DETERMINANTES

La **función determinante** es una "función con valores reales de una variable matricial". A cada **matriz cuadrada** X le hace corresponder un número real f(X) = det(X)

$$\boxed{\text{det}: R^{nxn} \rightarrow R}$$

Conocemos que: det(A) para el caso de n=2: det(A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Definición

La *función determinante* (det) es la función que a cada matriz cuadrada A = (a_{ij}), A $\in$ R^{nxn} le hace corresponder el número real det(A)

$$\boxed{\text{det}: R^{nxn} \rightarrow R}$$

siendo: det(A) la suma de *todos* los *productos elementales con signo **de A***.

- ***Productos elementales de A:***

  Producto de n elementos de A de los cuales ningún par de factores pertenecen a la misma fila o a la misma columna de A.

Observaciones:

* Para las matrices de orden tres, como cada producto elemental (p.e.) tiene 3 factores, cada uno de ellos de distintas filas, todos se pueden expresar como: $a_{1-}.a_{2-}.a_{3-}$ (El conjunto ordenado de las **i** será en todos los p.e.: (1,2,3))

* Como ningún par de factores puede pertenecer a la misma columna, entonces los números **j** de columnas no tienen repeticiones y serán una *permutación* del conjunto {1,2,3}. Las 3!=6 permutaciones dan lugar a los seis p.e. descriptos.

- *Productos elementales **con signo** de A*

Para designar una permutación general del conjunto de los subíndice **j** se escribe (j_1,j_2,j_3,...j_n).

En una permutación hay una ***inversión*** cuando un número mayor precede a uno menor.

Para contar el *número total de inversiones* de una permutación (j_1,j_2,j_3,...j_n) se puede:

- Hallar el número de elementos que son menores que j_1 y que están *después* de j_1 en la permutación.
- Hallar el número de elementos que son menores que j_2 y que están después de j_2 en la permutación.
- Continuar el proceso con j_3, j_4 ... hasta j_{n-1}. La suma de estos números es el *número total de inversiones que hay en la permutación.*

Producto elemental con signo es el producto elemental

($a_{1,j1}$, $a_{2,,j2}$, $a_{3,j3}$, $a_{4,j4}$, ... $a_{n,jn}$) multiplicado por:

- +1 si el número total de inversiones de (j_1, j_2, ... j_n) es par
- -1 si el número total de inversiones de (j_1, j_2, ... j_n) es impar.

Cálculo del determinante de orden tres, utilizando la definicón:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = +b_{11}.b_{22}.b_{33} - b_{11}.b_{23}.b_{32} - b_{12}.b_{21}.b_{33} + b_{12}.b_{23}.b_{31} +$$

$$+ b_{13}.b_{21}.b_{32} - b_{13}.b_{22}.b_{31}$$

Propiedades de los determinantes

$A = (a_{ij})$, $A \in R^{nxn}$ (matriz cuadrada)

1.- Si A tiene:
a) una fila (o columna) de ceros
b) dos filas (o dos columnas) iguales
c) dos filas (o dos columnas) proporcionales

$\boxed{\det(A) = 0}$

Observación: si $A = O \rightarrow \det(O) = 0$

2.- Si A es una matriz:
a) triangular superior o
b) triangular inferior o
c) diagonal (o escalar)

$\boxed{\det(A) = a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} \,.\, \ldots\ldots\, a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$

Observación: si $A = I \rightarrow \det(I) = 1$

3.- Si B es la matriz que se obtiene:

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 54$

a) cuando una sola fila (o columna) de A se multiplica por el escalar h: $\boxed{\det(B) = h.\det(A)}$

Si: B , se obtiene multiplicando la segunda columna de la matriz A por: $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\, C_2\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \frac{1}{2}\det(A) \rightarrow 2\det(B) = \det(A)$$

b) cuando se intercambian dos filas (o dos columnas) de A: $\boxed{\det(B) = -\det(A)}$

Si: B , se obtiene intercambiando las filas uno y tres de la matriz A $(F_1 \leftrightarrow F_3)$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = -\det(A) \rightarrow -\det(B) = \det(A)$$

c) cuando una fila (o columna) de A se le suma otra paralela multiplicada por un escalar, el valor del determinante no varía: $\boxed{\det(B) = \det(A)}$

