U.T.N. – F.R.Haedo

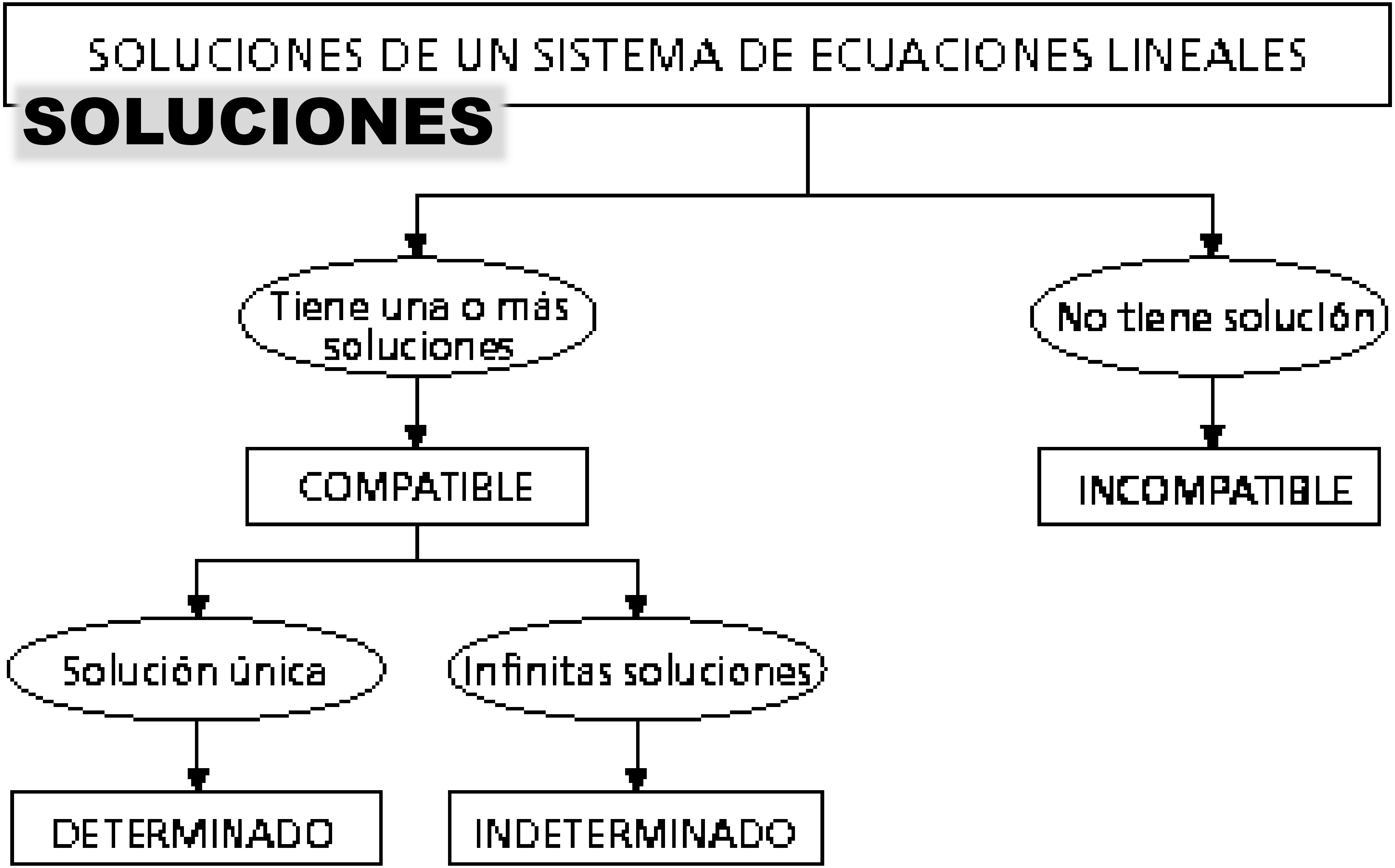
Álgebra y Geometría Analítica

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Silvina De Ceglia

https://www.youtube.com/channel/UCr5_UTRL2THw1JrgqYXJN-Q

SOLUCIONES



Compatible o Consistente	Determinado	Solución única.	S.C.D.	$r(A')=r(A)=n$
	Indeterminado	Infinitas soluciones	S.C.I.	$r(A')=r(A)<n$
Incompatible o Inconsistente		Sin solución.	S.I.	$r(A')=r(A)+1$

RANGO

Compatible o Consistente	Determinado	Solución única.	S.C.D.	$r(A')=r(A)=n$
	Indeterminado	Infinitas soluciones	S.C.I.	$r(A')=r(A)<n$
Incompatible o Inconsistente		Sin solución.	S.I.	$r(A')=r(A)+1$

CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES

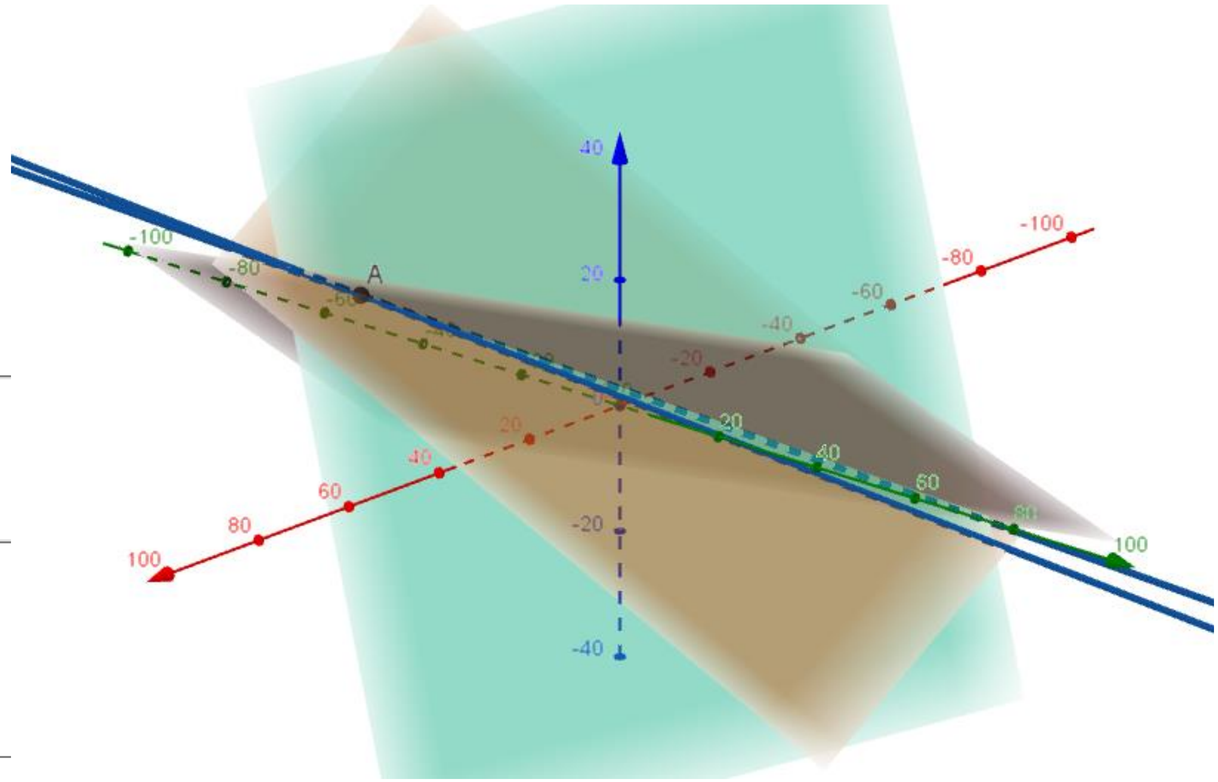
- COMPATIBLES (TIENE SOLUCIÓN)
  $\boxed{r(A')=r(A)}$
  - DETERMINADAS (ÚNICA)
    $\boxed{r(A')=r(A)=n}$
  - INDETERMINADAS (INFINITAS
    $\boxed{r(A')=r(A)<n}$
- INCOMPATIBLES (NO TIENE SOLUCIÓN)
  $\boxed{r(A')\neq r(A)}$

EJERCICIO 1

GeoGebra

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y + z = 14 \\ x - 2y - 3z = -12 \\ 3x + y - 5z = -11 \end{cases}$$

1	Ec3 := x - 2y - 3z = -12 → **Ec3 :** $x - 2y - 3z = -12$
2	Ec2 := 3x + y - 5z = -11 → **Ec2 :** $3x + y - 5z = -11$
3	Ec1 := 0.5x + 3y + z = 14 → **Ec1 :** $\frac{1}{2}x + 3y + z = 14$
4	{Ec3, Ec2, Ec1} Resuelve: $\left\{\left\{x = \frac{134}{3}, y = \frac{-35}{3}, z = \frac{80}{3}\right\}\right\}$
5	{Ec3, Ec2, Ec1} ResuelveN: $\{x = 44.67, y = -11.67, z = 26.67\}$



- Ec3: x - 2y - 3z = -12
- Ec2: 3x + y - 5z = -11
- Ec1: 0.5x + 3y + z = 14
- f: X = (-7.65, 7.02, -3.23) + λ (-7, 2.5, -4)
- g: X = (-9.22, 4.91, -2.35) + λ (-13, 4, -7)
- A = (44.67, -11.67, 26.67)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

EJERCICIO 2

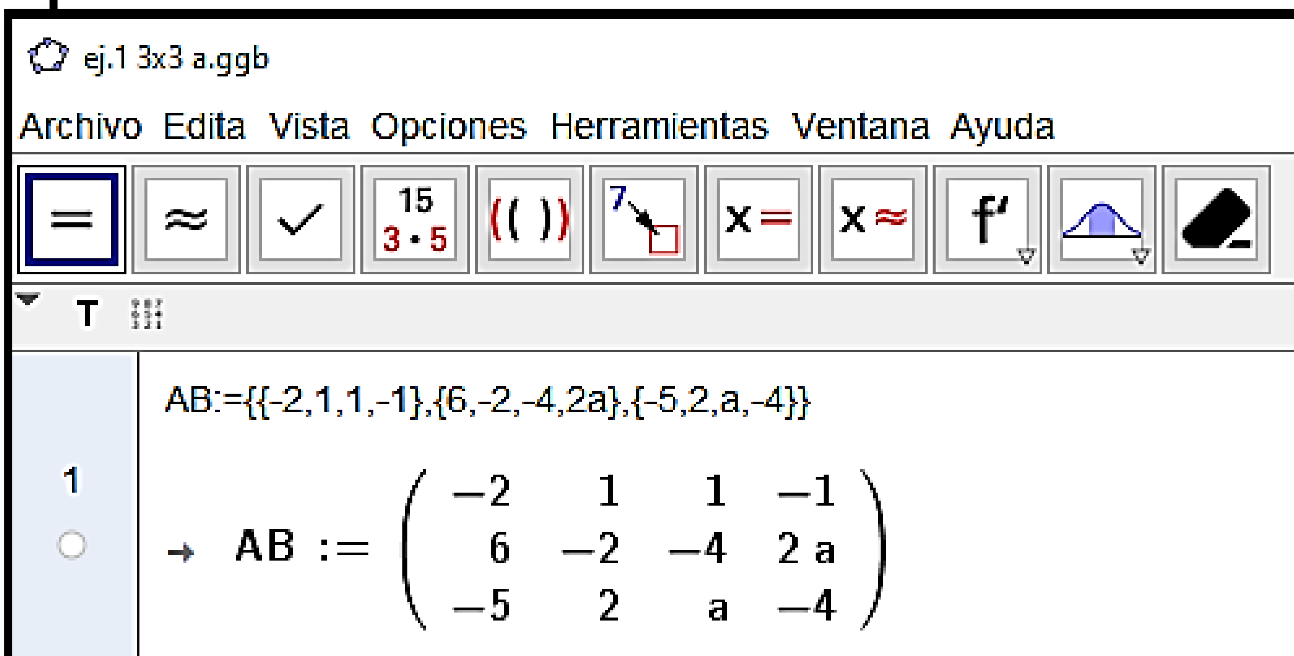
$$\begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ 6x - 2y - 4z = 2a \\ -5x + 2y + az = -4 \end{cases}$$

