resulta,

$$(1F) \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{R_C}}\right| = \sqrt{2^2+56^2}\,lbs \cong 56{,}036lbs$$

Mientras que la dirección y sentido respecto de **+ z** de esta reacción son:

$$(1G) \quad \hat{\delta} = arc\,\mathrm{tg}\frac{2}{56} \cong 2{,}0454°$$

a fin de aclarar esta situación, representamos la reacción $\overrightarrow{R_C}$ en la figura n º 1-b.

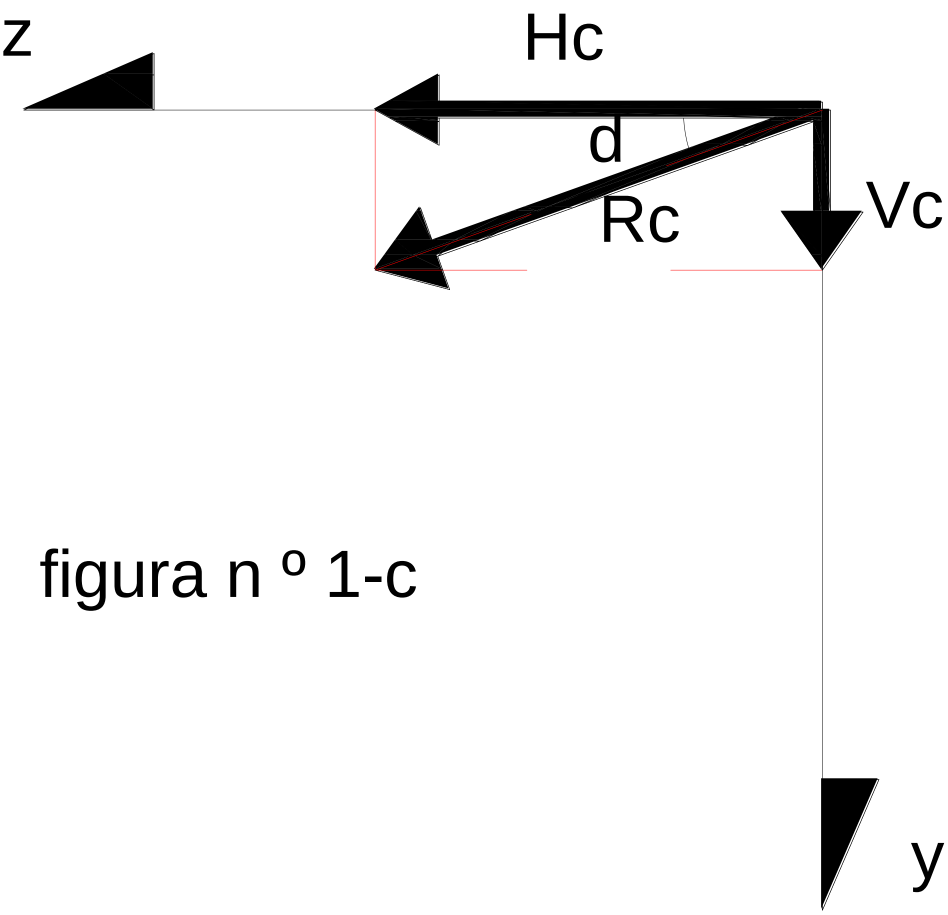
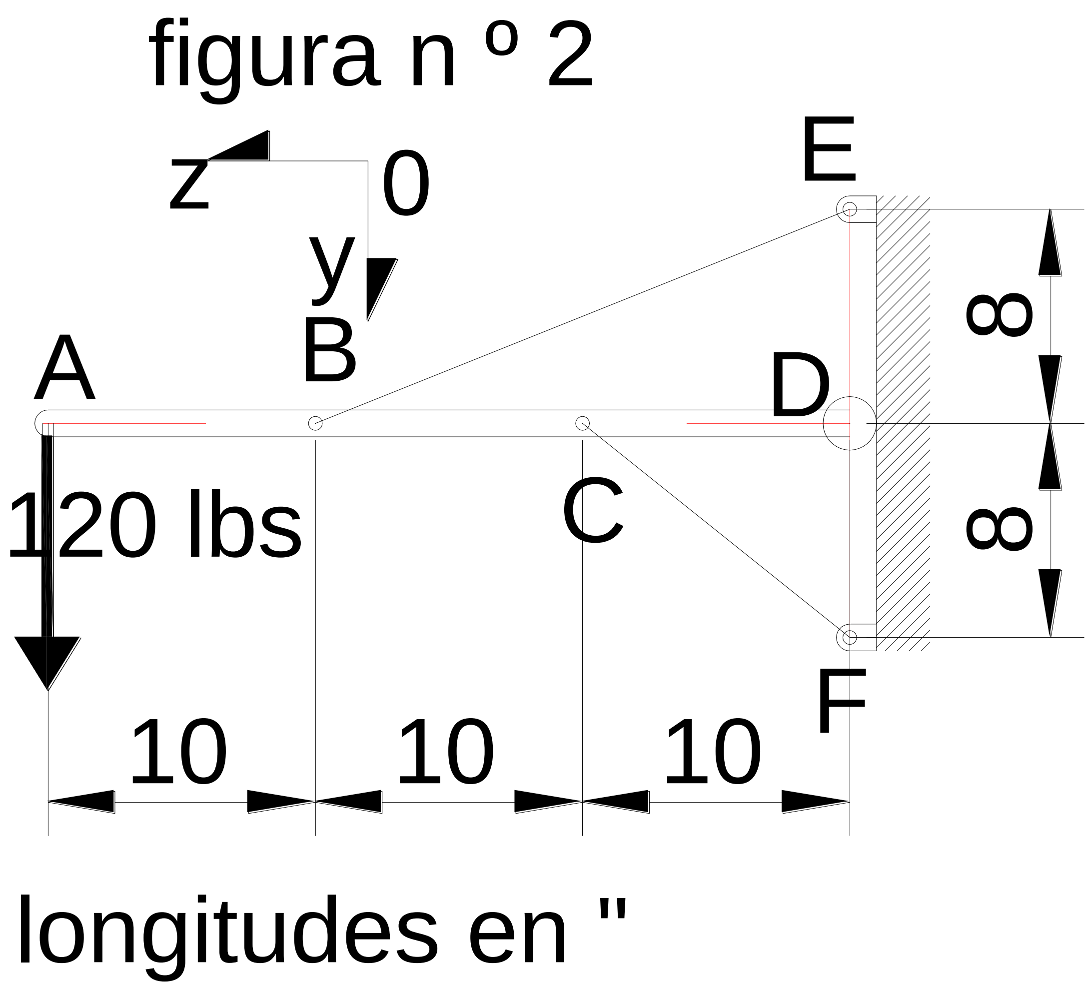


figura n º 1-c

<u>Problema n º 2:</u> Determínense la reacción de vínculo en **D**, y las tensiones en las cuerdas **BE** y **CF** en la estructura que se muestra en la figura n º 2.



Solución

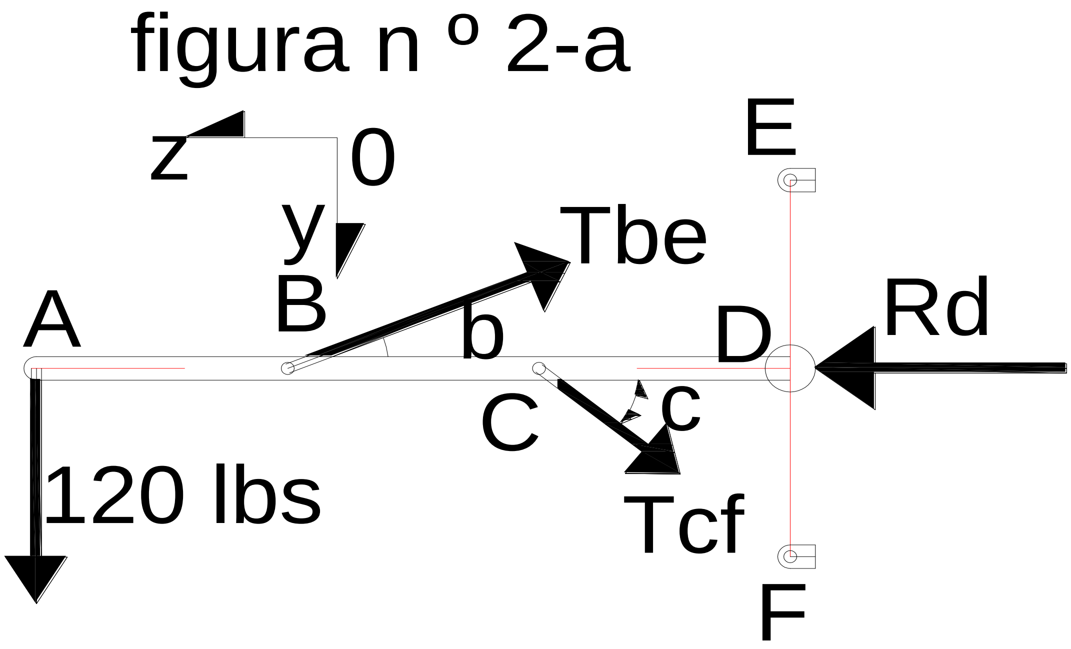
1 º) análisis cinemático.

La estructura del problema es una chapa con tres condiciones de vínculo externas impuestas, como vínculos de primera especie. La condición necesaria para que no haya vinculación aparente es que las direcciones **DC**, **EB**, y **FC** no sean concurrentes a un punto externo a la fuerza de 120 lbs. Como podemos observar, esta situación no ocurre en el problema. Luego, la condición suficiente para que tengamos solución única es que las tres direcciones mencionadas junto con la fuerza no formen un sistema de fuerzas concurrentes en un punto, condición que tampoco ocurre en el problema.

Concluimos, por tanto que el sistema es cinemáticamente invariable.

2 º) Diagrama de cuerpo libre.

En forma arbitraria asignamos los sentidos de la figura n º 2-a a las fuerzas desconocidas de las reacciones cuyas direcciones son **DC**, **EB**, y **FC**. Estas fuerzas se las denominaremos $T_{be}, \mathrm{T}_{\mathrm{cf}}$, , y R_{d} respectivamente.



3 º) Análisis del equilibrio.

