SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN DEL PRIMER TRABAJO PÁCTICO DE LA GUÍA

EJERCICIO 1

Para resolverlo, se aconseja ubicarse en ambiente y ubicarse mirando un rincón, donde la pared de enfrente te representa el primer cuadrante del plano: yz, a tu izquierda, tenés parte del semiplano: xz, y el piso, te representa parte del semiplano: xy.

EJERCICIO 2

2.1) Si el vector es paralelo al eje "x", debes ensayar: $\vec{a} = (a_1\,;0\,;0)$ y considerar las demás condiciones que debe cumplir el vector.

2.2) Para hallar los vectores que deben cumplir las condiciones pedidas, debes ensayar un vector genérico, que verifique: $\vec{a} = (0\,;\,a_2\,;\,a_3) \;\wedge\; |\vec{a}| = 2 \;\wedge\; \cos\widehat{\alpha_2} = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \cos\widehat{\alpha_3}$.

2.3) Para plantear los vectores que verifican las condiciones pedidas, se propone ensayar en forma genérica: $\vec{a} = (0\,;0\,;\,a_3) \;\wedge\; |\vec{a}| = 2$.

2.4) Los vectores genéricos que van a cumplir las condiciones pedidas, deben ser propuestos como:

$\vec{a} = (a_1\,;0\,;\,a_3) \;\wedge\; |a_1| = |a_3|$.

2.5) Los vectores que van a verificar las condiciones pedidas, serán:

$|\vec{a}| = \sqrt{2} \;\wedge\; \vec{a} = (a_1\,;\,a_2\,;0) \;\wedge\; a_1 = a_2$.

EJERCICIO 4

Observen y determinen las coordenadas de cada uno de los vértices, desde la posición inicial, el paso intermedio y las coordenadas de los vértices en su posición final.

Recuerden que la $d(B_1\,;\,B_3) = \left|\overrightarrow{B_1\,B_3}\right|$. Y lo pueden efectuar con cada uno de los vértices del cuadrilátero, observando el movimiento que se está realizando.

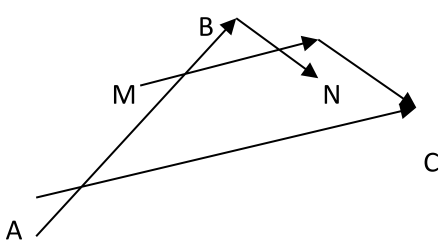
EJERCICIO 5

5.3) Para hallar las componentes del vector: $\vec{x}$, sería conveniente despejar a este vector, de la ecuación vectorial presentada y luego efectuar el cálculo correspondiente.

EJERCICIO 6

6.3) Algunas indicaciones:

6.3.a) Si realizamos un esquema, donde orientamos vectorialmente los lados del triángulo convenientemente:

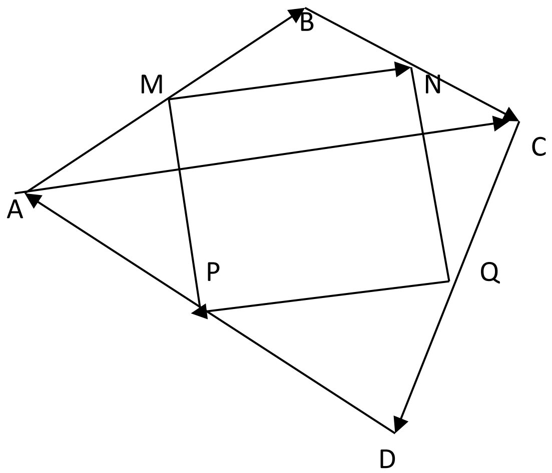


H) $\overset{\Delta}{\overbrace{ABC}}$, donde: M es punto medio de $\overrightarrow{AB}$ y N es punto medio de $\overrightarrow{BC}$

T) $\overrightarrow{AC} \;//\; \overrightarrow{MN}$ y $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}|$

D) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{BN}$ y a continuar ….

6.3.b)



Si en el cuadrilátero ABCD, trazamos una de las diagonales y pensamos en la demostración realizada en el ítem anterior, la demostración se puede realizar.

EJERCICIO 7

7.3) Si consideran el gráfico de un cubo, de arista de longitud: $a \;\varepsilon\; R_{>0}$, (pueden hacer referencia al cubo dibujado en el Ejercicio 1, una de las diagonales del cubo, podría estar determinada por: $\overrightarrow{V_8V_3}$ y la diagonal de una de las caras, podría ser: $\overrightarrow{V_3V_5}$.

