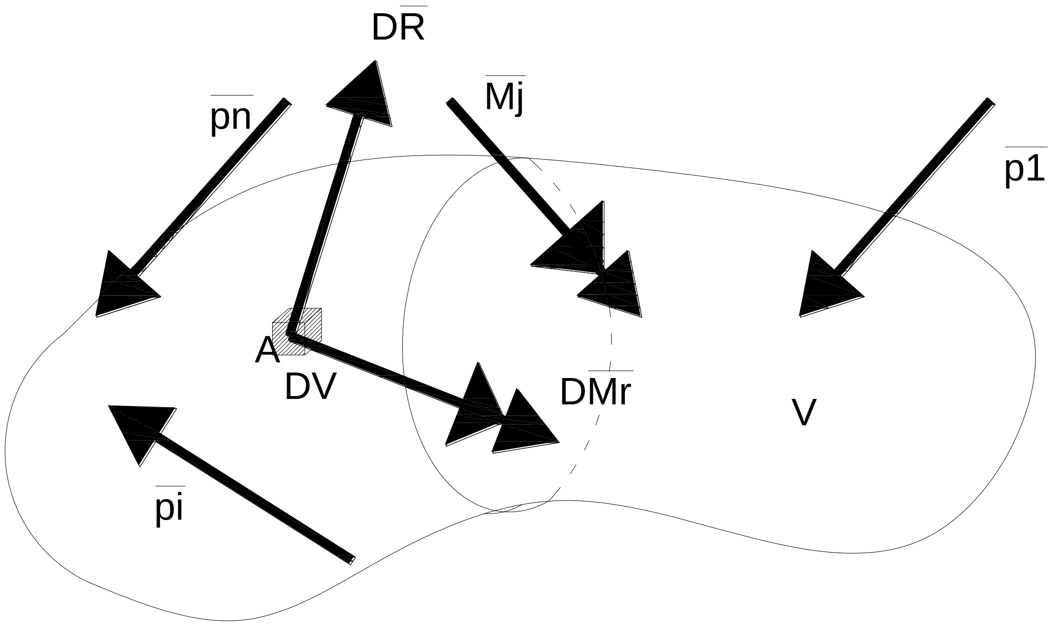
# SISTEMAS DE FUERZAS DISTRIBUIDAS

**Fuerzas distribuidas sobre un volumen**

Cuando estudiamos el equilibrio de los sistemas de fuerzas, suponíamos que estas actuaban sobre puntos materiales. Esto en la realidad no ocurre, sino que, todas las acciones entre sólidos, tanto externas como mutuas, se manifiestan a través de superficies. Por ejemplo, si consideramos una esfera correspondiente a un rodamiento, podría suponerse que la misma interactúa con la superficie de rodadura a través de un punto, pero en la realidad, los materiales, de cualquier naturaleza, sufren deformaciones, y la esfera mencionada, hace contacto con la superficie de rodadura a través de una minúscula superficie, tan pequeña, que a los fines prácticos podemos considerar como carga concentrada.

Sea el cuerpo de volumen **V** de la figura n º 1, sometido a las solicitaciones $p_i$, y separamos un elemento diferencial de volumen **ΔV** , colocándole las interacciones con elementos diferenciales contiguos a través de las superficies de contacto son $\Delta\vec{R}$ ; $\Delta\overrightarrow{M_R}$ .

figura n º 1




Si llamamos carga específica media $\overrightarrow{q_m}$ distribuida sobre un volumen **ΔV** a,

$$(1)\quad \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta V} = \overrightarrow{q_m}$$

luego, si queremos conocer la carga específica en el punto **A**, en lugar del diferencial de volumen, será,