Para resolver el problema bastará con dos ecuaciones de proyecciones de fuerzas según las direcciones de los ejes **z ; y**, además de una ecuación de sumatoria de momentos respecto de un punto arbitrario, como por ejemplo, **D**. Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio absoluto, determinamos los ángulos $\hat{b}$ y $\hat{\mathrm{c}}$ que forman respecto del eje z las cuerdas **BE** y **CF** respectivamente.

$$(2A)\begin{cases} sen\,\hat{\mathrm{b}} = \dfrac{8}{\sqrt{8^2+20^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{464}} \quad ; \quad \cos\hat{\mathrm{b}} = \dfrac{20}{\sqrt{464}} \\ \mathrm{sen}\,\hat{\mathrm{c}} = \dfrac{8}{\sqrt{8^2+10^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{164}} \quad ; \quad \cos\hat{\mathrm{c}} = \dfrac{10}{\sqrt{164}} \end{cases}$$

Continuando con las ecuaciones de equilibrio absoluto,

$$(2B)\begin{cases} \sum \mathrm{Pr}oy_{yy} = 0\ , \ \ \rightarrow 120\ \mathrm{lbs} + \mathrm{T_{cf}} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{164}} - \mathrm{T_{be}} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{464}} = 0 \\ \sum \mathrm{Proy_{zz}} = 0\ , \ \rightarrow \mathrm{R_d} - T_{be} \cdot \dfrac{20}{\sqrt{464}} - T_{cf} \cdot \dfrac{10}{\sqrt{164}} = 0 \\ \sum Mom^{A} = 0\ , \ \rightarrow \mathrm{T_{be}} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{464}}.10'' - T_{cf} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{164}}.20'' = 0 \end{cases}$$

Del sistema (2B) surge,

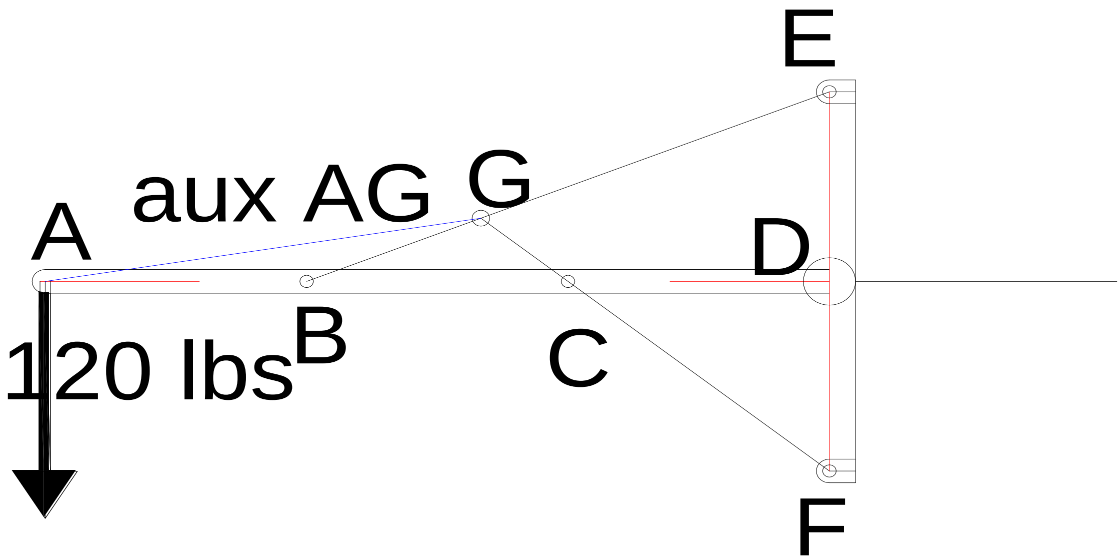
$$(2C)\begin{cases} T_{be} = 646{,}55\ \mathrm{lbs} \\ T_{cf} = 192{,}06\ \mathrm{lbs}\ \text{Con los sentidos asignados} \\ \mathrm{R_D} = 750{,}28\ \mathrm{lbs} \end{cases}$$

Adicionalmente, resolvemos en forma gráfica el ejercicio, para lo cual adoptamos las siguientes escalas:

$$(2D)\begin{cases} Esc\ \mathrm{T} = \dfrac{10\ \mathrm{lb}}{1\ \mathrm{cm}} \\ \mathrm{Esc\ Long} = \dfrac{1''}{1\ \mathrm{cm}} \end{cases}$$

En la figura n º 2-b, mostramos la construcción auxiliar del método de Cullmann, en que consideramos la descomposición de la fuerza $T = 120\ \mathrm{lbs}$ según las direcciones de la auxiliar **AG** y la **AD**, y luego la posterior descomposición de la auxiliar **AG** según las direcciones **BE** y **CF**. Finalmente, cambiando los sentidos de los vectores representativos de las reacciones $R_D, \mathrm{T_{be}}, \mathrm{y}\ \mathrm{T_{cf}}$ y multiplicando las longitudes de estos segmentos por la **Esc T**, se obtienen los módulos de las respectivas reacciones.

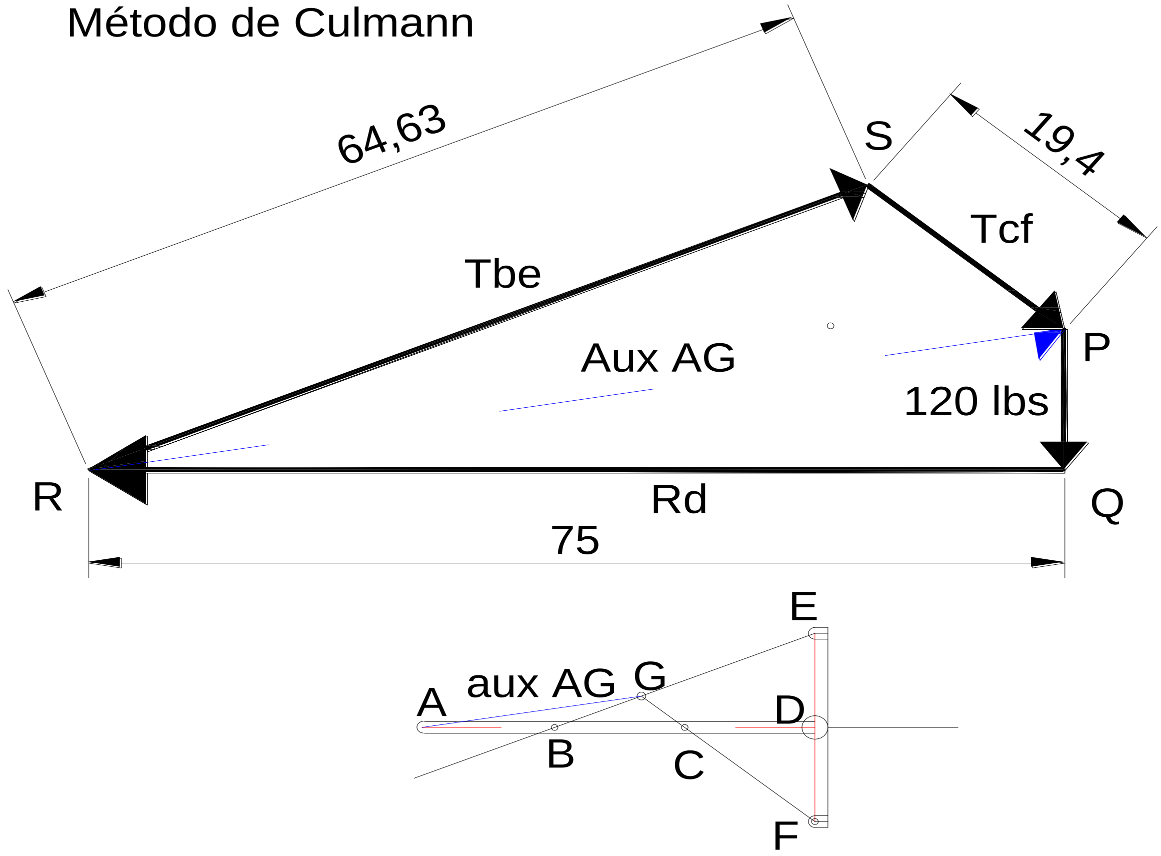
figura n º 2-b



En la figura n º 2-c se muestra la construcción del método de Culmann.

figura n º 2-c

Método de Culmann



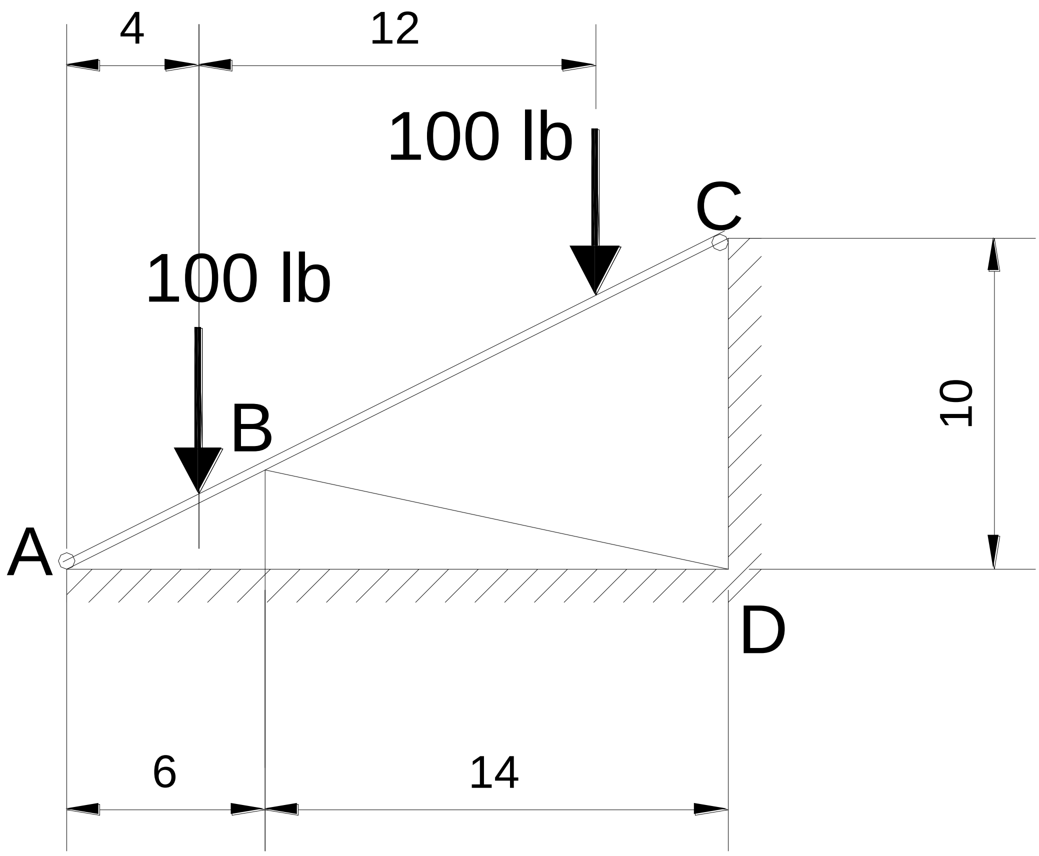
Para determinar las magnitudes de las reacciones mediante el método de Culmann, solo debemos multiplicar las longitudes de los segmentos de los vectores representativos de los mismos por la escala de fuerzas.

$$(2E)\begin{cases} T_{be} = \overline{QR}.Esc\,\mathrm{T} = 64{,}65cm.\dfrac{10lbs}{cm} \cong 646{,}5\ \mathrm{lbs} \\ \mathrm{T_{cf}} = \overline{RS}.Esc\,\mathrm{T} = 19{,}4cm.\dfrac{10lbs}{cm} \cong 194\ \mathrm{lbs} \\ \mathrm{R_d} = \overline{SP}.Esc\,\mathrm{T} = 75cm.\dfrac{10lbs}{cm} \cong 750\ \mathrm{lbs} \end{cases}$$

Según se puede concluir de los resultados obtenidos de las resoluciones analítica y gráfica, observamos que las mismas difieren sensiblemente. Esto se debe a los errores de instrumental, o de apreciación que aparecen al medir las longitudes de los segmentos de los vectores, debido a que solo se pueden estimar las lecturas entre dos divisiones sucesivas del instrumento, o aproximar por exceso o defecto a la división superior o inferior.

