Unidad 2 – Matrices y determinantes

Ejercicio 17 – TP2

Realizar las siguientes demostraciones, dejando indicadas claramente las hipótesis, tesis y propiedades utilizadas en cada desarrollo.

OBSERVACIÓN: casi en cada uno de los enunciados tenemos una palabra clave: **entonces**, que nos permite identificar la hipótesis y la tesis.

17.1) Sean $A, B \ \varepsilon \ R^{nxn}$ matrices inversibles. Si A y B son conmutativas, entonces sus inversas también lo son.

H) $A \, \varepsilon \, R^{nxn} \ \wedge \ \exists \ A^{-1} \, \varepsilon \, R^{nxn} \ (det\,(A) \ \neq \ 0)\ , \ B \, \varepsilon \, R^{nxn} \ \wedge \ \exists \ B^{-1} \, \varepsilon \, R^{nxn} \ , \ A \, . B \ = \ B \, . A$

T) $A^{-1} \ . B^{-1} \ = \ B^{-1} \, . \, A^{-1}$

D) $A^{-1} \, . \, B^{-1} \underbrace{=}_{1} (B \, . A)^{-1} \underbrace{=}_{2} (A \, . B)^{-1} \underbrace{=}_{3} B^{-1} \, . A^{-1}$

1) Inversa del producto de dos matrices.
2) A y B son conmutativas.
3) Inversa del producto de dos matrices.

17.2) Sean $A \, , C \, , D \ \varepsilon \ R^{nxn}$ tales que verifican $A \ = \ C^{-1} \, . D \, . C$, entonces $A^k \ = \ C^{-1} \, . D^k \, . C \quad k \ \varepsilon \ N.$

H) $A \, \varepsilon \, R^{nxn} \ \wedge \ C \, \varepsilon \, R^{nxn} \ \wedge \ D \, \varepsilon \, R^{nxn} \ \wedge \ A \ = \ C^{-1} \, . D \, . C$

T) $A^k \ = \ C^{-1} \, . D^k \, . C \quad k \ \varepsilon \ N$

D) Si: $k = 1$, se verifica

Si:$k \ = \ 2$

$$A^2 \ = \ A \, . A \ = \ (C^{-1} \, . D \, . C) \, . (C^{-1} \, . D \, . C) \underbrace{=}_{1} C^{-1} \, . D \, . (C \, . C^{-1}) \, . D \, . C \underbrace{=}_{2} C^{-1} \, . D \, . I \, . D \, . C =$$

$$\underbrace{=}_{3} C^{-1} \, . D^2 \, . C$$

1) Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices.
2) Definición de matriz inversa y sabiendo que I es matriz neutra, para la multiplicación.
3) Producto de una matriz, por si misma (siendo matriz cuadrada).

Si: probamos con A^3 , con A^4 y así sucesivamente para las diferentes potencias naturales de k, aplicando sucesivamente las mismas propiedades, podemos verificar que la proposición resulta verdadera. Mostramos el último paso:

$$A^k \ = \ A^{k-1} \, . A \ = \ \left(C^{-1} \, . \, D^{k-1} \, . C\right) . (C^{-1} \, . D \, . C) = C^{-1} \, . D^{k-1} \, . (C \, . C^{-1}) \, . D \, . C \ =$$

$$= C^{-1} \, . D^{k-1} \, . I \, . D \, . C \ = \ C^{-1} \, . D^k \, . C$$

17.3) Sea $A \, \varepsilon \, R^{nxn}$ simétrica e inversible, entonces A^{-1} es simétrica.

H) $A \, \varepsilon \, R^{nxn} \;\; \wedge \;\; A = A^T \wedge \exists \; A^{-1} \; \varepsilon \; R^{nxn} \, [det\,(A) \;\; \neq \;\; 0]$

T) $A^{-1} = (A^{-1})^T$

D) $(A^{-1})^T \underbrace{=}_{1} (A^T)^{-1} \underbrace{=}_{2} A^{-1}$

1) La traspuesta de la inversa de una matriz es igual a la inversa de su traspuesta.
2) Por ser A una matriz simétrica.

17.4) Sea $A \, \varepsilon \, R^{nxn}$ ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

H) $A \, \varepsilon \, R^{nxn} \;\; \wedge \;\; [\,(A\,.\,A^T = A^T\,.\,A = I) \;\; \vee \;\; (A^T = A^{-1})]$

T) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

D) Si calculamos el primer miembro de la tesis, obtenemos: $(A^{-1})^T \underbrace{=}_{1} (A^T)^T \underbrace{=}_{2} A$

1) Como A es matriz ortogonal, por lo tanto $A^{-1} = A^T$
2) La traspuesta, de la traspuesta de una matriz, da por resultado la misma matriz.