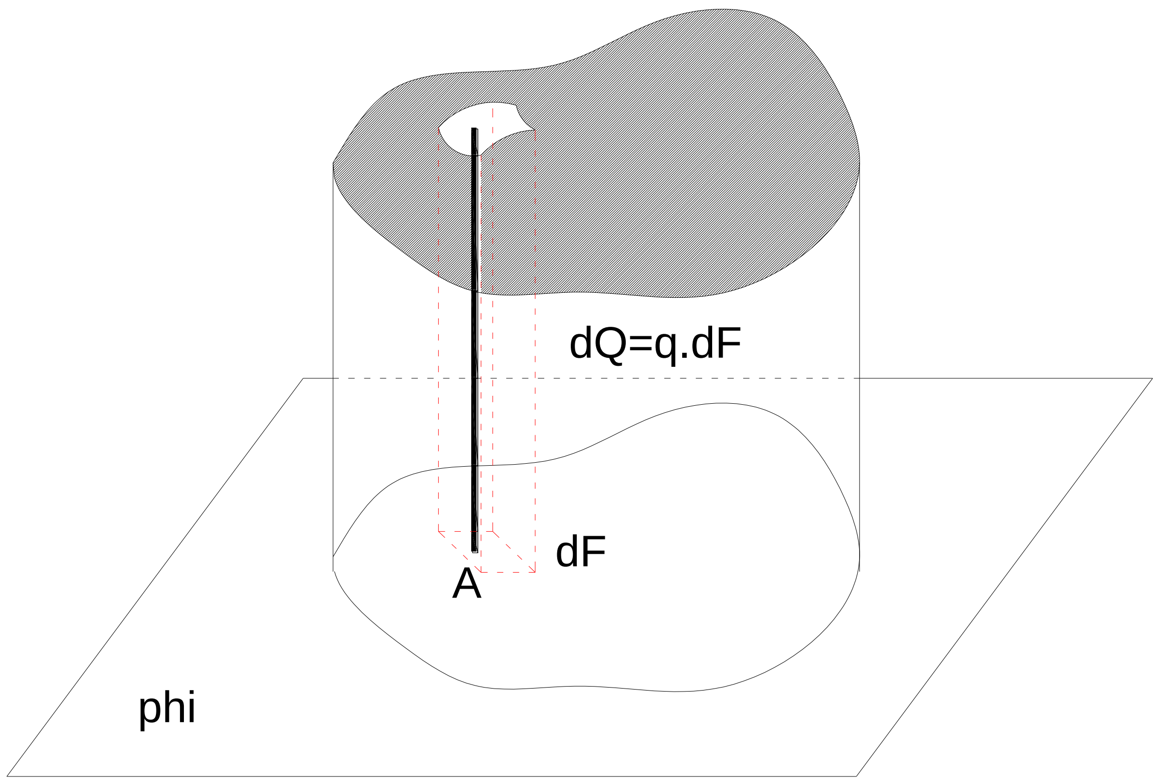
$$(2)\quad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta V} = \frac{d\vec{R}}{dV} = \vec{q}$$

Donde $\vec{q}$ carga específica en **A** de la fuerza distribuida sobre un volumen. Con respecto al momento de reducción en A,

$$(3)\quad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{M_R}}{\Delta V} = 0$$

supongamos el cuerpo de la figura n º 2 que apoya en el plano π, y, actuando la carga distribuida en forma continua sobre la superficie, que podemos considerar como un conjunto infinito de fuerzas concentradas de intensidad infinitamente pequeñas y paralelas a sí mismas.