Si: B , se obtiene restándole a la primera fila de la matriz A , el triple de la segunda fila de la matriz A $(F_1 - 3\,F_2)$ y a la tercera fila de la matriz A la sumamos el doble de la segunda fila de A $(F_3 + 2\,F_2)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -14 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 16 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \det(A)$$

4.- Si elegimos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

a) Si $A \varepsilon R^{nxn}$ $\boxed{\det(k.A) = k^n . \det(A)}$

Para: $k = -3 \rightarrow -3\,A = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(-3\,A) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= (-3)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-27)\,.(-5) = 135$$

b) $\boxed{\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)}$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \wedge \quad \det(A) + \det(B) = (-5) + (-4) = -9$$

c) $\boxed{\det(A.B) = \det(A).\det(B)}$

$$A\,.\,B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 1 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A\,.\,B) = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 1 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

$$\det(A)\,.\det(B) = (-5)\,.(-4) = 20$$

d) $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$

e) Si A,C y D son matrices cuadradas iguales excepto en la fila h, donde la fila h de A es igual a la fila h de C, más la fila h de D, entonces: $\boxed{\det(A) = \det(C) + \det(D)}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+2 & -2+3 & 3+(-4) \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\det(C)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\det(D)} = 4 + (-9) = -5$$

f) $\boxed{\det(A^h) = [\det(A)]^h \quad ; \quad \forall\, h\, \varepsilon\, N}$

$$A^2 = A\,.\,A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^2) = \begin{vmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 25 = (-5)^2 = [\det(A)]^2$$

5.- **Cofactor** de un elemento de la matriz cuadrada A.

Se llama *cofactor* del elemento a_{ij} de la matriz A al número: $\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} . \det(m_{ij})}$, siendo m_{ij} la submatriz de A que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j. ($m_{ij} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$)

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1).1 = -1 \quad ; \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.4 = 4$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(-1) = 1$$

La matriz cuyos elementos son los cofactores de los elementos de A se llama matriz de cofactores de A

$$\boxed{\text{cof}(A) = (C_{ij})}$$

$$cof\ (A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz transpuesta de Cof (A) se llama **matriz adjunta** de A: $\boxed{\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T = \text{cof}(A^T)}$

$$adj\ (A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

6.- Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila (o columna). **Regla de Laplace**

a) Desarrollo de det (A) por los elementos de la **fila i** de A:

$$\boxed{\det(A) = a_{i1} . C_{i1} + a_{i2} . C_{i2} + a_{i3} . C_{i3} + ... + a_{in} . C_{in}}$$

Si desarrollamos al $\det(A)$ aplicando la regla de Laplace, por los elementos de la segunda fila, cuyos cofactores hallamos cuando definimos "cofactor", el cálculo del determinante resulta:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{2}_{a_{21}} C_{21} + \underbrace{(-1)}_{a_{22}} C_{22} + \underbrace{1}_{a_{23}} C_{23} = 2.(-1) + (-1).4 + 1.1 =$$
$$= -2 - 4 + 1 = -5$$

Pero si observamos por ejemplo la tercer fila, como la posición: $a_{32} = 0$, sería más conveniente, dado que uno de los términos se anula y el cálculo resulta presentado como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1}_{a_{31}} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{0}_{a_{32}} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{1}_{a_{33}} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1.0 + 0 + 1.(-6) = -5$$

b) Desarrollo de det (A) por los elementos de la **columna j** de A:

$$\boxed{\det(A) = a_{1j} . C_{1j} + a_{2j} . C_{2j} + ... + a_{nj} . C_{nj}.}$$

Con la observación que efectuamos en desarrollo del determinante, eligiendo la segunda fila, por la misma razón nos conviene desarrollar el determinante aplicando la regla de Laplace, por la segunda columna, es decir:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1}_{a_{12}} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)}_{a_{22}} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{0}_{a_{32}} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.(-1).1 + (-1).1.4 + + 0.(-1).5 = -1 - 4 + 0 = -5$$