EJERCICIO 8

8.4) Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, si consideramos que son dos lados consecutivos de un cuadrilátero, éste resulta un rectángulo, donde: $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$, representan las diagonales de ése rectángulo y con la demostración que se pide realizar, demostramos que las longitudes de las diagonales del rectángulo resultan iguales.

EJERCICIO 9

9.8) Está realizada en otro archivo y que, además, sirve como orientación, para resolver el ejercicio 9.7).

EJERCICIO 10

10.4) Para demostrar analíticamente la igualdad, se sugiere: $\vec{c}\;x\;\vec{d} = \vec{e}$. Si utilizamos expresiones conocidas y propiedades, resulta:

$$\left(\vec{a}\;x\;\vec{b}\right)\,x\,\left(\vec{c}\;x\;\vec{d}\right) = \left(\vec{a}\;x\;\vec{b}\right)\,x\;\vec{e} = (\vec{a}\,.\vec{e})\,\vec{b} - \left(\vec{b}\,.\vec{e}\right)\vec{a} = \left[\vec{a}\,.\left(\vec{c}\,x\,\vec{d}\right)\right]\vec{b} - \left[\vec{b}\,.\left(\vec{c}\,x\,\vec{d}\right)\right]\vec{a} =$$

$$= \left(\vec{a}\,;\,\vec{c}\,;\,\vec{d}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\,;\,\vec{c}\,;\,\vec{d}\right)\vec{a} = 0\,\vec{b} - 0\,\vec{a} = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

Sería conveniente justificar cada paso y considerar la hipótesis, para comprender la demostración.

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS DEL PRIMER TRABAJO PÁCTICO DE LA GUÍA

EJERCICIO 7.4) c)

Dados los vectores: $\vec{a} = (\alpha\,;\,-1\,;2)$ y $\vec{b} = (1\,;\,-2\,;4)$ y $\cos\hat{\theta} = -\frac{6}{21}$.

Resolución:

$$\cos\hat{\theta} = \frac{\vec{a}\ .\ \vec{b}}{|\vec{a}|\ .\ |\vec{b}|} \quad\rightarrow\quad -\frac{6}{21} = \frac{\alpha - 10}{\sqrt{\alpha^2 + 5}\ .\ \sqrt{21}} \quad\rightarrow\quad -\frac{2}{7}\ .\ \sqrt{21}\ .\ \sqrt{\alpha^2 + 5} = \alpha - 10$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado y haciendo pasaje de términos, obtenemos:

$$12\ (\alpha^2 + 5) = 7\ (\alpha - 10)^2 \quad\rightarrow\quad 12\,\alpha^2 + 60 = 7\ (\alpha^2 - 20\,\alpha + 1000)$$

$$5\,\alpha^2 + 140\,\alpha - 640 = 0 \quad\rightarrow\quad \alpha^2 + 28\,\alpha - 128 = 0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\alpha_1 = 4\ \vee\ \alpha_2 = -32}$$

EJERCICIO 9.8)

Todos los vectores $\vec{x}$ que verifican que: $\vec{a}\ x\ \vec{x} = \vec{c}$. D existir al menos una respuesta. ¿es única?

Resolución:

Los vectores que ensayamos son: $\vec{x} = (x_1\,;\,x_2\,;\,x_3)$, siendo: $\vec{a} = (1\,;1\,;\,-1)$ y $\vec{c} = (0\,;2\,;2)$.

$$\text{Calculamos: } \vec{a}\ x\ \vec{x} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\ x\ \vec{x} = (x_3 + x_2\,;\,-x_3 - x_1\,;\,x_2 - x_1) = (0\,;2\,;2) = \vec{c}$$

Por definición de igualdad de vectores, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ -x_1 - x_3 = 2 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 2 & (3) \end{cases}$$

Si despejamos de la ecuación (1): $x_3 = -x_2$ y al remplazar en las otras dos ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Al obtener las dos ecuaciones iguales, alcanza con despejar de una de ellas a x_1 y se obtiene: $x_1 = -2 + x_2$

Con lo cual los vectores que verifican con las condiciones pedidas son: $\vec{x} = (-2 + x_2\,;\,x_2\,;\,-x_2)$.

Como los posibles vectores que se obtiene dependen del valor elegido para: x_2 , son infinitos los vectores posibles.