figura n º 2



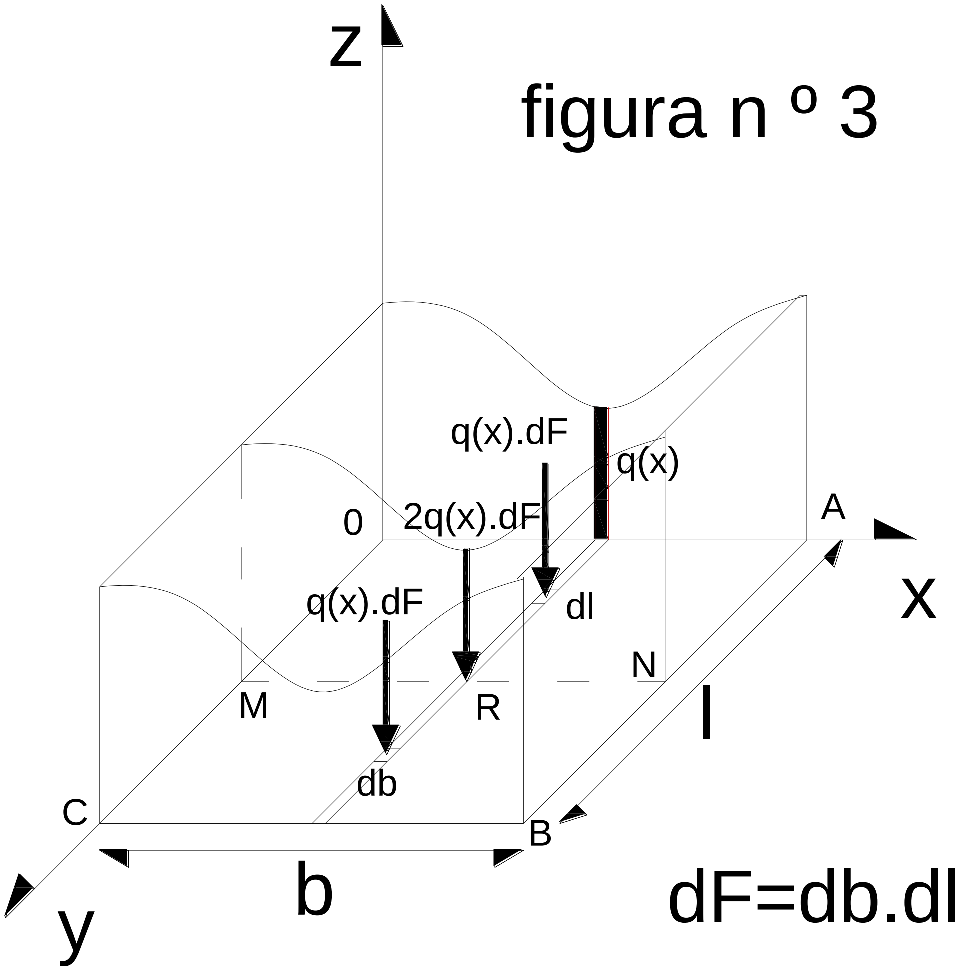

Sea un punto **A**, un punto de la superficie, y un entorno **ΔF** muy pequeño del mismo, y, si **ΔQ** es la resultante de las fuerzas infinitésimas que actúan en el entorno que consideramos , denominamos intensidad de carga media en el entorno, a,

$$(4)\ q_m = \frac{\Delta Q}{\Delta F}$$

Disminuyendo el entorno **ΔF** hasta que tienda a 0, llamamos intensidad de fuerza distribuida o intensidad de carga en el punto a,

$$(5)\quad \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = q$$

consideremos una superficie **OABC**, sobre la misma actúa una carga distribuida de intensidad constante en dirección **y**, y variable arbitrariamente en la dirección **x**, cuya ley de variación $q_{(x)}$, y la misma posee un je de simetría **MN**, como lo muestra la figura n º 3.




La carga tiene una longitud **l** en la dirección **y**, y **b** en la dirección **x**, luego, considerando dos elementos **dF** en una banda paralela al eje **y** de ancho **db**, y equidistantes del eje de simetría **MN** dos elementos $dF = db.dl$, en los mismos actúan cargas concentradas $q_{(x)}.dF$, de forma tal, que la resultante entre estas dos fuerzas concentradas, será otra fuerza concentrada de intensidad $2q_{(x)}.dF$ ubicada en el punto **R** del eje de simetría. El procedimiento se puede repetir para cada par de elementos de superficie **dF** dispuestos simétricamente sobre la faja, y la resultante de estos se encontrará en el punto R, de forma tal que la sumatoria de estas sobre cada faja $dF = db.dl$ será,

