## ALGUNOS EJERCICIOS SOBRE MATRICES

**1)** Hallar todas las matrices reales simétricas de orden dos, tales que su cuadrado resulte igual a: $4\,I$.

*Resolución:*

Ensayamos: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ , como $X^2 = 4\,I$ , luego

$$X^2 = X\,.X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x.y + y.z \\ x.y + y.z & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = 4\,.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y\,.(x+z) = 0 \rightarrow y = 0 \ \vee \ x+z = 0 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \ \vee \ x = -2 \\ z^2 = 4 \rightarrow z = 2 \ \vee \ z = -2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x = -z \rightarrow \begin{cases} z^2 + y^2 = 4 \rightarrow z^2 = 4 - y^2 \rightarrow z = \pm\sqrt{4 - y^2} \\ \forall\, y\, \varepsilon\, R \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$4 - y^2 \geq 0 \rightarrow -y^2 \geq -4 \rightarrow y^2 \leq 4 \rightarrow |y| \leq 2 \leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -z & y \\ y & z \end{pmatrix} \wedge z = \pm\sqrt{4 - y^2} \wedge -2 \leq y \leq 2 \right\}$$

**2)** Hallar todas las matrices reales de orden dos, triangulares inferiores y ortogonales.

*Resolución:*

Ensayamos: $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ , como $X$ debe ser ortogonal, luego se debe verificar: $X\,.X^T = I$

$$X\,.X^T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x.y \\ x.y & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \ \vee \ x = -1 \\ x\,.y = 0 \rightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Para que se verifique la primera ecuación, luego $x \neq 0 \rightarrow y = 0$ , con lo cual la tercera ecuación, queda reducida a: $z^2 = 1 \rightarrow z = 1 \ \vee \ z = -1$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

**3)** Hallar todas las matrices $A$ reales de orden tres, triangulares superiores, involutivas de índice dos $(A^2 = I)$, que: $A = (a_{i,j}) / \ a_{i,j} \ \rightarrow \begin{cases} x & si: \ i = j \\ y & si: \ j - i = 1 \\ z & si: \ a_{1,3} \end{cases}$ .

*Resolución:*

Construimos la matriz $A$, según las condiciones pedidas y obtenemos: $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, y como debe verificar que: $A^2 = I$ , luego:

$$A^2 = A\,.A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & xz + y^2 + zx \\ 0 & x^2 & 2xy \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = -1 \\ 2xy = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \\ \qquad xz + y^2 + zx = 0 \end{cases}$$

Como $x \neq 0$ , luego: $y = 0$ , con lo cual la tercera ecuación queda reducida a: $2xz = 0$ y como $x \neq 0$ , luego: $z = 0$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$