Problema n º 3: Determínense las reacciones de vínculo en los rodillos **A** y **C** de la estructura mostrada en la figura n º 3. También deberá determinarse la tensión en el cable **BD**.

figura n º 3



dimensiones en "

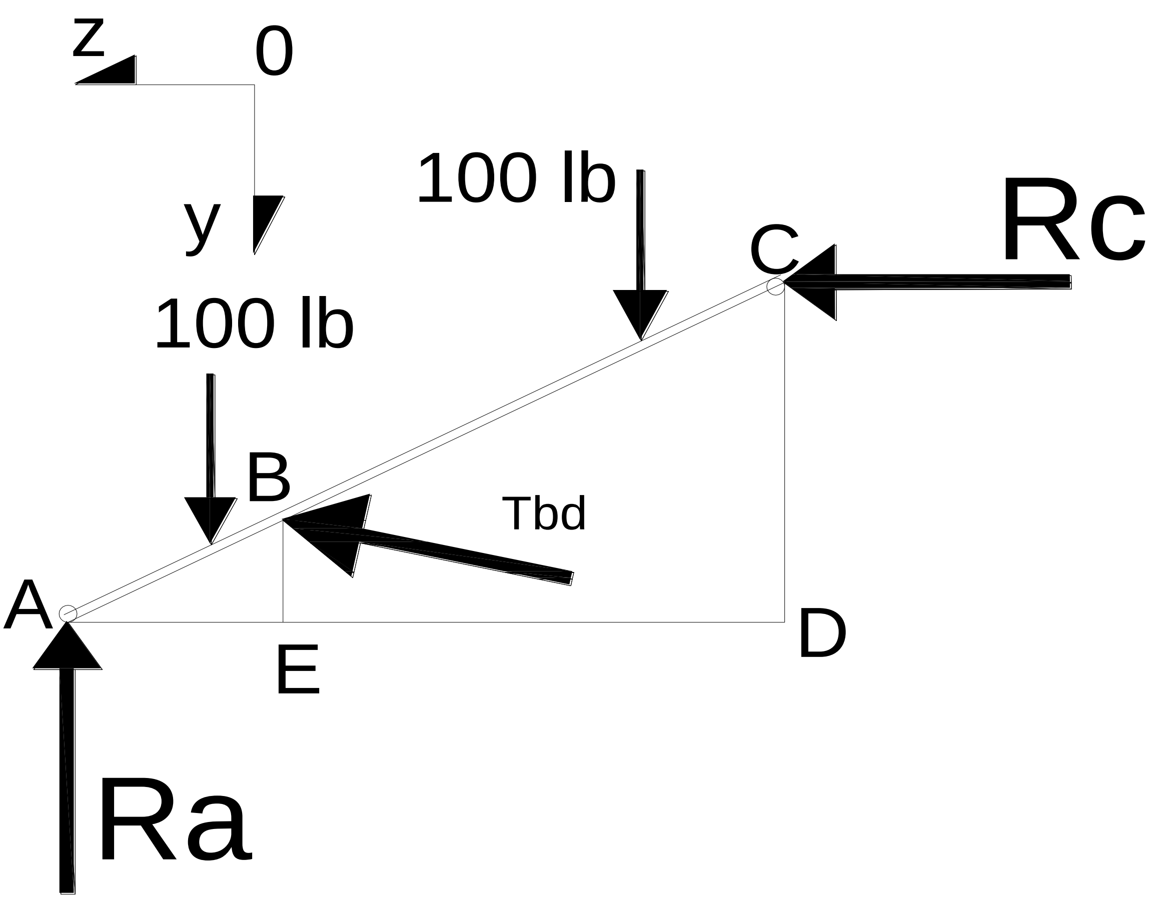
Solución

1 º) Análisis cinemático

Se trata de una barra con dos apoyos móviles cuyas normales están en **A** y **C**. La tercer reacción es en la dirección **BD**, siendo esta la tercer reacción de vínculo, cuya dirección se conoce. Como se observa, estas 3 direcciones no concurren en un mismo punto, por consiguiente, no existe la posibilidad que la barra gire alrededor del mismo, en consecuencia, afirmamos que el sistema es cinemáticamente invariable, y tiene solución única.

2 º) Diagrama de cuerpo libre

El mismo se puede observar en la figura n º 3-a figura n º 3-a



3 º) Análisis del equilibrio

En esta situación, bastará con plantear ecuaciones de equilibrio absoluto, pues se trata de una chapa. debido a ello, planteamos dos ecuaciones de sumatoria de las proyecciones según la terna coordenada, y una ecuación de momentos respecto de un punto arbitrario.

Previo todo cálculo, determinamos la altura BE como conveniencia para las proyecciones de las reacciones en los ejes coordenados.

$$(3A)\ \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AE}}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \quad \rightarrow \quad \frac{20}{6} = \frac{10''}{\overline{BE}} \quad \rightarrow \overline{\mathrm{BE}} = 3''$$

Entonces, las funciones trigonométricas quedan,

$$(3B)\begin{cases} sen\,\mathrm{B\hat{D}E} = \dfrac{3}{\sqrt{14^2+3^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{205}} \\ \cos\,\mathrm{B\hat{D}E} = \dfrac{14}{\sqrt{14^2+3^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{205}} \end{cases}$$

Ecuaciones de equilibrio absoluto

$$(3C)\begin{cases}\sum \mathrm{Proy}_{yy}=0\,,\ \rightarrow\ 200\,\mathrm{lb}-\mathrm{R}_{\mathrm{a}}+R_d\cdot\dfrac{3}{\sqrt{205}}=0\\ \sum \mathrm{Proy}_{zz}=0\,,\ \rightarrow\ \mathrm{R}_{\mathrm{C}}-R_d\cdot\dfrac{14}{\sqrt{205}}=0\\ \sum Mom^{D}=0\,,\rightarrow 100\,\mathrm{lb}.4''+100\,\mathrm{lb}.16''-\mathrm{R}_{\mathrm{a}}.20''+R_c.10''=0\end{cases}$$

Del sistema surge,

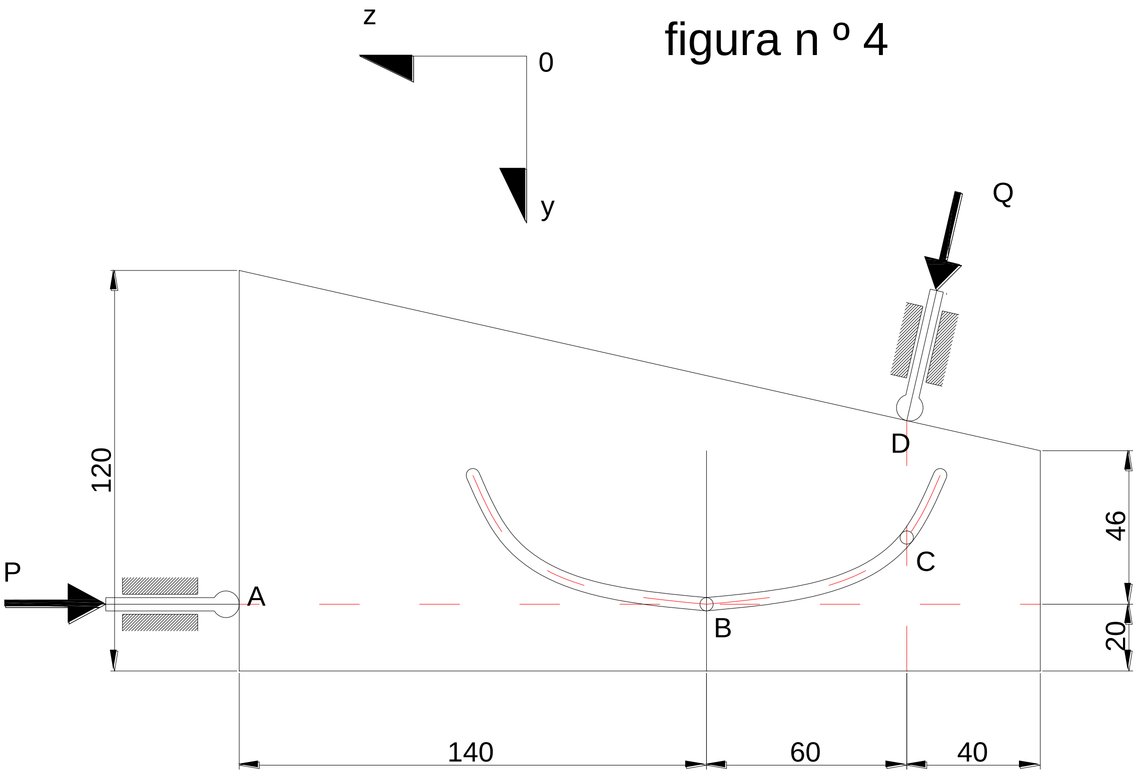
$$(3D)\begin{cases}R_a=275{,}27\,\mathrm{lb}\\ R_c=350{,}3\,\mathrm{lb}\\ T_{bd}=358{,}48\,\mathrm{lb}\end{cases}$$

<u>Problema n º 4:</u> La placa de la figura n º 4, posee una ranura en forma parabólica que ajusta a dos pernos fijos sin fricción **B** y **C**. La ecuación de la parábola es $y=\dfrac{x^2}{100}$, donde **x** , **y** se expresan en mm. Si la fuerza de entrada **P = 4 N**. Determinar:

a) Determinar la fuerza que cada perno ejerce sobre la placa;

b) La fuerza de salida **Q**;

c) Si la fuerza máxima sobre el rodillo **D** es de **8,5 N**, ¿cuál es el valor de **P**?, ¿qué fuerza ejerce cada perno sobre la placa?.



Dimensiones en mm

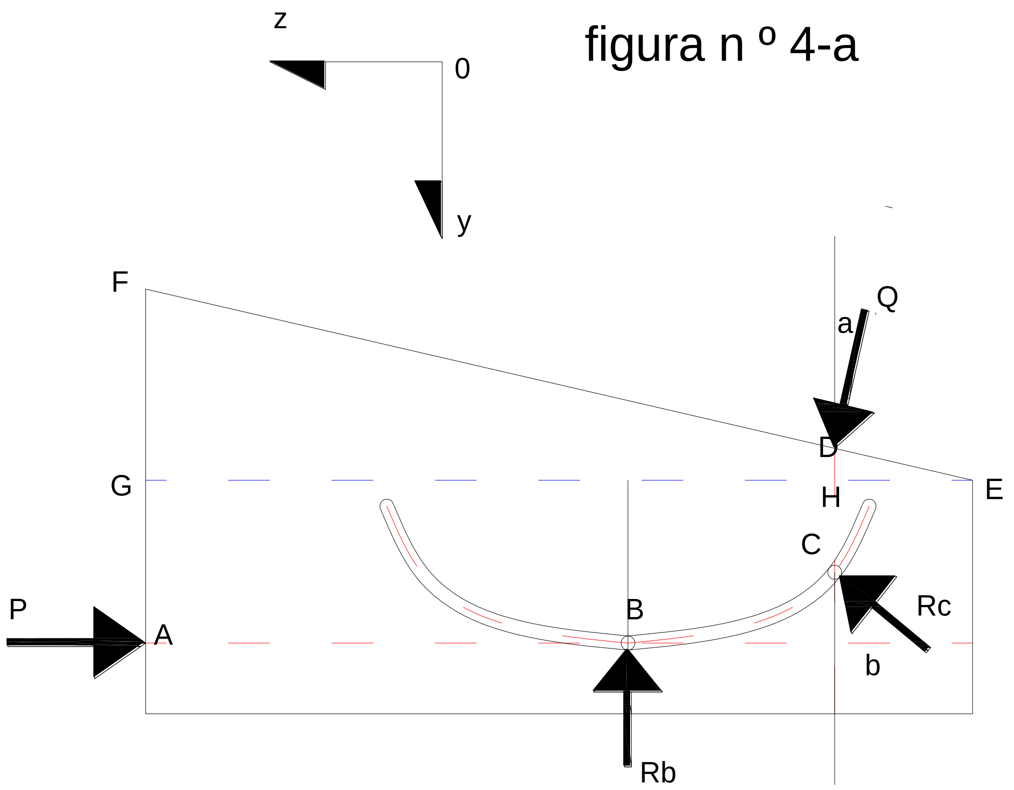
Solución

1 º) Análisis cinemático.