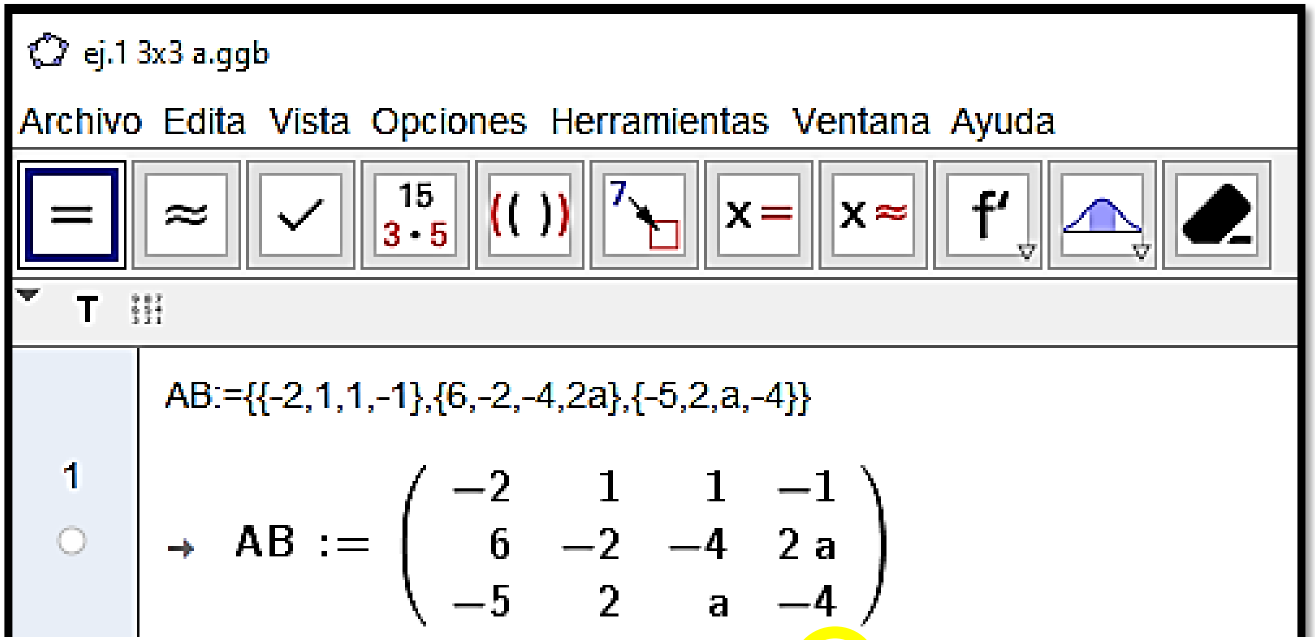
¿Qué valores de 'a' conducen a cada una de las siguientes posibilidades?

1. El sistema es incompatible

2. El sistema es compatible indeterminado

3. El sistema es compatible determinado





$$\rightarrow AB := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 & 2\,a \\ -5 & 2 & a & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 & 2\,a \\ -5 & 2 & a & -4 \end{array}\right) \rightarrow f1/(-2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 6 & -2 & -4 & 2\,a \\ -5 & 2 & a & -4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -3+2\,a \\ 0 & -1/2 & a+(-5/2) & -3/2 \end{array}\right) \rightarrow$$

In[17]:= 2 - ((-5) * (-1 / 2))

Out[17]= $-\frac{1}{2}$

In[18]:= a - ((-5) * (-1 / 2))

Out[18]= $-\frac{5}{2} + a$

In[19]:= -4 - ((-5) * (1 / 2))

Out[19]= $-\frac{3}{2}$

In[3]:= -2 - 6 * (-1 / 2)

Out[3]= 1

In[5]:= -4 - 6 * (-1 / 2)

Out[5]= -1

In[8]:= 2 a - 6 * (1 / 2)

Out[8]= -3 + 2 a

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -3+2a \\ 0 & -1/2 & a+(-5/2) & -3/2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -3+2a \\ 0 & -1/2 & a+(-5/2) & -3/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{-1} & \boxed{-1+a} \\ 0 & 1 & -1 & -3+2a \\ 0 & 0 & \boxed{-3+a} & \boxed{-3+a} \end{array}\right)$$

```
In[•]:= (-1/2)*1-((-1)*(-1/2))

-1

Simplify[(1/2)*1-((-3+2a)*(-1/2))]
simplifica

Out[•]= -1+a
```


```
In[•]:= Simplify[((-3/2)*1)-((-3+2a)*(-1/2))]
simplifica

Out[•]= -3+a

In[5]:= ((a-(5/2))*1)-((-1)*(-1/2))

Out[5]= -3+a
```

AB:={{-2,1,1,-1},{6,-2,-4,2a},{-5,2,a,-4}}

$$\rightarrow AB := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 & 2a \\ -5 & 2 & a & -4 \end{pmatrix}$$