$$dQ = \int_0^l q_{(x)}.db.dl \qquad (4)$$

Luego, debido a que **db** es constante, la expresión (4) queda,

$$dQ = q_{(x)}.l.db \qquad (5)$$

en donde,

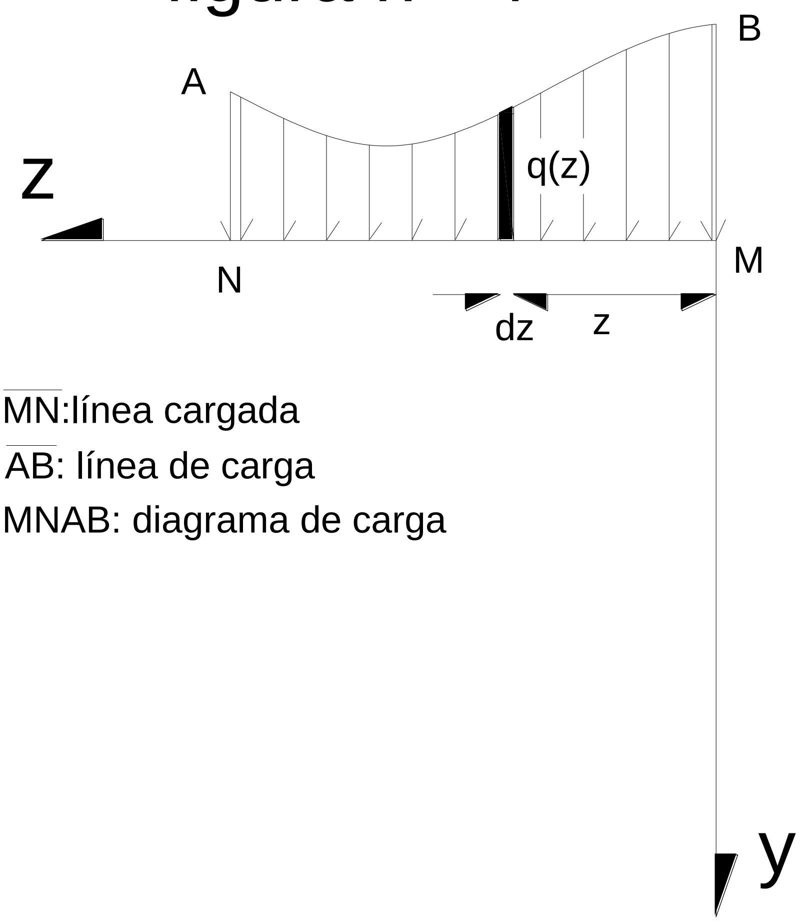
$$\frac{dQ}{db} = q_{(x)}.l = p_{(x)} \qquad (6)$$

Siendo $p_{(x)}$ la intensidad de carga en el punto **R** de una carga distribuida a lo largo de MN.

Para el concepto de intensidad de carga a lo largo de una línea, el concepto es el mismo que carga distribuida en una superficie, pero, mientras que las cargas distribuidas en la superficie lleva unidades $\left[\frac{dQ}{dF}\right] = \left[\frac{\vec{F}}{L^2}\right];.......;\frac{Kgf}{m^2},\frac{Kgf}{cm^2},\frac{N}{cm^2},.....$, la carga distribuida en una línea le corresponde, $\left[\frac{dQ}{db}\right] = \left[\frac{\vec{F}}{L}\right];.......;\frac{Kgf}{m},\frac{Kgf}{cm},\frac{N}{m},....$

Repitiendo el procedimiento para las infinitas bandas de ancho **db** tenemos, la totalidad de la carga actuando sobre **MN**, llamándose esta, **"línea cargada"**, mientras que los extremos de la configuración se denominan **"línea de carga"**, y, la superficie contenida entre la línea cargada, la línea de carga, y las ordenadas extremas se denomina **"diagrama de carga"**. En la figura n º 4 mostramos esto.