Se trata de una chapa con tres apoyos móviles cuyas normales se encuentran en **B, C, y D**. Por consiguiente, estas tres normales no deberán concurrir a un punto para que no exista vinculación aparente. No ocurriendo esto en nuestro problema, concluimos que el sistema es cinemáticamente invariable.

2 º) Diagrama de cuerpo libre.

El mismo se muestra en la figura n º 4-a.



3 º) Análisis del equilibrio.

Ecuaciones de equilibrio absoluto

Para resolver este problema, bastarán 2 ecuaciones de sumatorias de proyecciones respecto los ejes de la terna coordenada, más una ecuación de sumatoria de momentos respecto un punto arbitrario.

Previa la formulación de las ecuaciones de sumatorias de proyecciones y de momentos, debemos definir los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{\mathrm{b}}$ de las fuerzas **Q** y **Rb**.

Siendo la ecuación de la parábola, si colocamos ejes de referencia $(x; y)$ en **B**,

$$(A4) \quad \mathrm{y} = \frac{\mathrm{X}^2}{100}$$

Cuya derivada respecto x, es,

$$(B4) \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{x}{50} \quad \rightarrow \text{en C,} \quad \mathrm{x} = 60, \ \rightarrow \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{6}{5}$$

con lo cual, el ángulo $\hat{b}$ queda,

$$(C4)\qquad \hat{\mathrm{b}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{6}{5} \cong 50{,}194°$$

En cuanto al ángulo $\hat{a}$.

$$(D4)\begin{cases} \operatorname{sen}\hat{\mathrm{a}} = \dfrac{120 - 66}{\sqrt{240^2 + 54^2}} = \dfrac{54}{\sqrt{58142}} \\ \cos\hat{\mathrm{a}} = \dfrac{240}{\sqrt{58142}} \end{cases}$$

A continuación, planteamos las ecuaciones de equilibrio.

$$(E4)\begin{cases} \sum \mathrm{Proy}_{yy} = 0 \ \rightarrow \mathrm{Q}.\cos\hat{\mathrm{a}} - \mathrm{R_b} - \mathrm{R_c}.\cos\hat{\mathrm{b}} = 0 \\ \sum \mathrm{Proy}_{zz} = 0 \ \rightarrow \mathrm{Q}.\operatorname{sen}\hat{\mathrm{a}} + \mathrm{R_c}.\operatorname{sen}\hat{\mathrm{b}} - \mathrm{P} = 0 \\ \sum \mathrm{Mom}^{\mathrm{B}} = 0 \ \rightarrow \mathrm{R_C}.\cos\hat{\mathrm{b}}.60\mathrm{mm} + \mathrm{R_C}.\operatorname{sen}\hat{\mathrm{b}}.\dfrac{60^2}{100}\mathrm{mm} - \mathrm{Q}.\cos\hat{\mathrm{a}}.60\mathrm{mm} + \\ + \mathrm{Q}.\operatorname{sen}\hat{\mathrm{a}}.(9 + 46)\mathrm{mm} = 0 \end{cases}$$

¿ Cómo obtenemos la altura 9 mm para determinar el brazo de palanca?

Por relación de triángulos semejantes ΔEGF y $\Delta \mathrm{EHD}$ se tiene,

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EH}} \quad \rightarrow \quad \frac{54\mathrm{mm}}{\overline{DH}} = \frac{26mm}{40mm} \quad \rightarrow \overline{\mathrm{DH}} = 9\mathrm{mm}$$

De (E4), surge,

$$(F4)\begin{cases} Q.\dfrac{240}{\sqrt{58142}} - R_b - R_C.\cos 50{,}194° = 0 \\ \mathrm{Q}.\dfrac{54}{\sqrt{58142}} + R_C.\operatorname{sen} 50{,}194° = 4\mathrm{N} \\ \dfrac{\mathrm{Q}}{\sqrt{58142}}(54.55 - 240.60) + R_C.\left(60.\cos 50{,}194° + \dfrac{60^2}{100}.sen\,50{,}194°\right) = 0 \end{cases}$$

De (F4) surge,

$$Q = 51{,}6N \quad ; \quad \mathrm{R_B} = 2{,}765N \ ; \quad \mathrm{R_C} = 3{,}703N$$

c) Si **Q = 8,5 N**, determinar $P ; \mathrm{R_b} ; \mathrm{R_C}$.

Solo bastará reemplazar en el sistema de ecuaciones (E4), el valor **Q**, y calculamos las restantes incógnitas.

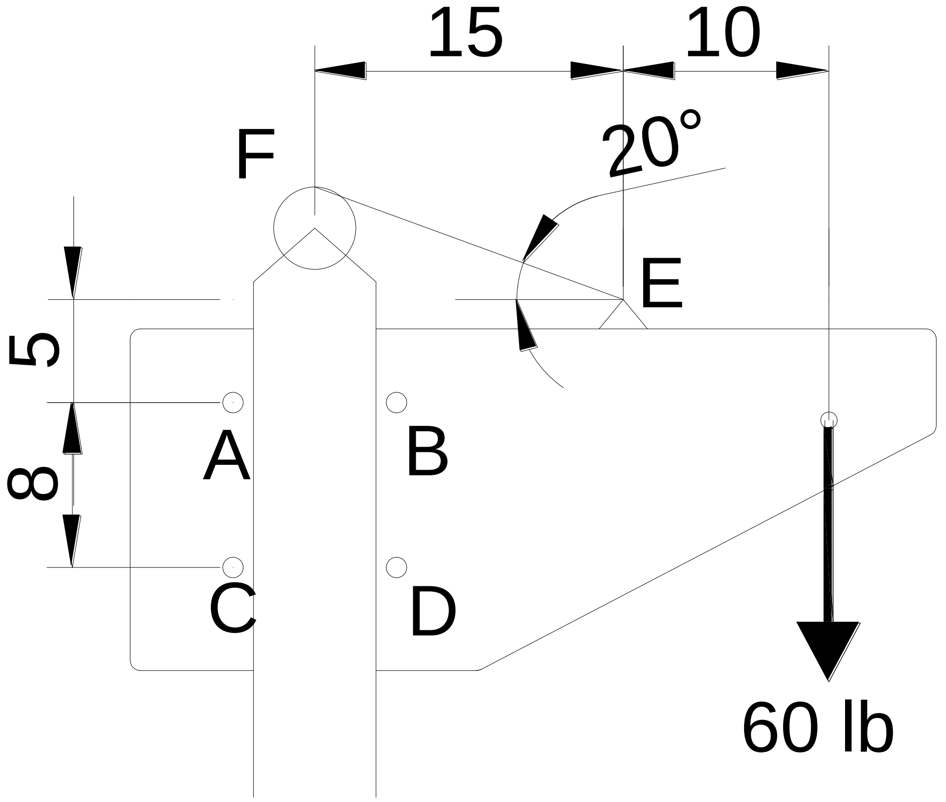
$$(G4)\begin{cases} 8{,}5N.\dfrac{240}{\sqrt{58142}} - R_b - R_C.\cos 50{,}194° = 0 \\ \text{Q}.\dfrac{54}{\sqrt{58142}} + R_C.\,\text{sen}\,50{,}194° - P = 0 \\ \dfrac{8{,}5\text{ N}}{\sqrt{58142}}(54.55 - 240.60) + R_C.\left(60.\cos 50{,}194° + \dfrac{60^2}{100}.sen\,50{,}194°\right) = 0 \end{cases}$$

Del sistema G4, se obtiene,

$$R_C = 6{,}1N \ ; \ \text{R}_\text{b} = 4{,}55N \ ; \ \text{P} = 6{,}59\text{N}$$

<u>Problema n º 5:</u> Se tiene la columna de la que pende un cartel de **60 lb** de peso como lo muestra la figura n º 5, el cual se encuentra unido a una cuerda **EF**, y el mismo está impedido de girar por la presencia de los pivotes **A, B, C**, y **D**. Determinar las reacciones de vínculo de la misma.

figura n º 5

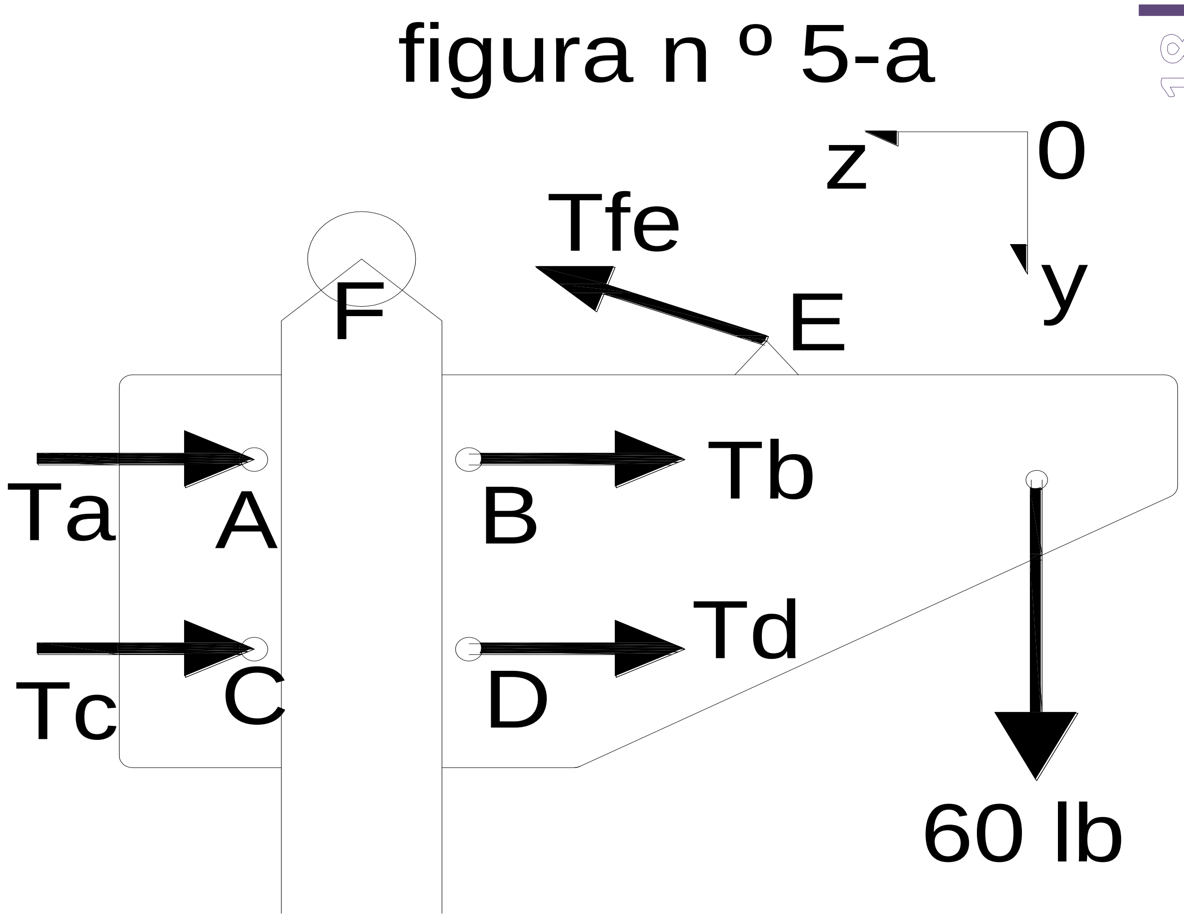


dimensiones en "

Solución

1 º) Análisis cinemático. Se trata de una estructura con un apoyo doble en la columna que impide el desplazamiento en la dirección **z**, y el giro de la chapa, mientras que la cuerda **FE** materializa un apoyo móvil, restringiendo el desplazamiento en esta dirección. A su vez, esta última puede ser descompuesta según las direcciones **z** e **y**, restringiéndose de esta forma los 3 grados de libertad de la estructura.