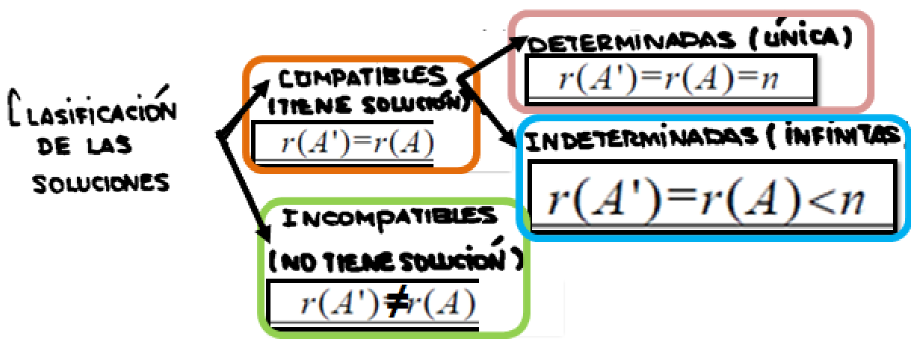
EscalonadaReducida(AB)

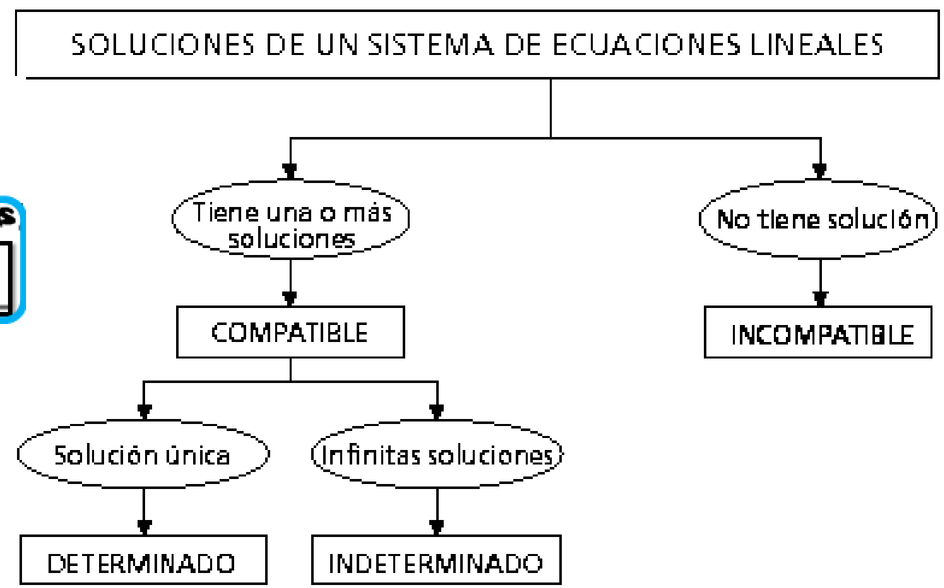
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 2a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1+a \\ 0 & 1 & -1 & -3+2a \\ 0 & 0 & -3+a & -3+a \end{array}\right)$$

1 - Ninguno de los valores de 'a' da como resultado un sistema de ecuaciones lineales incompatible.

2 - Cuando a=3, el rango es igual a 2 y el sistema es compatible indeterminado (el rango es menor que el número de incógnitas)





EJERCICIO 3

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ kx+(k-1)y+z=k \\ x+y+z=k+1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{array}\right)$$

¿Qué valores de 'a' conducen a cada una de las siguientes posibilidades?

1. El sistema es incompatible

2. El sistema es compatible indeterminado

3. El sistema es compatible determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right)$$

F2.(-1)

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & k & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1-k} & k \end{array}\right)$$

❶ **si 1-k≠0 ►S.C.D.**

SE DEBE CUMPLIR → **k ≠ 1**

❶ **si 1-k≠0 ►S.C.D.→rango(A)=rango(A´)=n**

❷ **si 1-k=0 ►S.I. → rango(A) ≠ rango(A´)**

Valor critico → k=1

$$\begin{cases} X+k.Z=1 \\ Y+(-1+k^2).Z=0 \\ (1-k).Z=k \end{cases}$$

In[1]:= `Solve[(1 - k) z == k, z]`

resuelve

Out[1]= $\left\{\left\{z \to -\frac{k}{-1+k}\right\}\right\}$

In[6]:= $z = \frac{k}{-1+k}$;

In[4]:= `Solve[y + (-1 + k^2) z == 0]`

resuelve

Out[4]= $\{\{y \to -k - k^2\}\}$

In[8]:= `Solve[x + k z == 1, x]`

resuelve

Out[8]= $\left\{\left\{x \to \frac{-1+k-k^2}{-1+k}\right\}\right\}$

❶ **si 1-k≠0 ►S.C.D.**

SE DEBE CUMPLIR → **k ≠ 1**

$$\left\{\left\{x \to \frac{-1+k-k^2}{-1+k}\right\}\right\}$$

$$\{y \to -k-k^2\}\}$$

$$\left\{\left\{z \to -\frac{k}{-1+k}\right\}\right.$$

❷ **si 1-k=0 ►S.I. → rango(A) ≠ rango(A´)**

SE DEBE CUMPLIR → k=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right)$$

SI k=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} X+Y=1 \\ Y=0 \\ 0=1 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 4 ¿Existe un valor de r tal que $x = r$, $y = 2$, $z = 1$ sea una solución del siguiente sistema lineal? De ser así, determínelo