Algunos ejemplos:

Si: $x_2 = 0 \rightarrow \vec{x} = (-2\,;0\,;0)$

Si: $x_2 = 1 \rightarrow \vec{x} = (-1\,;1\,;\,-1)$

Si: $x_2 = -3 \rightarrow \vec{x} = (-5\,;\,-3\,;3)$

Para verificar que los infinitos vectores solución, son: $\vec{x} = (-2 + x_2\,;\,x_2\,;\,-x_2)\ \forall\,x_2\ \varepsilon\ R$, debemos tener presente que:

$\vec{a} \perp \vec{c} \quad \rightarrow \quad \vec{a}\,.\,\vec{c} = (1\,;1\,;-1)\,.\,(0\,;2\,;2) = 0+2-2 = 0$

$\vec{x} \perp \vec{c} \quad \rightarrow \quad \vec{x} = (-2+x_2\,;\,x_2\,;-x_2)\,.\,(0\,;2\,;2) = 0 + 2\,x_2 - 2\,x_2 = 0$

Nota:

Recuerde que: $\vec{c}$ debe ser perpendicular al plano determinado por los vectores: $\vec{a}$ y $\vec{x}$ (dirección del resultado de: $\vec{a}\ x\ \vec{x}$) .

EJERCICIO 11.3)

Justificar si son verdaderas o falsas, cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, proponer un contraejemplo.

Resolución:

11.3.a) $\forall\, \vec{a}\, \varepsilon\, R^3\,,\ \forall\, \vec{b}\, \varepsilon\, R^3\,, \forall\, \vec{c}\, \varepsilon\, R^3 :\ (\vec{a} - \vec{b})\,x\,2\,\vec{c} = 2\,[\vec{c}\ x\ (\vec{b} - \vec{a})]$ **VERDADERA**

$$(\vec{a} - \vec{b})\ x\ 2\,\vec{c} \underbrace{=}_{1} 2\,[(\vec{a} - \vec{b})\,x\,\vec{c}] \underbrace{=}_{2} 2\,[-\vec{c}\ x\ (\vec{a} - \vec{b})] \underbrace{=}_{3} 2\ \left[\vec{c}\ x\,[-1\,(\vec{a} - \vec{b})]\right] \underbrace{=}_{4} 2\,[\vec{c}\ x\ (\vec{b} - \vec{a})]$$

1) Asociativa del escalar con el producto vectorial.
2) Propiedad anticonmutativa del producto vectorial.
3) Asociativa del escalar con el producto vectorial.
4) Distributiva del escalar, respecto a la suma de vectores.

11.3.b) $\forall\, \vec{v}\, \varepsilon\, R^3 :\ \hat{\imath}\,x\,(\vec{v}\,x\,\hat{\imath}) + \hat{\jmath}\,x\,(\vec{v}\,x\,\hat{\jmath}) + \hat{k}\,x\,(\vec{v}\,x\,\hat{k}) = 2\,\vec{v}$ **VERDADERA**

Si: $\vec{v} = (v_1\,;\,v_2\,;\,v_3) = v_1\,\hat{\imath} + v_2\,\hat{\jmath} + v_3\,\hat{k}$

$$\hat{\imath}\,x\,(\vec{v}\,x\,\hat{\imath}) + \hat{\jmath}\,x\,(\vec{v}\,x\,\hat{\jmath}) + \hat{k}\,x\,(\vec{v}\,x\,\hat{k}) \underbrace{=}_{1} |\hat{\imath}|^2\,\vec{v} - (\hat{\imath}\,.\,\vec{v})\,\hat{\imath} + |\hat{\jmath}|^2\,\vec{v} - (\hat{\jmath}\,.\,\vec{v})\,\hat{\jmath} + |\hat{k}|^2\,\vec{v} -$$

$$-(\hat{k}\,.\,\vec{v})\,\hat{k} \underbrace{=}_{2} \vec{v} - v_1\,\hat{\imath} + \vec{v} - v_2\,\hat{\jmath} + \vec{v} - v_3\,\hat{k} \underbrace{=}_{3} 3\,\vec{v} - (v_i\,\hat{\imath} + v_2\,\hat{\jmath} + v_3\,\hat{k}) \underbrace{=}_{4} 3\,\vec{v} - \vec{v} \underbrace{=}_{5} 2\,\vec{v}$$

1) Aplicación de la expresión equivalente del doble producto vectorial:
   $(\vec{a}\,x\,\vec{b})\,x\,\vec{c} = (\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b}\,.\,\vec{c})\,\vec{a}$
2) $|\hat{\imath}|^2 = |\hat{\jmath}|^2 = |\hat{k}|^2 = 1$ y aplicación de la definición del producto escalar.
3) Suma de términos semejantes y asociativa de términos con extracción de factor común (-1).
4) Definición del vector $\vec{v}$.
5) Definición de suma de vectores.