2 º) Diagrama de cuerpo libre. El mismo se muestra en la figura n º 5-a.



3 º) Análisis del equilibrio.

Para resolver el problema, solo bastarán dos ecuaciones de sumatoria de momentos , y una ecuación de sumatoria de proyecciones de fuerza.

$$(A5)\quad \sum \mathrm{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow 60\mathrm{lb} - \mathrm{T}_{FE}.sen\,20° = 0$$

De (A5) surge,

$$T_{FE} = \frac{60}{sen\,20°} lb = 175{,}43 lb \quad (\mathrm{B5})$$

Sumatoria de momentos respecto del punto **C**.

$$\sum Mom^{C} = 0 \rightarrow -\mathrm{T}_{B}.8''-60\mathrm{lb}.25''+175{,}43\mathrm{lb}.\mathrm{sen}\,20°.15''+175{,}43\mathrm{lb}.\cos 20°.13''= 0$$
$(C5)$

De (C5) surge,

$$T_B = \frac{-60.25 + 175{,}43(15''.sen\,20° + 13''.\cos 20'')}{8''} lb = 192{,}88 lb \quad (D5)$$

Sumatoria de momentos respecto del punto B,

$$\sum Mom^B = 0 \rightarrow \mathrm{T_C.8''\text{-}60lb.25''+174{,}43lb.sen\ 20°.15''+174{,}43lb.cos\ 20°.5''} = 0 \quad (E5)$$

Surgiendo de (E5),

$$T_C = \frac{60lb.25'' - 174{,}43lb.(15''.sen\,20° + 5''.\cos 20°)}{8''} = -28{,}99lb \ \text{ sentido opuesto al asignado}$$

$(F5)$

Luego, las reacciones en **A** y en **D** son nulas, pues las reacciones en **C** y **B** actúan como apoyos móviles paralelos, siendo el tercer apoyo móvil la cuerda **FE**.

Es decir $T_A = T_D = 0$

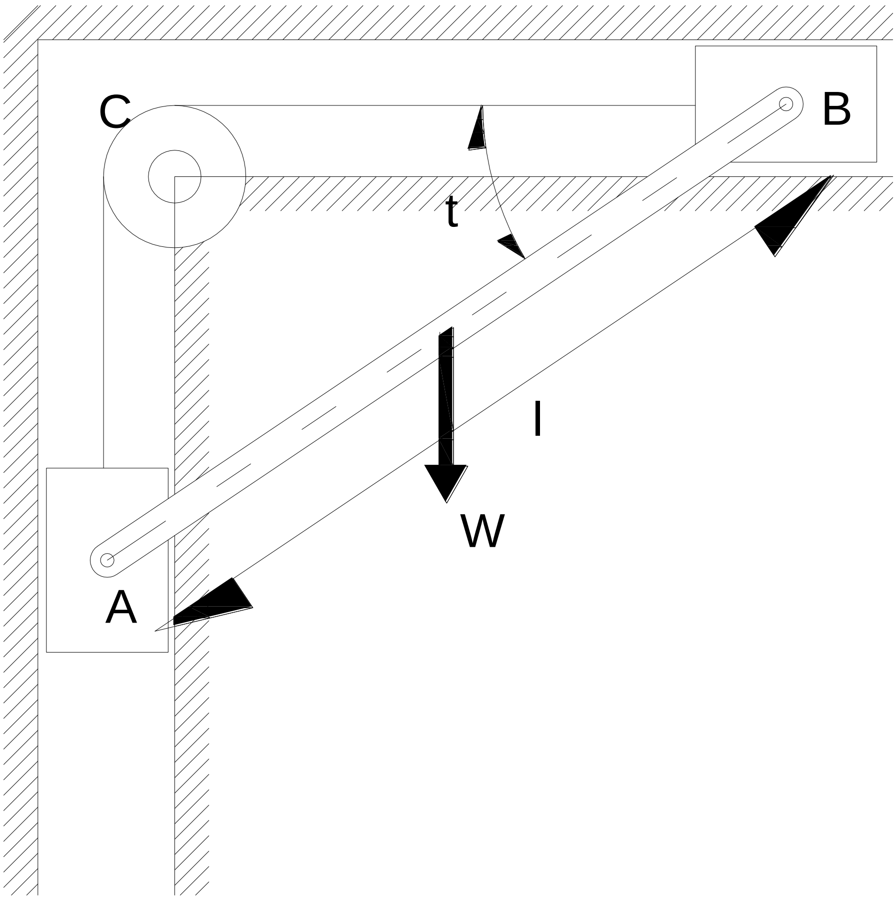
<u>Problema n º 6:</u> Un barra delgada **AB** de peso **W** está unida a los bloque **A** y **B** que pueden moverse a la largo de guías libremente, como se indica en la figura n º 6. Los bloques están conectados mediante una cuerda que pasa a través de una polea en **C** sin fricción.

Determinar:

* a) La tensión en la cuerda expresada en función de **W** y **θ**;

* b) El valor de **θ** para el cual la tensión en la cuerda es igual a **3W**.

figura n º 6



Solución

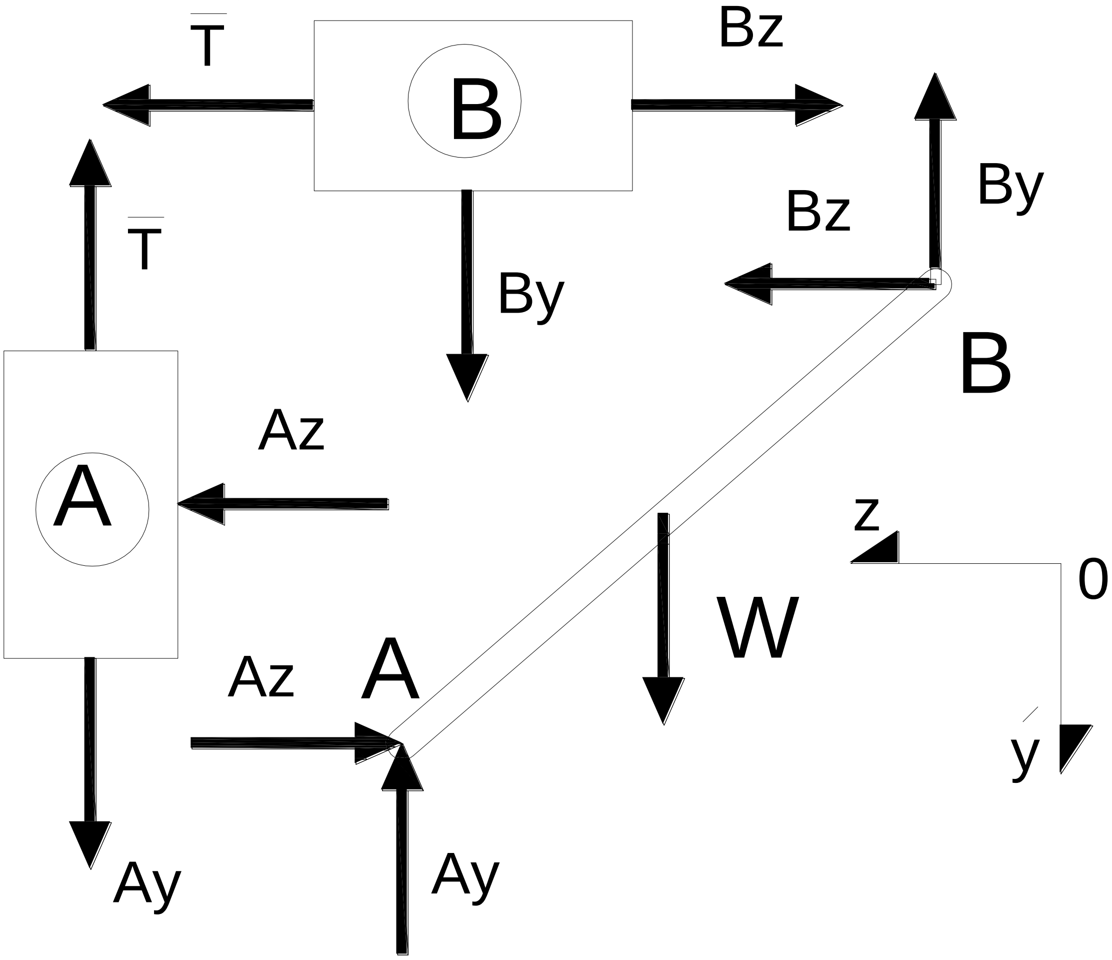
**** 1 º) Análisis cinemático***

Podemos considerar el sistema como formado por 3 chapas, considerando los bloque **A** y **B** como 2 de ellas, y la varilla **AB** como la tercera. Las colisas donde se desplazan loa bloques son vínculos de 2 º especie, y, por ser una cadena cinemática abierta de 3 chapas, la misma posee 5 grados de libertad, con lo cual la condición de vínculo restante se considera la cuerda que ejerce una fuerza **T** oponiéndose al movimiento. En consecuencia, hay una posición de equilibrio del sistema, dependiendo del ángulo **θ**, para el cual el sistema es cinemáticamente invariable. También podíamos considerar el sistema formado por 2 chapas, y las barra AB y cuerda son bielas que materializan una articulación entre ambos bloques. Siendo que 2 chapas poseen 4 grados de libertad que están representados con los vínculos indicados anteriormente. Entonces, el resto del análisis es similar al realizado con 3 chapas.

**** 2 º) Diagrama de cuerpo libre***

En la figura n º 6(a), ponemos en evidencia los vínculo internos y externos reemplazando por fuerzas desconocidas. Además colocamos la fuerza peso **W** de la barra, y la tensión **T** en la cuerda.

figura n º 6(a)



**** 3 º) Análisis del equilibrio***

Ecuaciones de equilibrio relativo

En la barra **AB**,

$$(A6)\begin{cases} \sum Proy_{zz}^{AB} = 0 \;\rightarrow\; B_z - A_z = 0 \\ \sum Mom_{AB}^{A} = 0 \;\rightarrow\; -W.\frac{1}{2}L.\cos\theta + B_y.L.\cos\theta + B_z.L.sen\,\theta = 0 \\ \sum Proy_{yy}^{AB} = 0 \;\rightarrow\; A_y + B_y - W = 0 \end{cases}$$

En el bloque **A**,

$$(B6)\sum \mathrm{Pr}oy_{yy}^{A}=0 \rightarrow \mathrm{A_y}-T=0 \rightarrow \mathrm{A_y}=T$$

En el bloque **B**,

$$(C6)\quad \mathrm{T}-\mathrm{B_z}=0$$

Del sistema de ecuaciones formados por (A6), (B6), y (C6), llegamos a,

$$(D6)\ \frac{1}{2}W.\cos\theta=(\mathrm{W}-\mathrm{T}).\cos\theta+\mathrm{T.sen}\,\theta$$

De (D6) surge,

$$(E6)\quad \mathrm{T}=\frac{1}{2}\frac{W.\cos\theta}{\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta}$$

b) $T=3W$, determinación de θ.