S=(r,2,1) **r=??**

$$\begin{cases} 3x \qquad\quad - 2z = \ \ 4 \\ \ \ x - 4y + \ \ z = -5 \\ -2x + 3y + 2z = \ \ 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3.r \qquad\qquad -2.1 = 4 \\ \ \ r - 4.2 \ + \ \ 1 = -5 \\ -2.r + 3.2 + 2.1 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3.r = 4+2 \rightarrow r=6/3 \rightarrow {\color{green} r=2} \\ \ \ r = -5-1+8 \rightarrow {\color{green} r=2} \\ -2.r = 9-6-2 \rightarrow r=1 \rightarrow {\color{red} r=1/(-2)} \end{cases}$$

No existe parámetro *r* perteneciente a Los Reales que verifique que la terna (r,2,1) sea solución del sistema de ecuaciones

Cálculo Simbólico (CAS)

Resolviendo el sistema de ecuaciones vemos que la solución es una terna diferente a la propuesta en el enunciado del ejercicio por lo tanto los valores de y=2 y z=1 no son solución del sistema .

1. 3x-2z=4

   $\rightarrow\ 3x - 2z = 4$

2. x-4y+z=-5

   $\rightarrow\ x - 4y + z = -5$

3. -2x+3y+2z=9

   $\rightarrow\ -2x + 3y + 2z = 9$

4. {$1, $2, $3}

   Resuelve: $\left\{\left\{x = \frac{86}{23}, y = \frac{71}{23}, z = \frac{83}{23}\right\}\right\}$

5. {$1, $2, $3}

   ResuelveN: $\{x = 3.74, y = 3.09, z = 3.61\}$

EJERCICIO 5

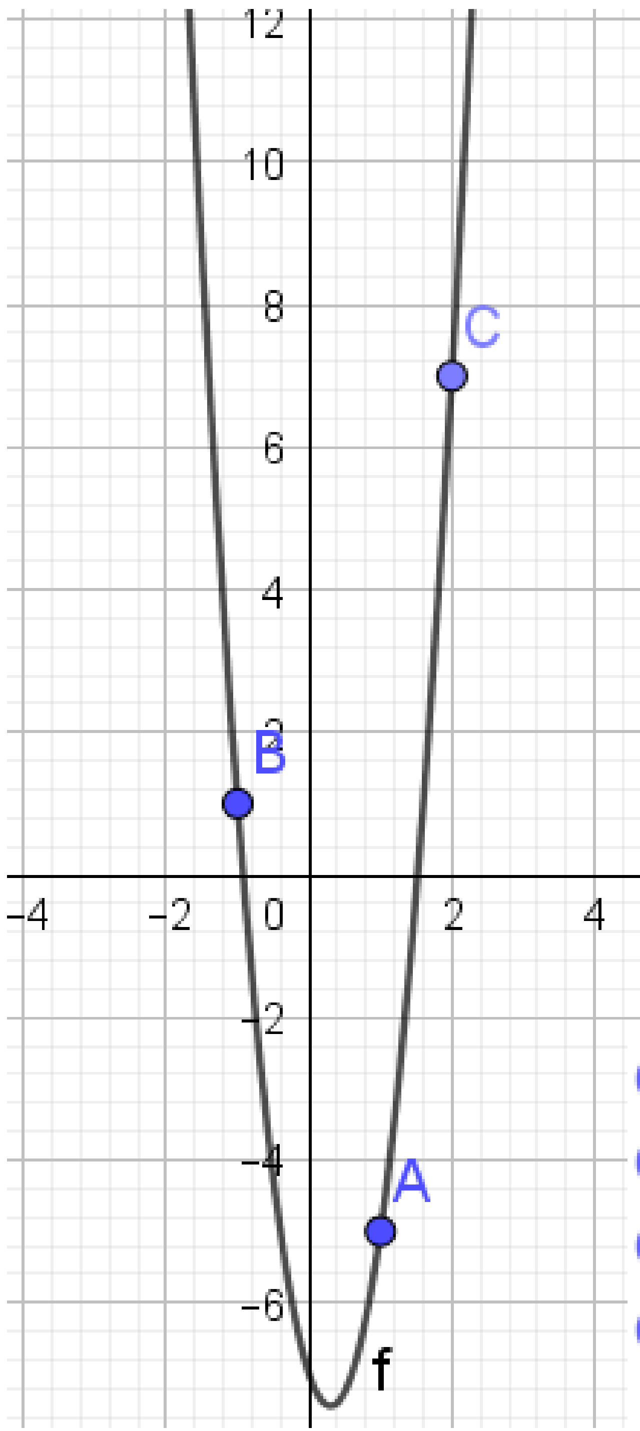
Suponga que los tres puntos $(1,-5)$, $(-1, 1)$ y $(2, 7)$ están en la parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$.