figura n º 4




$\overline{MN}$:línea cargada

$\overline{AB}$: línea de carga

MNAB: diagrama de carga

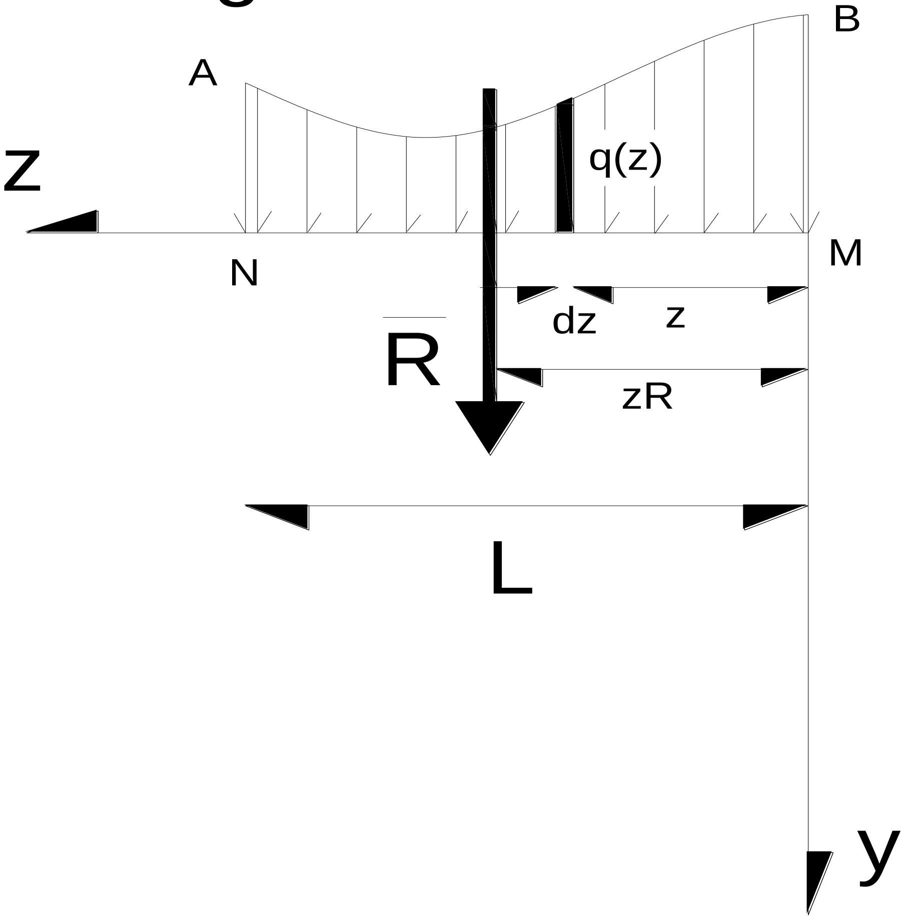
**Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea**

Como sabemos, una carga distribuida en una línea es un conjunto infinito de fuerzas concentradas paralelas de intensidad infinitamente pequeñas, por consiguiente, la resultante R será una fuerza paralela al conjunto que cumpla con las condiciones de equivalencia de los sistemas de fuerzas paralelas.

Suponiendo el diagrama de carga de la figura n º 5, una carga linealmente repartida de intensidad $q_{(z)}$ en MN de longitud **L**, la resultante **R** debe cumplir con la primera condición.

$$(7) \quad R = \int_0^L q_{(z)} . dz$$

Es decir, su intensidad será igual a la suma de las infinitas intensidades infinitesimales $q_{(z)} . dz$ en la longitud L.




Luego, la segunda condición que debe cumplir, se refiere a la ubicación $z_R$ en el plano de la resultante, y, de acuerdo al teorema de Varignon,

$$(8) \quad R.z_R = \int_0^L q_{(z)}.z.dz$$

De (8) obtenemos,

$$(9) \quad z_R = \frac{\int_0^L q_{(z)}.z.dz}{R} = \frac{\int_0^L q_{(z)}.z.dz}{\int_0^L q_{(z)}.dz}$$