11.3.c) $\forall\, \vec{a}\, \varepsilon\, R^3\,,\ \forall\, \vec{b}\, \varepsilon\, R^3 :\ \vec{a}\,x\,[\vec{a}\,x\,(\vec{a}\,x\,\vec{b})] = -|\vec{a}|^2\,(\vec{b}\,x\,\vec{a})$ **FALSA**

Un contraejemplo podría ser (sería conveniente buscar otro…):

Si los vectores elegidos son: $\vec{a} = (1\,;-1\,;1)$ y $\vec{b} = (0\,;2\,;1)$, resulta:

$\vec{a}\,x\,[\vec{a}\,x\,(\vec{a}\,x\,\vec{b})] = (9\,;\,3\,;-6)$ y $-|\vec{a}|^2\,(\vec{b}\,x\,\vec{a}) = (-9\,;-3\,;6)$, con lo cual, los resultados que encontramos son vectores opuestos.

11.3.d) $\forall\, \vec{a}\, \varepsilon\, R^3\,, \forall\, \vec{b}\, \varepsilon\, R^3 :\ (\vec{a} + \vec{b})\,.\,(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ **VERDADERA**

Si: $\vec{a} = (a_1 \,;\, a_2 \,;\, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1 \,;\, b_2 \,;\, b_3)$

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) \underbrace{=}_{1} (a_1 + b_1 \,;\, a_2 + b_2 \,;\, a_3 + b_3).(a_1 + b_1 \,;\, a_2 + b_2 \,;\, a_3 + b_3) \underbrace{=}_{2} (a_1 + b_1)^2 +$$

$$+ (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 \underbrace{=}_{3} \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2$$

1) Definición de suma de vectores.
2) Definición de producto escalar.
3) Definición de módulo de un vector: si: $\vec{x} = (x_1 \,;\, x_2 \,;\, x_3) \quad \rightarrow \quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$ luego: $|\vec{x}|^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$.

11.3.e) $\forall \, \vec{a} \, \varepsilon \, R^3 \,,\, \forall \, \vec{b} \, \varepsilon \, R^3 \,:\, (\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$ **FALSO**

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 \neq |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$$

<u>Contraejemplo</u>:

Si: $\vec{a} = (3 \,;\, -1 \,;\, 1)$ y $\vec{b} = (1 \,;\, 5 \,;\, -3) \quad \rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = (4 \,;\, 4 \,;\, -2)$

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}\right)^2 = 6^2 = 36$$

$$|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = 11 + 35 = 46$$

11.3.f) No existen vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en R^3, tales que la terna de vectores $\{\vec{a} \,,\, \vec{b} \,,\, \vec{a} \, x \, \vec{b}\}$ resulten coplanares.

- Si: alguno de los vectores $\vec{a}$ ó $\vec{b}$ es el vector nulo, la proposición resulta **FALSA**, ya que el producto mixto resulta igual a: 0. Además el vector nulo, siempre resulta coplanar con cualquier vector.
- Si: los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos:

  $\vec{a} \,//\, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{b} = \alpha \,.\, \vec{a} \;\wedge\; \alpha \neq 0$ (pues $\alpha = 0, \vec{b} = \vec{0}$ está contemplado en el análisis anterior), luego : $(\vec{a} \,;\, \alpha \, \vec{a} \,;\, \vec{a} \, x \, (\alpha \, \vec{a})) = (\vec{a} \,;\, \alpha \, \vec{a} \,;\, \vec{0}) = 0 \quad \rightarrow$ los vectores resultan coplanares, entonces existen vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de R^3 que resultan coplanares.

Por lo tanto, la afirmación resulta **FALSA**, pues la afirmación asegura que <u>**no**</u> existen vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de R^3, tales que la terna de vectores $\{\vec{a} \,,\, \vec{b} \,,\, \vec{a} \, x \, \vec{b}\}$ resulten coplanares.

<u>**EJERCICIO 12.2)**</u>

Dadas las regiones de R^2 , describirlas en la forma: $\vec{v} = \lambda \, \vec{a} + \mu \, \vec{b}$, indicado los vectores: $\vec{a}$ y $\vec{b}$ elegidos como así también el rango de variación de los parámetros reales de λ y μ para cada caso.