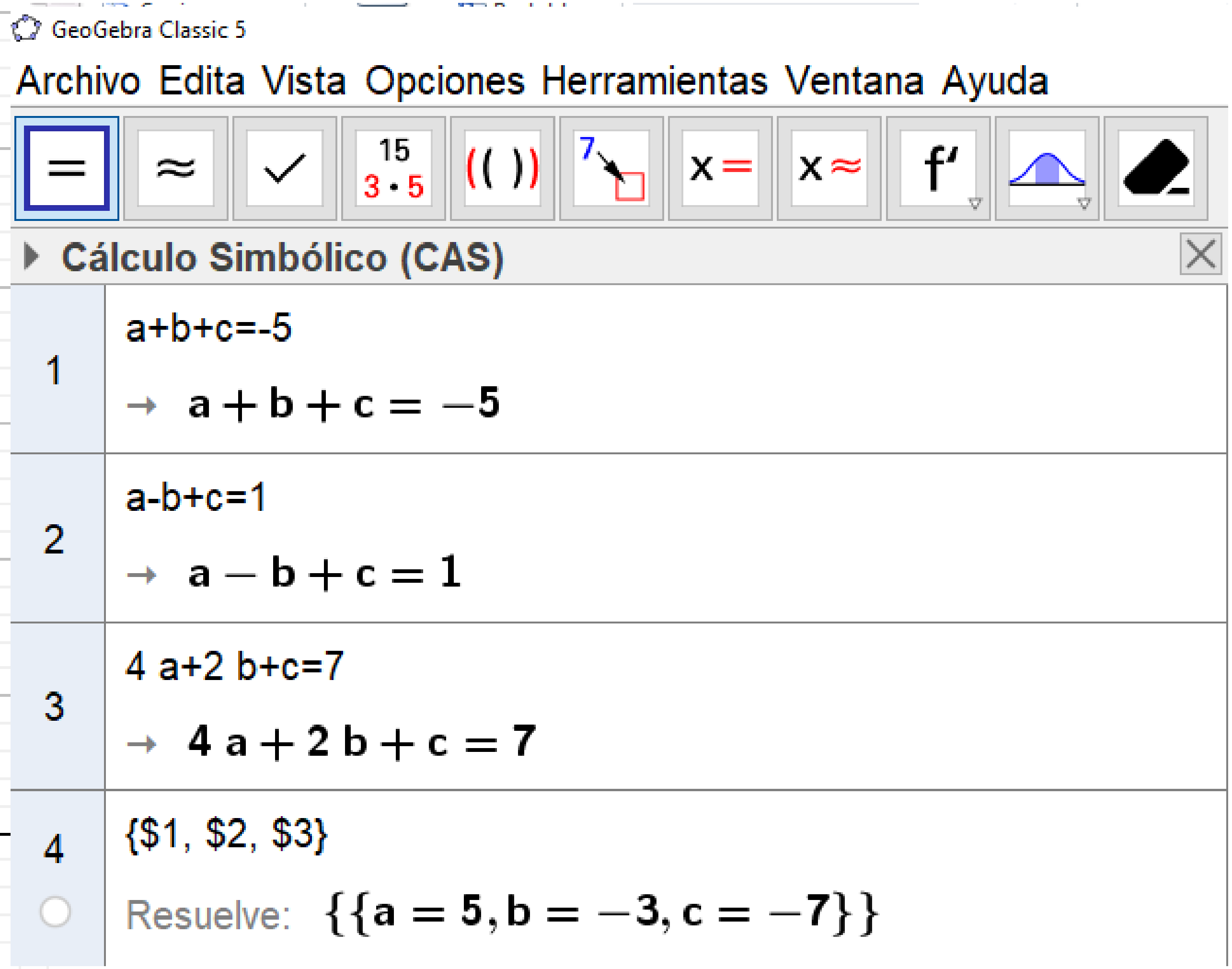
(a) Determine un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas que deba resolverse para determinar a, b y c.

(b) Resuelva el sistema lineal que obtuvo en la parte (a) para a, b y c.

$$\begin{cases} a.1^2+b.1+c=-5 \\ a.(-1)^2+b.(-1)+c=1 \\ a.2^2+b.2+c=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=-5 \\ a-b+c=1 \\ 4.a+2.b+c=7 \end{cases}$$

1	a+b+c=-5 → $a+b+c=-5$
2	a-b+c=1 → $a-b+c=1$
3	4 a+2 b+c=7 → $4a+2b+c=7$
4	{$1, $2, $3} Resuelve: $\{\{a=5, b=-3, c=-7\}\}$
5	B:={{1,1,1,-5},{1,-1,1,1},{4,2,1,7}} → $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
6	EscalonadaReducida(B) → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$





$f: y = 5x^2 - 3x - 7$

$A = (1, -5)$

$B = (-1, 1)$

$C = (2, 7)$

¿El sistema lineal

EJERCICIO 6

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

siempre tiene solución para cualesquiera valores de a, b, c y d?

SIST. HOMOGENEO → 2X2

Sabemos que un sistema homogéneo será siempre compatible

S.C.D.

SOLUCION TRIVIAL

→ S=(0,0)

si el rango (A)=n°inc.=2 → S.C.D. esto quiere decir que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

S.C.I.

∞ SOLUCIONES

► sí a, b, c, d Son todos cero →S.C.I., G.L.=2, ► o alguno de ellos bien podría ser cero o las ecuaciones podrían tener coeficientes proporcionarles →S.C.I., rango (A)<2, G.L.=1, Obteniendo así un determinante de los coeficientes igual a cero.

EJERCICIO 7 determinar, si existen los valores de m ∈ R, tales que el sistema sea : a) compatible determinado, b)Incompatible y c) Compatible indeterminado

GeoGebra

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+mz=-1 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$$

Efectuamos transformaciones elementales por Gauss-Jordan

si m = 1	$r_{(A)} < r_{(A')}$	$\longrightarrow$	**Sistema incompatible**

otro valor de m $\quad r_{(A)} = r_{(A')} = n^\circ\ de\ \ incógnitas$

Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 1+1+1=1 \\ 1+1+m=-1 \\ m+1+1=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & -1 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-m & -m \end{array}\right)$$

$F_2/(m-1)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & -1 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-m & -m \end{array}\right) F_2/(m-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1/(m-1) & -1/(m-1) \\ 0 & 1 & 1-m & -m \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 1 & 1-m & -m \end{array}\right)$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-m & -m \\ 0 & 0 & 1 & -1/(m-1) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-m & -m \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1/(m-1)} \end{array}\right)$$

❶ si m-1≠0 ►S.C.D.→rango(A)=rango(A´)=n

❷ si m-1=0 S.I. NO TIENE SOLUCION

Valor critico → m=1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-m & -m \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1/(m-1)} \end{array}\right)$$