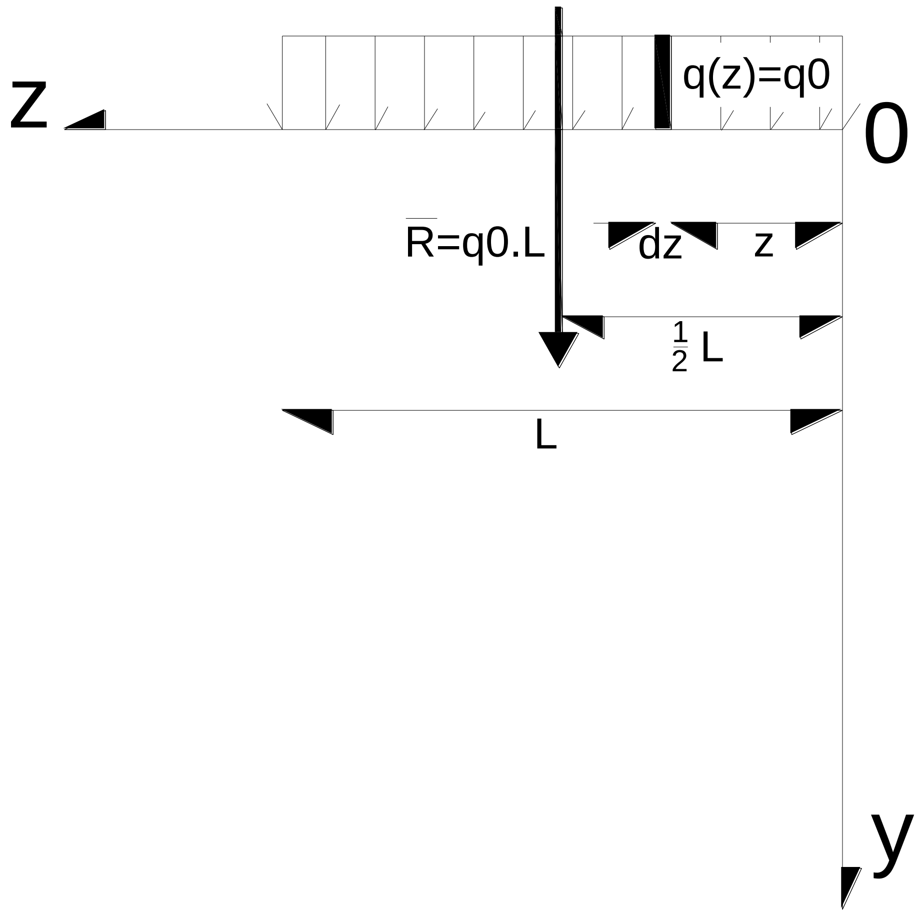
Con lo cual, $z_R$ la abscisa de R, como lo indicamos en la figura n º 5.

**Resultantes de cargas distribuidas sobre una línea y abscisas $z_R$**

A continuación, consideramos algunas cargas distribuidas sobre una línea, comenzando por,

* a) Carga uniformemente distribuida $q_{(z)} = q_0$, cuya representación observamos en la figura n º 6, cuya longitud es **L**.

figura n º 6




Ahora, consideramos una carga distribuida $q_{(z)} = q_0$ en un diferencial de longitud **dz**, en una abscisa cualquiera **z**, y la resultante **R**,

$$(10) \quad \mathrm{R} = \int_0^L \mathrm{q}_{(z)} . dz = q_0 . z\Big|_0^L \quad \rightarrow \quad \mathrm{R} = \mathrm{q}_0 . L$$

Y la posición de la posición de la resultante $z_R$

$$(11) \qquad z_R = \frac{q_0 \int_0^L z.dz}{q_0 \int_0^L dz} \rightarrow z_R = \frac{\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^L}{\left. z\right|_0^L} = \frac{1}{2}L$$

* b) Carga linealmente repartida de intensidad máxima $q_0$ en el extremo **z = L**, cuya representación se observa en la figura n º 7.