Si calculamos el segundo miembro de la tesis, obtenemos: $(A^T)^{-1} \underbrace{=}_{1} (A^{-1})^{-1} \underbrace{=}_{2} A$

1) Como A es matriz ortogonal, por lo tanto $A^{-1} = A^T$
2) La inversa, de la inversa de toda matriz, da por resultado la misma matriz.

Como los resultados de los cálculos de ambos miembros resultan iguales, luego la proposición resulta verdadera.

17.5) Sean $A\,, B \;\; \varepsilon \;\; R^{nxn}$ ortogonales, entonces $(A.B)$ es ortogonal.

H) $A \;\; \varepsilon \;\; R^{nxn} \;\; \wedge \;\; A^T = A^{-1} \;\; \wedge \;\; B \;\; \varepsilon \;\; R^{nxn} \;\; \wedge \;\; B^T = B^{-1}$

T) $(A\,.\,B)^T = (A\,.\,B)^{-1}$

D) $(A\,.\,B)^T \underbrace{=}_{1} B^T\,.\,A^T \underbrace{=}_{2} B^{-1}\,.\,A^{-1} \underbrace{=}_{3} (A\,.\,B)^{-1}$

1) Traspuesta del producto de dos matrices.
2) Por hipótesis.
3) Inversa del producto de dos matrices.

17.6) Sean $A\,, B \;\; \varepsilon \;\; R^{nxn}$. Si A es antisimétrica y B es ortogonal, entonces $M = B^{-1}\,.\,A\,.\,B$ es antisimétrica.

H) $A \;\; \varepsilon \;\; R^{nxn} \;\; \wedge \;\; A = -A^T \;\; \wedge \;\; B \;\; \varepsilon \;\; R^{nxn} \;\; \wedge \;\; B^T = B^{-1} \;\; \wedge \;\; M = B^{-1}\,.\,A\,.\,B$

T) $M = -M^T$

D) $- M^T \underbrace{=}_{1} - [B^{-1} . A . B]^T \underbrace{=}_{2} - [B^T . A^T . (B^{-1})^T] \underbrace{=}_{3} - [(B^{-1}) . (- A) . (B^T)^T] \underbrace{=}_{4}$

$$\underbrace{=}_{4} - [(B^{-1}) . (- A) . B] \underbrace{=}_{5} B^{-1} . [(-1) (- A)] . B \underbrace{=}_{6} B^{-1}. A . B \underbrace{=}_{7} M$$

1) Por hipótesis.
2) Por transposición del producto de matrices.
3) Por hipótesis: A antisimétrica y B ortogonal.
4) Traspuesta, de traspuesta de una matriz.
5) Asociativa con escalar y producto de matrices.
6) Resolución del producto.
7) Por hipótesis.

17.7) Sean $D , E , F \ \varepsilon \ R^{nxn}$. Si D es ortogonal, E es simétrica y $F = E . D$, entonces

$E^2 = F . F^T$.

H) $D \ \varepsilon \ R^{nxn} \ \wedge \ D^T = D^{-1} \ \wedge \ E \ \varepsilon \ R^{nxn} \ \wedge \ E = E^T \ \wedge \ F \ \varepsilon \ R^{nxn} \ \wedge \ F = E . D$

T) $E^2 = F . F^T$

D) $F . F^T \underbrace{=}_{1} (E . D) . (E . D)^T \underbrace{=}_{2} (E . D) . (D^T . E^T) \underbrace{=}_{3} E . (D . D^T) . E^T \underbrace{=}_{4} E . (D . D^{-1}) . E^T \underbrace{=}_{5}$

$$\underbrace{=}_{5} E . I . E^T \underbrace{=}_{6} (E . I) . E \underbrace{=}_{7} E . E \underbrace{=}_{8} E^2$$

1) Por hipótesis, reemplazamos a F .
2) Traspuesta del producto de matrices.
3) Asociativa del producto de matrices.
4) Por ser D ortogonal.
5) Por definición de matriz inversa.
6) Asociativa del producto de matrices y por hipótesis (E simétrica)
7) Matriz I neutra para el producto de matrices.
8) Producto de una matriz, por sí misma.