❶ si m-1≠0 ►S.C.D.
→rango(A)=rango(A´)=n
❷ si m-1=0 S.I.
NO TIENE SOLUCION
Valor critico → m=1

A:={{1,1,1,1},{1,1,m,-1},{m,1,1,0}}

$$\rightarrow \; \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & -1 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EscalonadaReducida(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{m+2}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{m-1} \end{pmatrix}$$

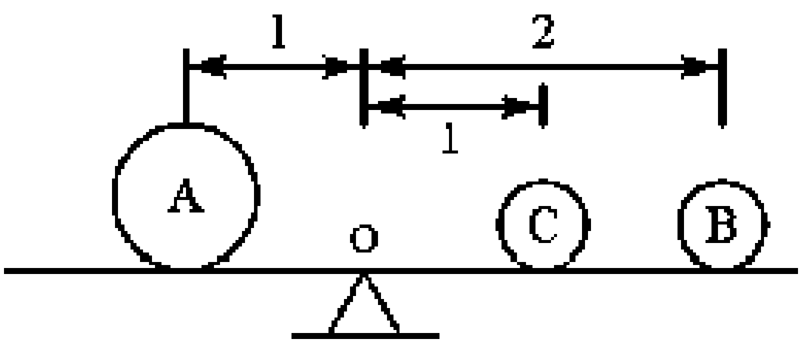
si m = 1 $\quad r_{(A)} < r_{(A')} \longrightarrow$ **Sistema incompatible**

otro valor de m $\quad r_{(A)} = r_{(A')} = n^{\circ}$ *de incógnitas*

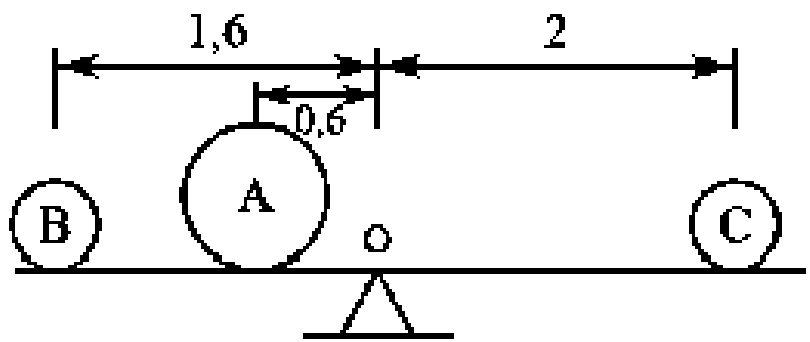
Sistema compatible determinado

Palanca en equilibrio **EJERCICIO 8**

6-Supongamos que se tienen tres objetos A, B y C, uno con peso conocido (por ejemplo C). Se desea conocer el peso de los otros dos objetos. Como dato, se sabe que se ha logrado el equilibrio en las dos configuraciones siguientes (distancias en metros):