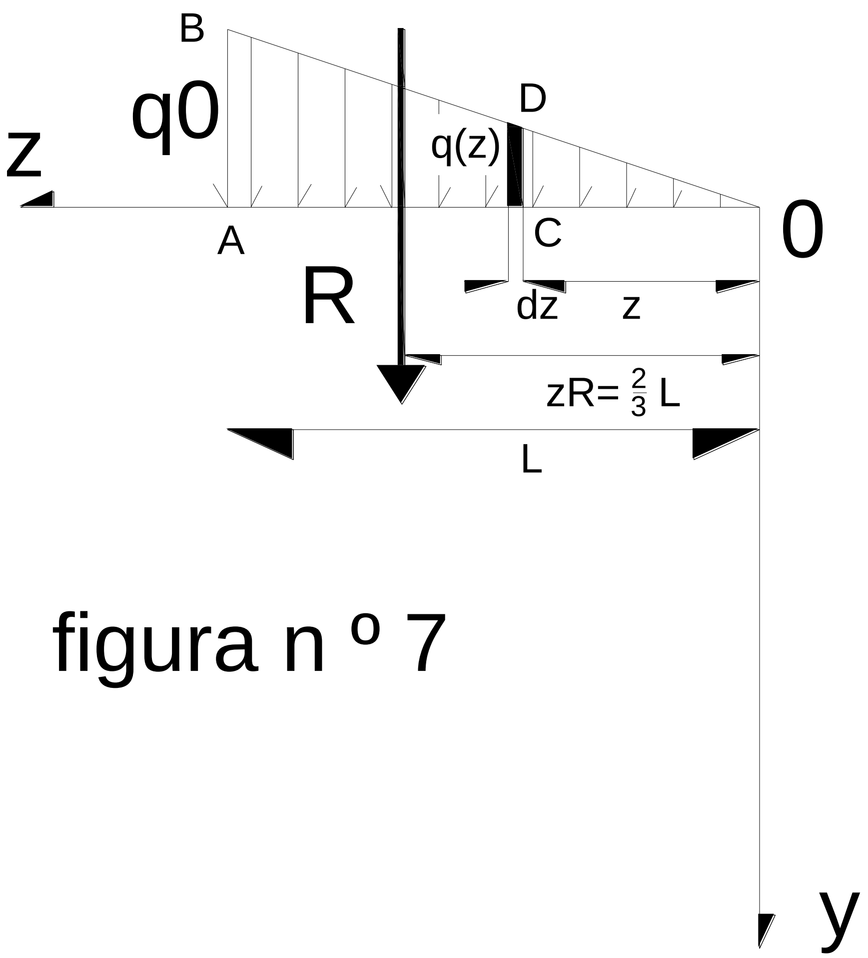



figura n º 7

Análogamente al caso anterior, consideramos una carga distribuida $q_{(z)}$ en un diferencial de longitud **dz**, obteniéndose una carga concentrada infinitesimal $q_{(z)}.dz$ , siendo su resultante,

$$(12) \qquad R = \int_0^L q_{(z)}.dz$$

Luego, los por semejanza de los triángulos $OAB \approx OCD$, resulta,

$$(13) \qquad \frac{q_{(z)}}{q_0} = \frac{z}{L} \quad \rightarrow \quad q_{(z)} = q_0 \cdot \frac{z}{L}$$

Que, reemplazando (13) en (12), resulta,

$$(14) \qquad R = \frac{q_0}{L} \int_0^L z.dz$$

Surgiendo de (14),

$$(15) \qquad R = \frac{q_0}{L} \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^L = \frac{1}{2} q_0.L$$

En cuanto a su abscisa $z_R$,

$$z_R = \frac{\frac{q_0}{L} \int_0^L z^2 dz}{\frac{q_0}{L} \int_0^L z.dz} \quad \rightarrow \quad z_R = \frac{\left. \frac{z^3}{3} \right|_0^L}{\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^L} = \frac{2}{3} L \qquad (16)$$

* c) Carga linealmente distribuida de intensidad máxima $q_0$ en el extremo **z = L**, e intensidad mínima $q_1$ en **z = 0**. Esta situación se muestra en la figura n º 8.