De (E6), Reemplazando el valor **T**,

$$3W=\frac{1}{2}\frac{W.\cos\theta}{\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta}\quad\rightarrow 6.\cos-6.\mathrm{sen}\,\theta=\cos\theta\quad(\mathrm{F6})$$

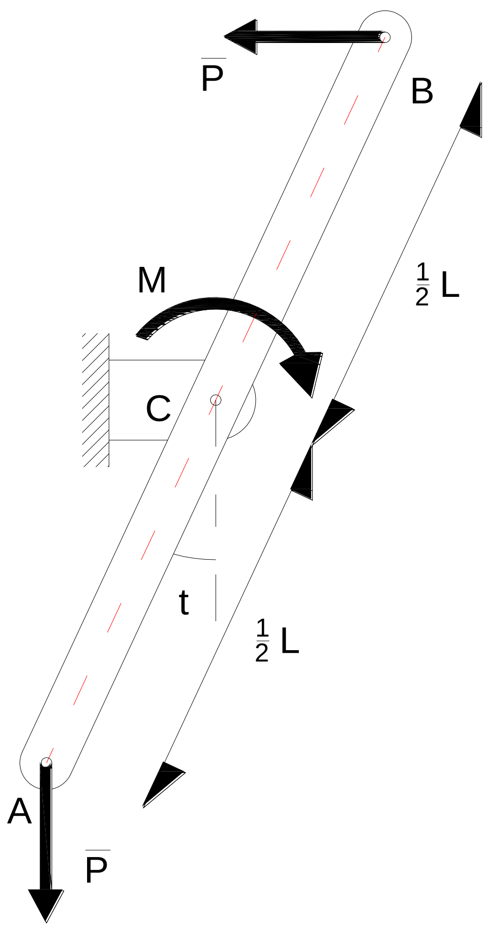
De (F6),

$$tg\,\theta=\frac{5}{6}\qquad\rightarrow\qquad\theta\cong 39{,}80°$$

__**Problema n º 7:**__ La barra **AB** de la figura n º 7 está solicitada está sometida a la acción de un par **M**, y dos fuerzas **P**. Se pide:

* a) Determinar el momento M para el equilibrio en función de **P**, **L**, y **θ**;

* b) Determine e valor del ángulo θ para $M=150lb.inch;\ \mathrm{P}=20\mathrm{lb};\ \mathrm{L}=6\mathrm{inch}$



Solución

**** 1 º) Análisis cinemático***

Se trata de un chapa con un vínculo de 2 º especie en C, por lo cual la misma puede girar alrededor del mismo, dependiendo el equilibrio de la misma de la relación existente entre el par M, la fuerza P, y el ángulo θ respecto de la vertical en C, para que el sistema sea cinemáticamente invariable.

**** 2 º) Diagrama de cuerpo libre***

En la figura n º 7(a), se muestra el mismo, en donde se reemplaza la reacción del apoyo fijo en C por 2 fuerzas desconocidas H_C y V_C.

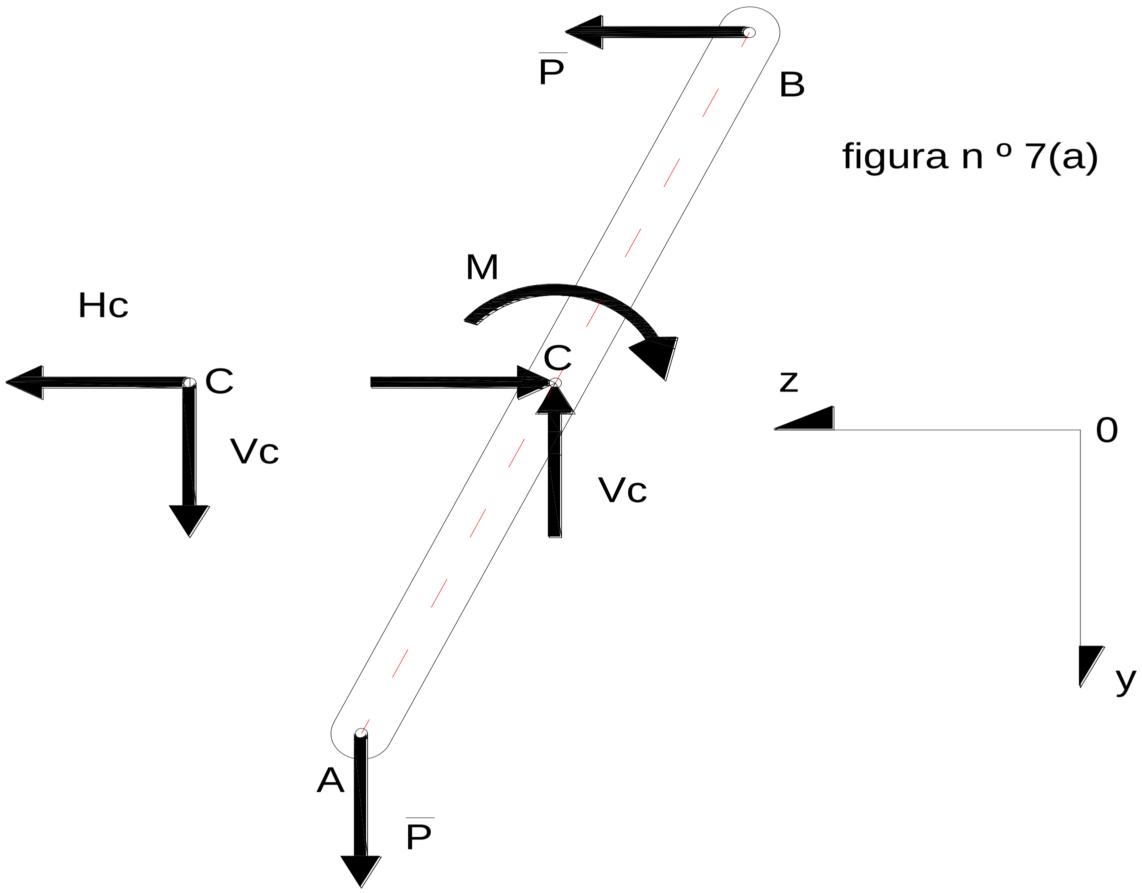


figura n º 7(a)

**** 3 º) Análisis de equilibrio***

Para resolver el primer punto, nos basta con aplicar una ecuación de momentos respecto del punto **C**, pues se anulan las reacciones de vínculo que no es necesario determinar para la finalidad del problema,

$$(A7)\ \sum \mathrm{Mom}^{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{P.L.}\cos\theta - \mathrm{M} + \mathrm{P.L.sen}\,\theta = 0$$

De (A7) se obtiene,

$$(B7) \quad \mathrm{M} = \mathrm{P.L.}(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$$

para resolver el punto b), reemplazamos en (B7),

$$sen\,\theta + \cos\theta = \frac{150\ \mathrm{lb.inch}}{20\ \mathrm{lb.}\ 6\ \mathrm{inch}} = \frac{5}{4} \qquad (\mathrm{C7})$$

operando algebraicamente con (C7),

$$sen\,\theta + \sqrt{1\text{-}\,\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{5}{4} \qquad (D7)$$

continuando con (D7),

$$\sqrt{1 - sen^2\theta} = \frac{5}{4} - sen\,\theta \qquad (E7)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (E7), y operando, resulta,

$$2.sen^2\theta - \frac{5}{2}sen\,\theta - \frac{9}{16} = 0 \qquad (F7)$$

De (F7), obtenemos,

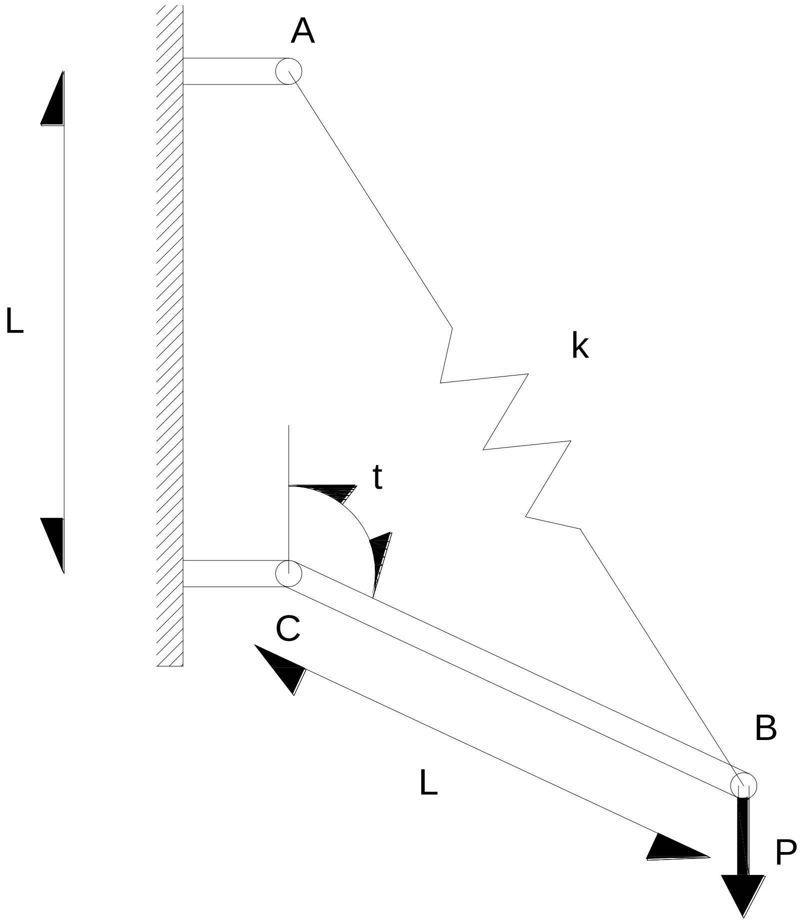
$$\theta_1 = 72{,}885° \;\; ; \;\; \theta_2 = 17{,}115°$$

<u>Problema n º 8:</u> Una carga **P** se aplica en el extremo **B** de una barra **BC** como se muestra en la figura n º 8. En el soporte A se encuentra una cuerda con un resorte de constante elástica **k**. El resorte se encuentra sin deformación cuando **θ = 90º**. Sin considerar el peso de la barra, determínese:

* a) el ángulo **θ** correspondiente a la posición de equilibrio en función de **P, k, y L;**