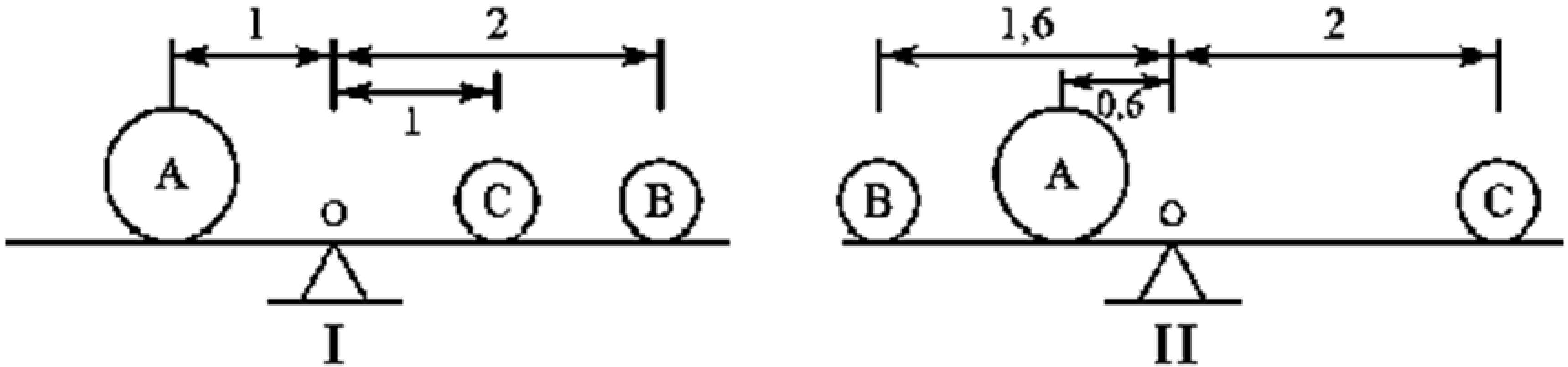
I



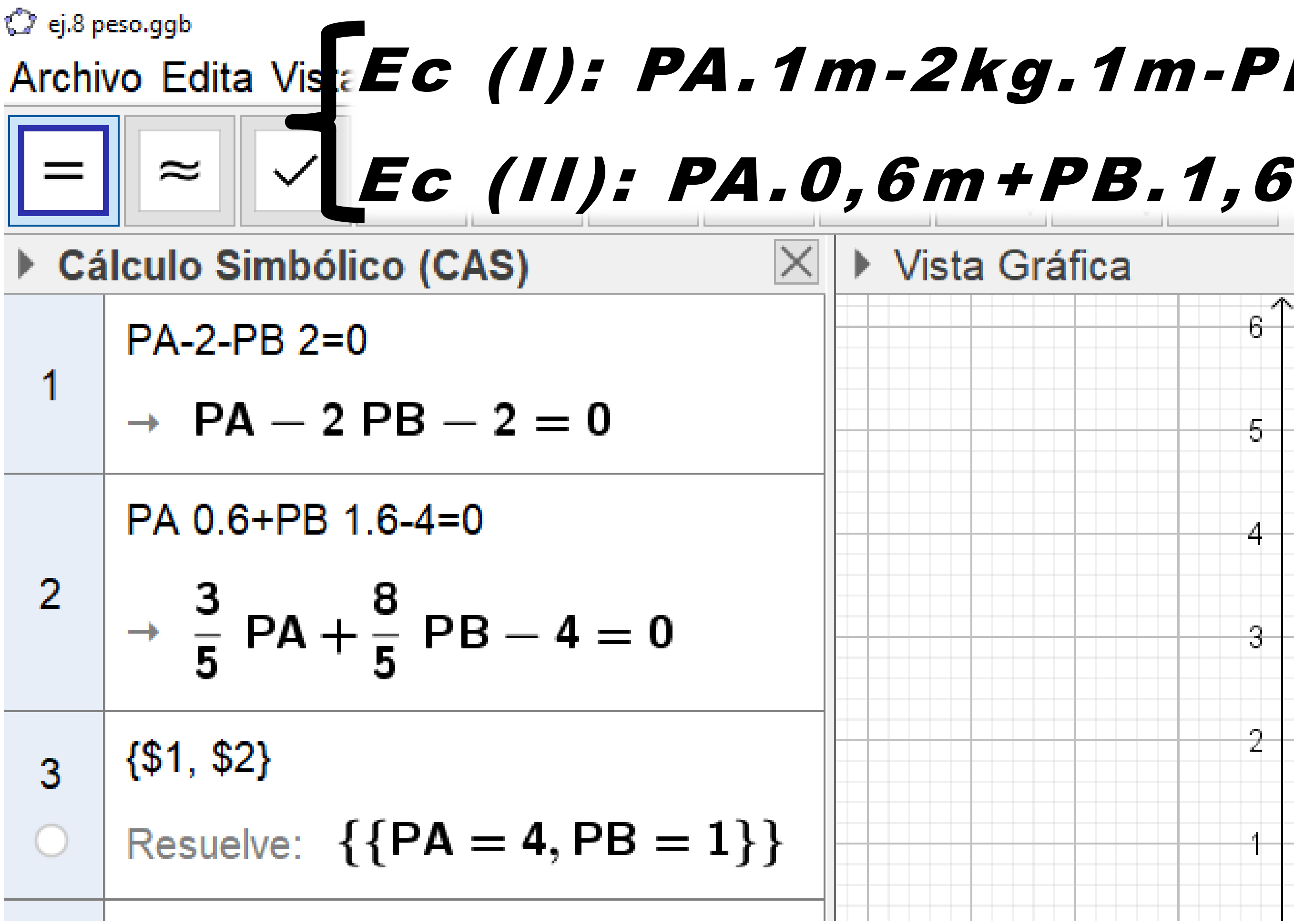
II

Considerando que en un sistema en equilibrio la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas respecto a un punto cualquiera, por ejemplo el punto de apoyo O, debe ser 0, obtenemos las ecuaciones: donde PA, PB, PC denotan los pesos de los objetos. Si PC es conocido, este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: PA y PB. Si PC = 2kg:

a.-expresar PA y PB también en kg,
b.- b.-Expresar con sus palabras porque se necesitan dos sistemas como los que se presentan (I y II) para hallar las incógnitas que se piden en a.- .
c.-cree usted que agregar sistemas similares a los que se presentan (I y II) agregaría más información
d.- Se podrían hallar las incógnitas pedidas en a.- utilizando solo un sistema que se presentan (I o II)?



$$\begin{cases} \text{Ec (I): } PA.1m-2kg.1m-PB.2m=0 \\ \text{Ec (II): } PA.0{,}6m+PB.1{,}6m-2kg.2=0 \end{cases}$$



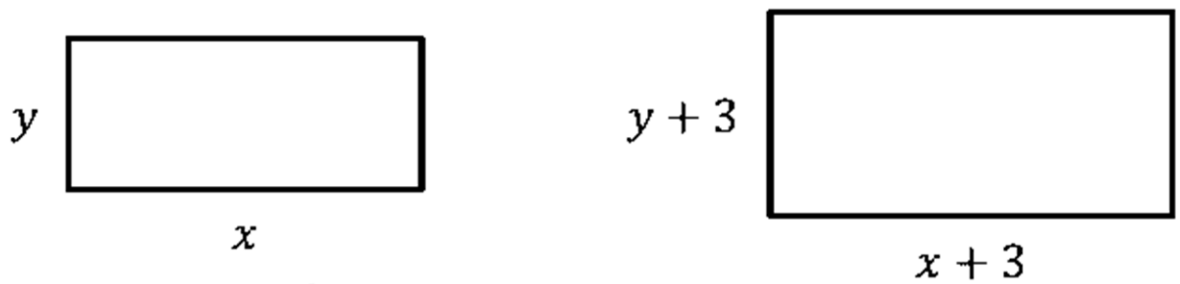
EJERCICIO 9

PROBLEMAS DE SISTEMAS LINEALES

En un rectángulo, la base es 4 cm más larga que la altura. Si alargáramos 3 cm a cada lado, entonces el perímetro sería de 32 cm. Halla las dimensiones del rectángulo.

Llamaremos x a la longitud de la base, e y a la longitud de la altura.

Como en todos los problemas que tengan relación con alguna figura geométrica, haremos un dibujo que nos guíe en el planteamiento:



$$\begin{cases} x = y + 4 \\ 2(x+3) + 2(y+3) = 32 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y tendremos la solución $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

La base mide 7 cm y la altura mide 3 cm.

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ 2(x+3) + 2(y+3) = 32 \end{cases}$$