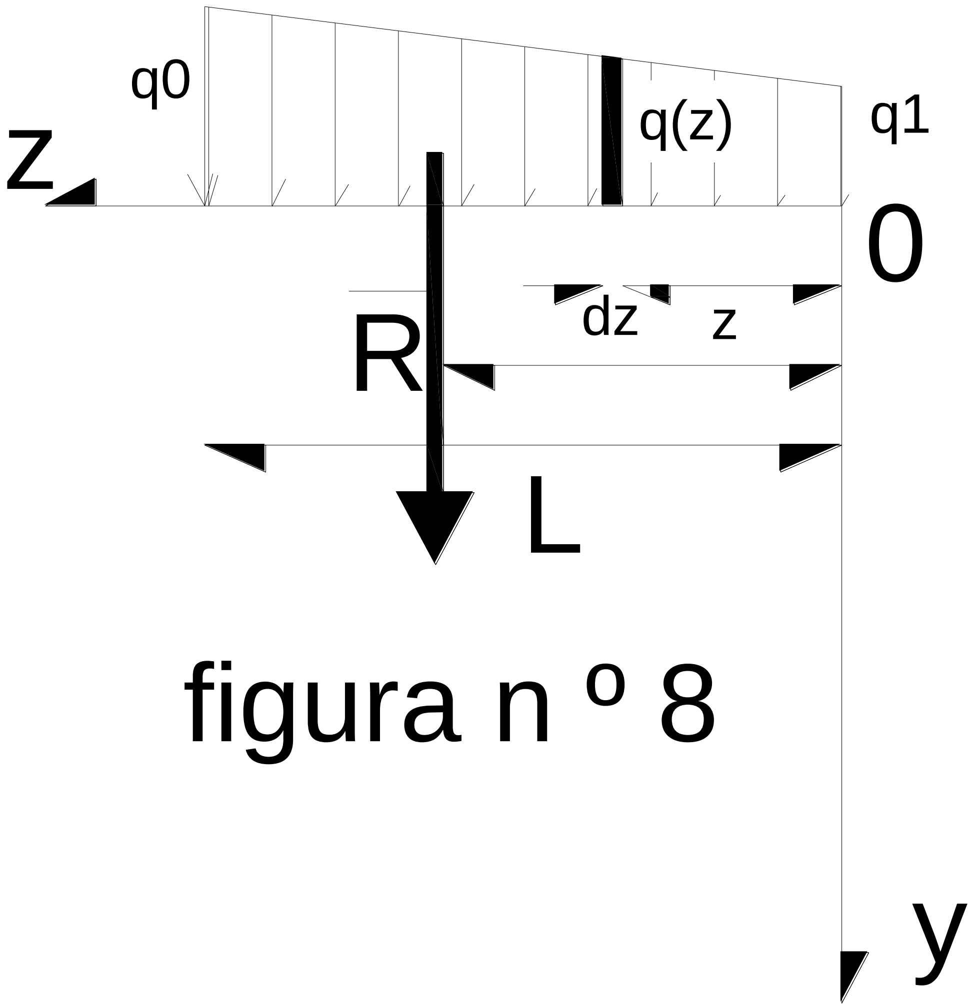



figura n º 8

Para determinar la resultante **R**, podemos considerar la carga distribuida $q_{(z)}$, formada por la superposición de una carga uniformemente distribuida de intensidad $q_1$, y otra carga linealmente distribuida de intensidad máxima $(q_0 - q_1)$en **z = L**, y $q_{(z)} = 0$ en z = 0. En consecuencia. podemos expresar la carga $q_{(z)}$

$$(17) \quad q_{(z)} = q_1 + (q_0 - q_1)\frac{z}{L}$$

Que, reemplazando en la expresión (7), resulta,

$$(18) \quad R = \int_0^L \left[ q_1 + (q_0 - q_1)\frac{z}{L} \right] dz$$

De donde,

$$(19) \qquad \mathrm{R} = q_1 . z\Big|_0^L + \frac{q_0 - q_1}{L} . \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^L \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{R} = \frac{q_0 + q_1}{2} L$$

Mientras que, su abscisa $z_R$,

$$z_R = \frac{\int_0^L \left[ q_1 + \frac{q_0 - q_1}{L} z \right] z.dz}{\frac{q_0 + q_1}{2}} \qquad (20)$$

En donde,

$$z_R = \frac{q_1 . \frac{z^2}{2}\Big|_0^L + \frac{q_0 - q_1}{L} . \frac{z^3}{3}\Big|_0^L}{\frac{q_0 + q_1}{2} L} \qquad \rightarrow \qquad z_R = \frac{\frac{2q_0 + q_1}{6} L}{\frac{q_0 + q_1}{2}} = \frac{L}{3} \frac{2q_0 + q_1}{q_0 + q_1} \qquad (21)$$