<u>*Resolución:*</u>

Se presentan una de las posibles soluciones, porque de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ elegidos dependerá la variación de los parámetros λ y μ .

a) Si: $\vec{a} = (2\,;0)$ y $\vec{b} = (0\,;1)$, la variación de los parámetros será: $\lambda > 1$ y $\mu \geq 1$.
b) Si: $\vec{a} = (2\,;-1)$ y $\vec{b} = (0\,;1)$, la variación de los parámetros será: $\forall\,\lambda\,\varepsilon\,R$ y $\mu > 0$.
c) Si: $\vec{a} = (2\,;-1)$ y $\vec{b} = (0\,;1)$, la variación de los parámetros será: $\forall\,\lambda\,\varepsilon\,R$ y $\mu \geq 1$.
d) Si: $\vec{a} = (1\,;3)$ y $\vec{b} = (0\,;4)$, la variación de los parámetros será: $0 \leq \lambda \leq 1$ y $0 \leq \mu \leq 1$
e) Si: $\vec{a} = (1\,;3)$ y $\vec{b} = (1\,;0)$, la variación de los parámetros será: $1 \leq \lambda \leq 2$ y $0 \leq \mu \leq 4$.

Nota: Una vez que analicen las posibilidades, intenten de representar y verificar que coincide con las representaciones dadas.

MISCELÁNEA M3

En R^2. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r_1 \equiv y - 3x + 1 = 0$ y

$r_2 \equiv 4y - x - 7 = 0$ siendo $A\,(5\,;4)$ uno de los vértices. Hallar las coordenadas de los otros tres vértices.

Respuesta:

Uno de los vértices faltantes, lo podemos determinar como intersección de las dos rectas dadas, es decir resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -3x + y = -1 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad B\,(1\,;2)$$

Dado que los vértices corresponden a un paralelogramo, debemos buscar rectas paralelas a las dadas que pasan por el punto A. (Paralelogramo: cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos y paralelos).

Para encontrar otro de los vértices, escribimos la ecuación de la recta r_3 , paralela a la recta r_1 , que pasa por el punto A.

$r_3 \equiv y = 3x - 11$, para hallar las coordenadas del segundo vértice faltante, resolvemos el sistema que determinan las rectas r_3 y r_2 :

$$\begin{cases} -3x + y = -11 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad C\left(\frac{51}{11}\,;\,\frac{32}{11}\right)$$

Para determinar el tercer vértice faltante, buscamos la ecuación de la recta r_4 , paralela a la recta r_2 , que pasa por el punto A .

$r_4 \equiv y = \frac{1}{4}\,x + \frac{11}{4}$, para hallar las coordenadas del tercer vértice, resolvemos el sistema que determinan las rectas r_4 y r_1 :

$$\begin{cases} -x + 4y = 11 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad D\left(\frac{15}{11}\,;\,\frac{34}{11}\right)$$

Nota: Sería conveniente representar las cuatro rectas y ubicar los cuatro vértices del paralelogramo.

MISCELÁNEA M4

En R^2. En una circunferencia de diámetro 10 cm. y centro en el origen de coordenadas O, se inscribe un triángulo equilátero ABC como indica en forma esquemática la figura M4. Hallar, justificando cada respuesta con un planteo y/o cálculo adecuado:

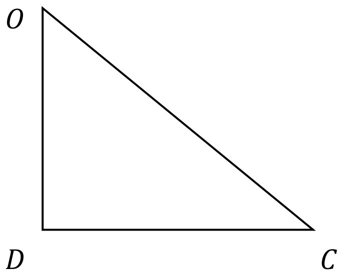
a) La distancia entre O y el lado AC.

<u>Respuesta</u>:

Para determinar la distancia, conviene determinar la ecuación de la recta determinada por los puntos A y C.

Por el dato (diámetro: 10 cm,), las coordenadas del punto $A\ (0\ ; 5)$.

Para determinar las coordenadas del punto C, consideramos el siguiente esquema:



$\overline{OC} = 5$ y $\overline{OD} = \frac{5}{2}$ y utilizando el Teorema de Pitágoras, $\overline{DC} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, con lo cual las coordenadas del punto $C\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\ ;\ -\frac{5}{2}\right)$

Luego una forma de encontrar la ecuación de la recta determinada por los puntos: A y C, la podemos determinar como:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ \frac{5}{2}\sqrt{3} & -\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{15}{2}\,x + \frac{5}{2}\sqrt{3}\ y - \frac{25}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$r:\ 3\,x + \sqrt{3}\ y - 5\sqrt{3} = 0$$

Pasamos la ecuación de la recta a la forma normal o Hessiana. Para ello debemos obtener las componentes de un vector normal y su módulo.

$$\overrightarrow{n_r} = \left(3\ ;\ \sqrt{3}\right) \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{n_r}| = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

La ecuación normal de la recta resulta: $r:\ \frac{3}{2\sqrt{3}}\ x + \frac{1}{2}\ y - \frac{5}{2} = 0$

Entonces: $d\,(O\,;r) = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$.