Unidad 2 – Matrices y Determinantes

Ejercicios adicionales

1) Hallar todas las matrices $X \in R^{2x2}$, triangulares inferiores, que sean conmutables con $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \ k \in R$.

Respuesta:

Si: $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$, que debe verificar: $A \,.\, X = X \,.\, A$

$$A \,.\, X = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky & kz \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$X \,.\, A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xk \\ y & ky + z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + k\,y = x \\ kz = xk \\ y = y \\ ky + z = z \end{cases}$$

Si: $k = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x + 0\,y = x \\ 0z = x0 \\ y = y \\ 0y + z = z \end{cases} \rightarrow \ \forall x\,\varepsilon\,R \ \wedge \ \forall y\,\varepsilon\,R \ \wedge \ \forall z\,\varepsilon\,R \ \rightarrow \ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$

Si: $k \neq 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x + k\,y = x \\ kz = xk \\ y = y \\ ky + z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \\ y = y \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \ \forall x\,\varepsilon\,R$

2) Sean $A \in R^{nxn}$ y A simétrica, $B \in R^{nxn}$ y B antisimétrica, $C \in R^{nxn}$ y C y conmutable con A y B, demostrar que: $\left(A\,B.C^T\right)^T = -B.A.C$, justificando en cada paso, la propiedad utilizada.

Respuesta:

H) $A\ \varepsilon\ R^{nxn} \ \wedge \ A = A^T \ ; \ B\ \varepsilon\ R^{nxn} \ \wedge \ B = -B^T \ ;$
$C\ \varepsilon\ R^{nxn} \ \wedge \ C.A = A.C \ \wedge \ C.B = B.C$

T) $(A\,.\,B\,.\,C^T)^T = -B\,.\,A\,.\,C$

D) $(A\,.\,B\,.\,C^T)^T \underbrace{=}_{1} (C^T)^T\,.\,B^T\,.\,A^T \underbrace{=}_{2} C\,.\,(-B)\,.\,A \underbrace{=}_{3} -C\,.\,B\,.\,A \underbrace{=}_{4} -B\,.\,C\,.\,A \underbrace{=}_{5} -B\,.\,A\,.\,C$

1) Trasposición del producto de matrices.
2) Traspuesta de la traspuesta de una matriz. B matriz antisimétrica. A matriz simétrica.
3) Asociativa de escalar con multiplicación de matrices.
4) B y C resultan conmutables.
5) A y C resultan conmutables.