* b) El valor de **θ** correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = \frac{1}{4}k.L$

figura n º 8



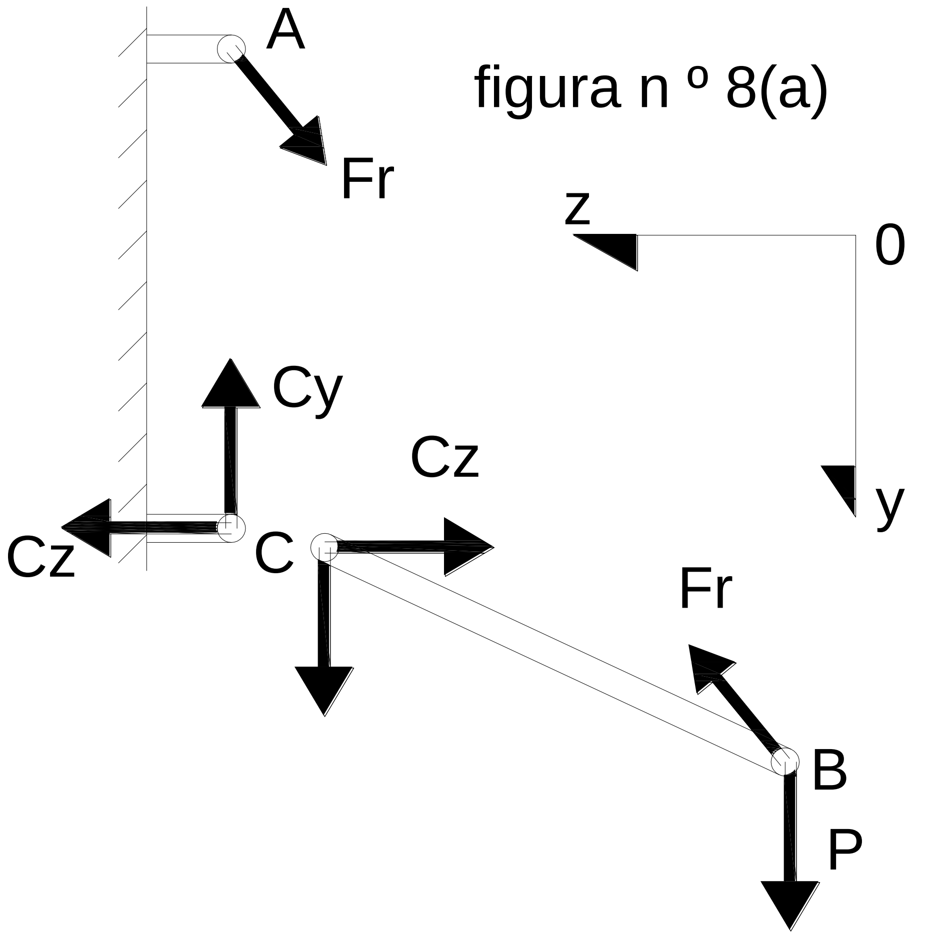
Solución

**** 1 º) Análisis cinemático***

Se trata de la barra BC que es una chapa con un vínculo de 2 º especie en **C**, y un apoyo de primera especie que es la biela **AB**. Como podemos observar de la figura n º 8, la cuerda **AB** no concurre al punto **C**, por lo que no existe vinculación aparente, siendo el sistema cinemáticamente invariable.

**** 2 º) Diagrama de cuerpo libre***

Separamos el sistema en sus componentes y reemplazamos las reacciones de vínculo por fuerzas incógnitas, según se puede observar en la figura n º 8(a).



**** 3 º) Análisis del equilibrio***

Previo aplicación de las ecuaciones de equilibrio, determinamos algunas dimensiones como la longitud de la cuerda AB en función de **L** y **θ**. Del teorema del seno, para el triángulo **ABC** resulta,

$$(A8)\quad \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\mathrm{L}}{sen\dfrac{\pi - \theta}{2}} \rightarrow \overline{\mathrm{AB}} = \frac{L.sen\,\theta}{sen\dfrac{\pi - \theta}{2}}$$

Si el resorte está sin deformar cuando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

De (A8),

$$(B8)\quad \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}L$$

La fuerza del resorte es,

$$\overrightarrow{F_R} = K.\Delta_{\overline{AB}} \qquad (C8)$$

Donde

$$\Delta_{\overline{AB}} = L\left(\frac{sen\,\theta}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi - \theta}{2}} - \sqrt{2}\right) \quad \to \theta > \frac{\pi}{2} \qquad (D8)$$

Planteando una ecuación de momentos respecto de C,

$$\sum Mom^{C} = 0 \;\to\; \mathrm{F_R}.L.sen\frac{\pi-\theta}{2} - P.L.\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (E8)$$

Pero por relaciones trigonométricas se tiene,

$$(F8)\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = sen\,\theta \end{cases}$$

La ecuación (E8) queda,

$$F_R.\cos\frac{\theta}{2} - P.sen\,\theta = 0 \;\to\; F_R.\cos\frac{\theta}{2} - 2.P.sen\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} = 0 \qquad (G8)$$

Reemplazando (C8) y (D8) en (G8),

$$K.L\left(\frac{2.sen\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - \sqrt{2}\right) - 2P.sen\frac{\theta}{2} = 0 \quad (H8)$$

Fe (H8),

$$-\sqrt{2}K.L = 2(P - K.L).sen\frac{\theta}{2} \qquad (I8)$$

De (I8),

$$\theta = 2.arc\,\mathrm{sen}\frac{\sqrt{2}K.L}{2(K.L - P)} \qquad (J8)$$

b) si $P = \frac{1}{4}K.L$

Reemplazando en (J8),

$$\theta = 2.arc\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{K.L}{K.L - \frac{1}{4}K.L}\right) \qquad (\mathrm{K8})$$

Surgiendo de (K8),

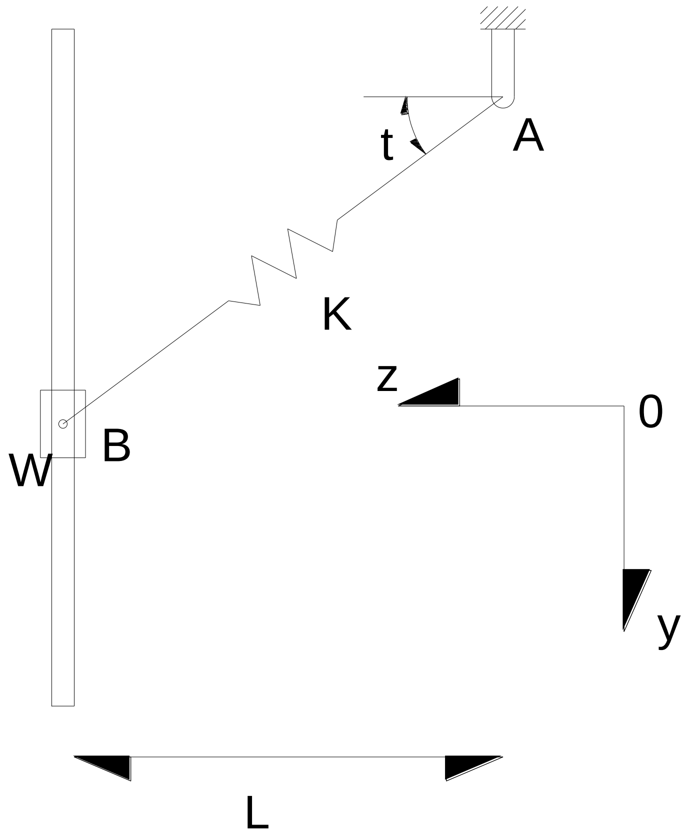
$$\theta = 141{,}05° \qquad (\mathrm{L8})$$

<u>Problema n º 9:</u> Un collar B de peso **W** puede deslizarse libremente a lo largo de la barra vertical mostrada en la figura n º 9. El resorte de constante **K** no está deformado cuando **θ = 0º**, se pide:

* a) Una ecuación del equilibrio en función de **θ, W, K y L**;

* b) Si **W=3lb, L=6inch, y k=8lb/ft**, determinar el valor **θ** correspondiente a la posición de equilibrio.

figura n º 9



Solución

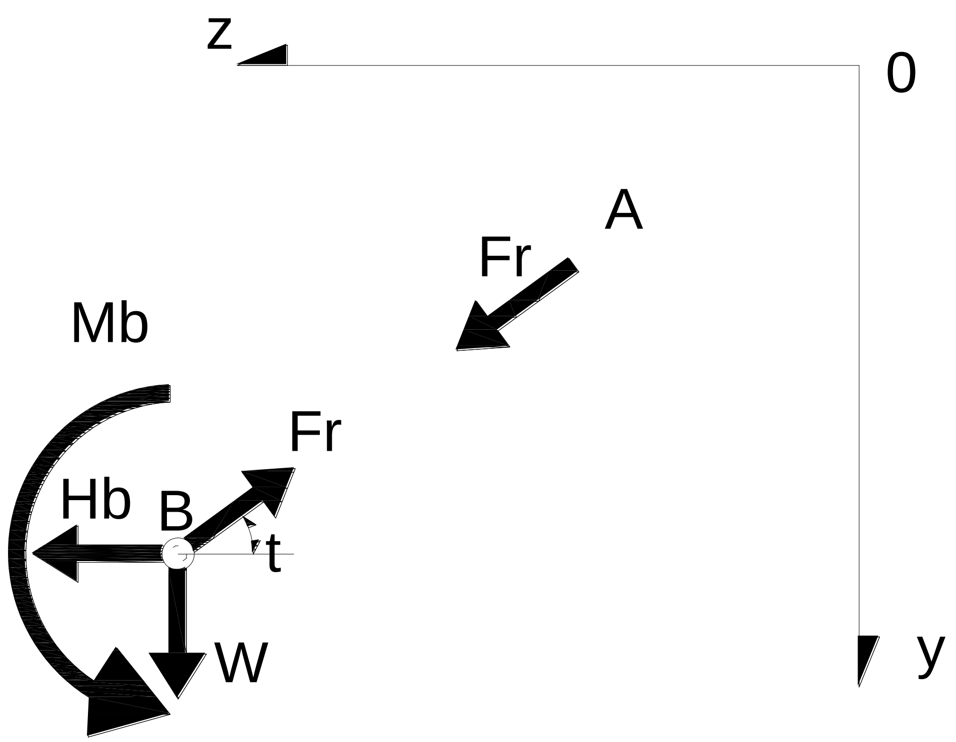
**** 1 º) Análisis cinemático***

El mecanismo posee un vínculo de 2 º especie en el collar, que le permite deslizarse, pero no girar ni desplazamiento según z, mientras que el resorte con su vinculación en A constituye un vínculo de 1 º especie, por lo que, el sistema es cinemáticamente invariable, dependiendo el equilibrio del peso **W**, y las reacciones en A y B;

**** 2 º) Diagrama de cuerpo libre***

En la figura n º 9(a) mostramos el mismo.

figura n º 9(a)



**** 3 º) Análisis del equilibrio***

Siendo, la fuerza de restitución del resorte,

$$(A9)\quad \overrightarrow{F_r} = -k.\Delta_L$$

De acuerdo a la figura n º 9, y cuando **θ = 0**, $\overrightarrow{F}_r = 0$, entonces,

$$\Delta_L = L\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) \quad (B9)$$

Realizamos una ecuación de sumatoria de proyecciones de fuerzas en la dirección y,

$$(C9)\quad \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \;\rightarrow\; \text{W} - \text{F}_r.sen\,\theta = 0$$

Reemplazando (B9) en (C9), resulta,

$$k.L.\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=W \qquad (\mathrm{D9})$$

De (D9), se obtiene,

$$tg\ \theta - \mathrm{sen}\ \theta = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{k.L}} \qquad (\mathrm{E9})$$

* b) **W= 3 lb, L= 6 inch, k = 8 lb/ft,**

De (E9),

$$tg\ \theta - \mathrm{sen}\ \theta = \frac{3}{8\frac{\mathrm{lb}}{12\mathrm{inch}}.6inch} = \frac{3}{4} \qquad (\mathrm{F9})$$

