Ejercicios Complementarios sobre: *DETERMINANTES*

1.- Sabiendo que det(A) = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$ hallar:

a) $\begin{vmatrix} a & b & -c \\ 2d & 2e & -2f \\ g & h & -i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a-4c & c \\ e & d-4f & f \\ h & g-4i & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2b-4c & b & c \\ 2e-4f & e & f \\ 2h-4i & h & i \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} c & -b & a \\ f & -e & d \\ i & -h & g \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \\ 4a & 4b & 4c \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & a & b & c \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ e & g & h & i \\ i & d & e & f \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} b & a & 0 & c \\ -6 & 4 & -2 & 8 \\ h & g & 0 & i \\ e & d & 0 & f \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2d & -2e & -2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

2.- Sin desarrollar los determinantes, demuestre las siguientes identidades, mencionando las propiedades correspondientes:

$\begin{vmatrix} x+y & 1 & z \\ x+z & 1 & y \\ y+z & 1 & x \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+c & a \\ b & b & b+d \end{vmatrix} =$ c.d ; $\begin{vmatrix} a & -a & -a \\ b & 0 & -b \\ c & c & 0 \end{vmatrix} =$ a.b.c

3.- En cada determinante explicar por qué las sustituciones x = 0 y x = 2 hacen que los determinantes sean iguales a 0

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ x & 1 & 2 \\ 2x & 0 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 8 & 8 & x^3 \\ 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$

4.- Calcular

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ e)

$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ h)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5.- Verificar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = a\,b\,(b-a)(a-1)(b-1)$

c) $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ ax & a & -1 & 0 \\ ax^2 & ax & a & -1 \\ ax^3 & ax^2 & ax & a \end{vmatrix} = a\,.\,(x+a)^3$ d) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 - y^4$

6.- Hallar los valores reales de x que anulan el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$

7) Demostrar que el determinante asociado a toda matriz ortogonal siempre es 1 o -1.

8) Sabiendo que $B = \begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+b & b & c \\ d & d & e \\ a+f & a & e \end{pmatrix}$ y que det(A) = $\begin{vmatrix} a & 0 & f \\ b & d & a \\ c & e & e \end{vmatrix} = -3$, hallar: det (B) .

9) Sabiendo que: A ε R^{4x4} , B ε R^{4x4} det (A) = 1/3 y det (B) = -3, hallar:

a) $\det(2.A.B^2)$ b) $\det(-3.A^2.B^T)$ c) $\det[2.A^T.B^2]^2$ d) $[\det(-1/3.A.B)^T]^{-2}$

10) Si: A es una matriz de orden 10, cuyo determinante asociado es: 3, ¿cuánto vale: det (k.A), cuando: k = -2?

11) ¿Cuánto vale k, si: det (k.A) = 1250, siendo det (A) = 2 y A es matriz de orden cuatro?

12) Resolver la ecuación: det (A – x.I) = 0 siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4{,}5 \end{pmatrix}$

13) Sea la sucesión de matrices: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Defina la ley de formación de los elementos a_{ij} de $A_n = (a_{ij})$, con $A_n \in R^{n\,x\,n}$ con $n \in N_{\geq 2}$, en función de las coordenadas: i, j del elemento.

b) Calcular, utilizando propiedades, los siguientes valores: $\det(A_2)$, $\det(A_3)$, $\det(A_4)$. Generalice, para: $\det(A_n)$, $\forall n \in N_{\geq 2}$.

c) ¿Es posible escribir a A_2, como el producto de una matriz simétrica S y una matriz antisimétrica M? En caso afirmativo encuentre S y M; en caso negativo justifique la respuesta.

-.-

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

1) La resolución es una propuesta, pero pueden resolverse utilizando otras propiedades y/o aplicación de las mismas en otro orden.

a) $\begin{vmatrix} a & b & -c \\ 2d & 2e & -2f \\ g & h & -i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{1} (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{2} (-1).2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{3} (-1).2.\frac{3}{2} = -3$

1) Prop. 3) a) tercer columna.
2) Prop. 3) a) segunda fila.
3) Valor del determinante.

b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{1} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$

1) Prop. 3) b) intercambio de la primera y tercer fila. $(F_1 \leftrightarrow F_3)$

c) $\begin{vmatrix} b & a-4c & c \\ e & d-ef & f \\ h & g-4i & i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{1} \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{2} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$

1) $C_2' : C_2 + 4\,C_3$
2) $C_1 \leftrightarrow C_2$

d) $\begin{vmatrix} 2b-4c & b & c \\ 2e-4f & e & f \\ 2h-4i & h & i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{1} \begin{vmatrix} 2b & b & c \\ 2e & e & f \\ 2h & h & i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{2} 0$

1) $C_1' : C_1 + 4\,C_3$
C_1 y C_2 proporcionales.