Ecuación que podemos escribir, de acuerdo a relaciones trigonométricas de **tg θ** en función de **sen θ**,

$$\frac{sen\,\theta}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}} - sen\,\theta = \frac{3}{4} \qquad (\mathrm{G9})$$

De la (G9), se puede obtener,

$$\left(\frac{sen\,\theta}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}}\right)^2 = \left(sen\,\theta + \frac{3}{4}\right)^2 \qquad (\mathrm{H9})$$

Cuyo desarrollo lleva a,

$$-sen^4\theta - \frac{3}{2}sen^3\theta - \frac{9}{16}sen^2\theta + \frac{3}{2}sen\,\theta + \frac{9}{16} = 0 \qquad (\mathrm{I9})$$

Cuya resolución mediante el software Wolfram matemática 7, lleva a,

$$\mathrm{Solve}[-x^4 - 1.5x^3 - 0.5625x^2 + 1.5x + 0.5625 == 0, x]$$

solución

```
{{x→-0.992899-0.920907 ⅈ},{x→-0.992899+0.920907 ⅈ},{x→-
0.361849},{x→0.847648}}
```

Cuya solución útil es, siendo $x = sen\,\theta$,

$$sen\,\theta = 0{,}847648 \qquad (\mathrm{J9})$$

de donde obtenemos el ángulo θ,

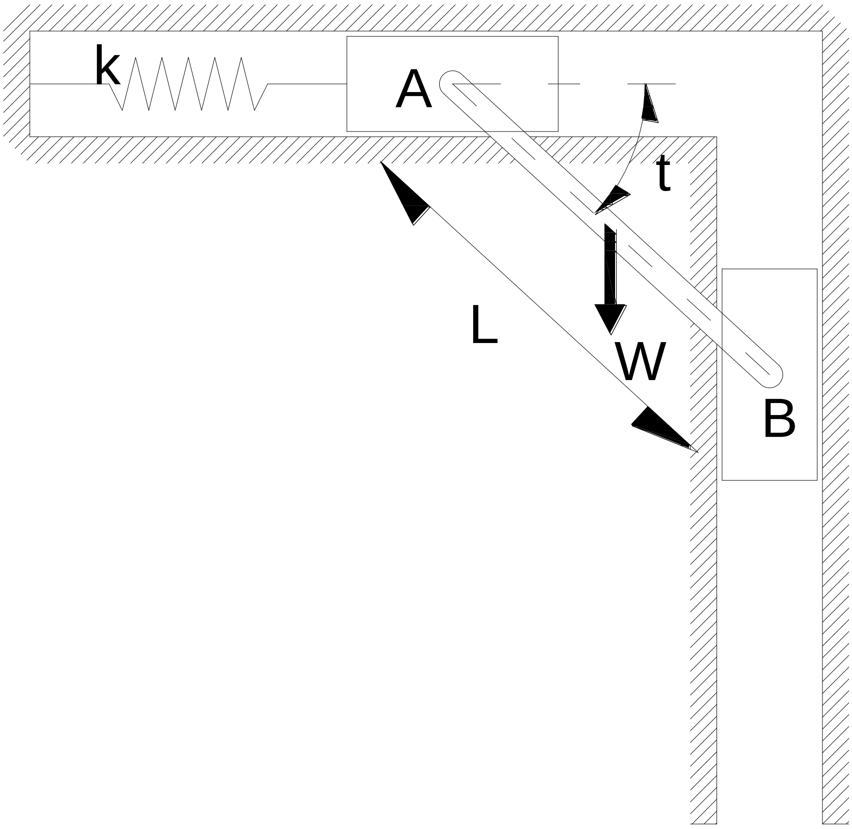
$$\theta \cong 58°$$

Problema n º 10: Una barra **AB** de masa m se une a los bloques **A y B** que se mueven libremente sobre las guías de la figura n º 10. El resorte es de constante **k**, y se encuentra sin deformar para **θ = 0**. Los pesor de los bloques se consideran despreciables. Se pide:

* a) Determinar una ecuación de equilibrio en función de **m, g, k, y L**;

* b) Determine un valor de **θ** cuando **m = 2 kg, L = 75 mm**, $k = 30\frac{N}{m}$.

figura n º 10



Solución

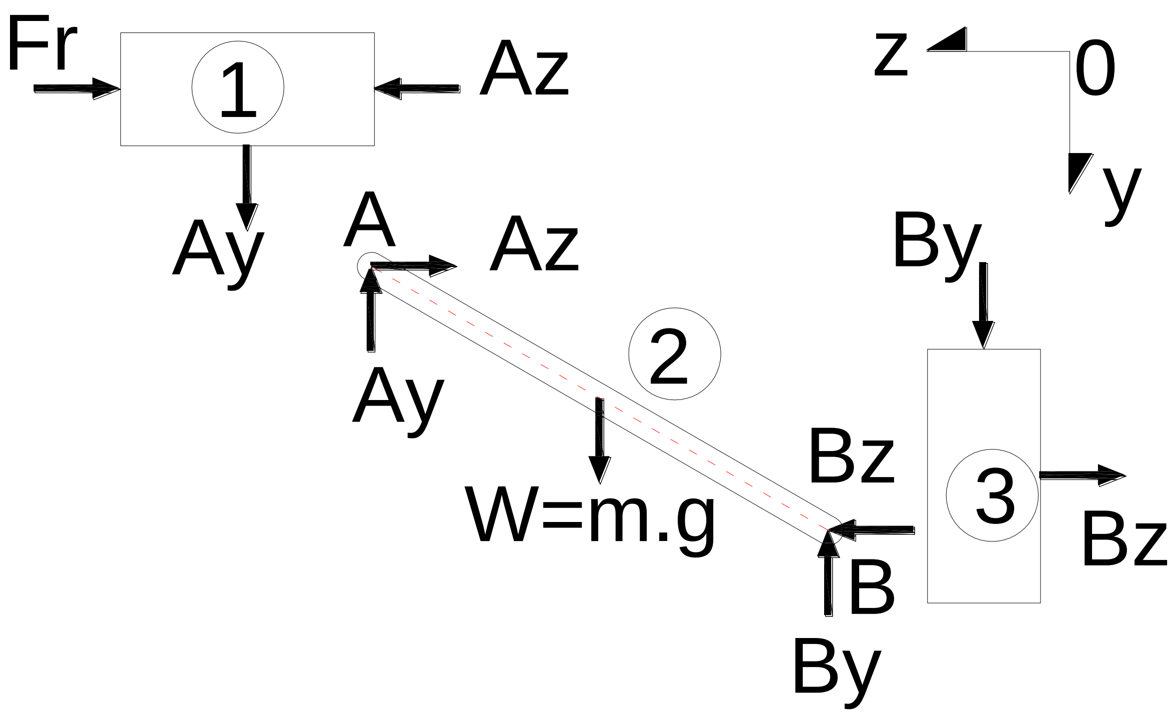
**** 1 º) Análisis cinemático***

Se puede considerar una cadena cinemática abierta de 3 chapas, donde cada bloque es una chapa, y la varilla **AB** es la restante. Las guías permiten desplazamiento de los bloque a lo largo de las mismas, pero no permiten giro, ni desplazamiento en sentido normal a las mismas por lo que representan un vínculo de 2 º especie, luego existen 4 condiciones de vínculo impuestas. El vínculo del resorte representa un vínculo de 1 º especie, con lo que, la cadena cinemática tiene los 5 grados de libertad restringidos, y la misma es cinemáticamente invariable.

**** 2 º) Diagrama de cuerpo libre***

En la figura nº 10(a), representamos el mismo, separando tanto bloques **A** y **B** como barra **AB**, colocando las correspondientes reacciones de vínculo, peso de barra, y fuerza de restitución elástica.

figura n º 10(a)



**** 3 º) Estudio del equilibrio***

Para un ángulo **θ** arbitrario de la barra, **AB**, planteamos las ecuaciones de equilibrio.

Par a la barra **AB**,

$$(A10)\quad \sum \mathrm{Mom}^{B} = 0 \;\rightarrow\; -\mathrm{A_z}.L.sen\,\theta - \mathrm{A_y}.L.\cos\theta + m.g.\frac{1}{2}L.\cos\theta = 0$$

En el bloque **B**, cuerpo 3,

$$(B10)\quad \sum \mathrm{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow \mathrm{B_y} = 0$$

En la barra **AB**,

$$(C10)\quad \sum \mathrm{Proy}_{yy} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{m.g} - \mathrm{A_y} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{A_y} = m.g$$

En bloque **A**, cuerpo 1,

$$(D10)\quad \sum \mathrm{Proy}_{zz} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{A_z} - F_r = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{A_z} = F_r$$

Siendo **Δ** la deformación del resorte, $\Delta = 0 \rightarrow \theta = 0$, entonces,

$$(E10)\quad \rightarrow\quad \Delta = \mathrm{L}(1 - \cos\theta)$$

A su vez,

$$F_r = k.\Delta \;\rightarrow\; \mathrm{F_r} = k.L(1-\cos\theta) \qquad (\mathrm{F10})$$

Reemplazando (C10), (D10), y (F10) en (A10), resulta,

$$k.L(1-\cos\theta).sen\,\theta - \mathrm{m.g.}\cos\theta + \frac{1}{2}m.g.\cos\theta = 0 \qquad (\mathrm{G10})$$

Dividiendo (G10) por ***cos ϑ***, resulta,

$$k.L.(tg\;\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = \frac{m.g}{2} \;\rightarrow\; \mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{m.g}}{\mathrm{2K.L}} \qquad (\mathrm{H10})$$

b) Determine un valor de **θ** cuando **m = 2 kg, L = 75 mm**, $k = 30\dfrac{N}{m}$.

Reemplazando en (H10) los valores mencionados, resulta,

$$tg\;\theta - \mathrm{sen}\,\theta = \frac{2\mathrm{Kg}.9{,}81\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2.30\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.0{,}75m} = 0{,}4355 \qquad (\mathrm{I10})$$

Reemplazando en (I10) **tg θ** por la siguiente relación trigonométrica,

$$tg\;\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}} \qquad (\mathrm{J10})$$

Resulta la misma,

$$\frac{sen\,\theta}{\sqrt{1-sen^{2}\theta}}-sen\,\theta=0{,}4355 \qquad (\mathrm{K10})$$

Podemos expresar (K10),desarrollando la misma,

$$\left(\frac{sen\,\theta}{\sqrt{1-sen^{2}\theta}}\right)^{2}=\left(0{,}4355+sen\,\theta\right)^{2} \qquad (\mathrm{L10})$$

El desarrollo de (L10) nos lleva a,

$$-sen^{4}\theta-0{,}871.sen^{3}\theta-0{,}19.sen^{2}\theta+0{,}871.sen\,\theta+0{,}19=0 \qquad (\mathrm{M10})$$

Finalmente (M10) lleva a estas soluciones, extraídas del software matemática, arrojando estos resultados,

$$\mathrm{Solve}[-x^4-0.871x^3-0.19x^2+0.871x+0.19==0,x]$$

```
{{x→-0.712523-0.79858 ⅈ},{x→-0.712523+0.79858 ⅈ},{x→-
0.215541},{x→0.769588}}
```

siendo $x=sen\,\theta$, el único valor útil de esta solución es x=0,769588

$$(N10) \qquad \mathrm{sen}\,\theta=0{,}769588 \quad \rightarrow \quad \theta=50{,}316°$$