PROCESOS DE MARKOV

INVESTIGACION OPERATIVA

Ing. Romina Miccige

Ing. Matías Patterlini

Tales procesos se llaman procesos estocásticos ya que presentan modelos de probabilidad que evolucionan en el tiempo de una manera probabilística

Por tanto, nos interesa la probabilidad de que el sistema esté en un estado particular en un periodo de tiempo determinado.

El análisis de Markov es una forma de analizar el movimiento actual de alguna variable a fin de pronosticar el movimiento futuro de la misma. En conclusión formulamos la hipótesis de que "la probabilidad de varios resultados de un experimento corriente es el resultado de uno anterior". La sucesión, en este caso se llama Proceso de Markov

USOS:

- Usos: Estudio de Mercados
- Proyecciones Políticas
- Bio Ingeniería
- Para describir la probabilidad de que una máquina que está funcionando en un periodo continúe haciéndolo en el siguiente

- Para describir la probabilidad de que un cliente que compra la marca A en un periodo compre la marca B en el siguiente

Definición

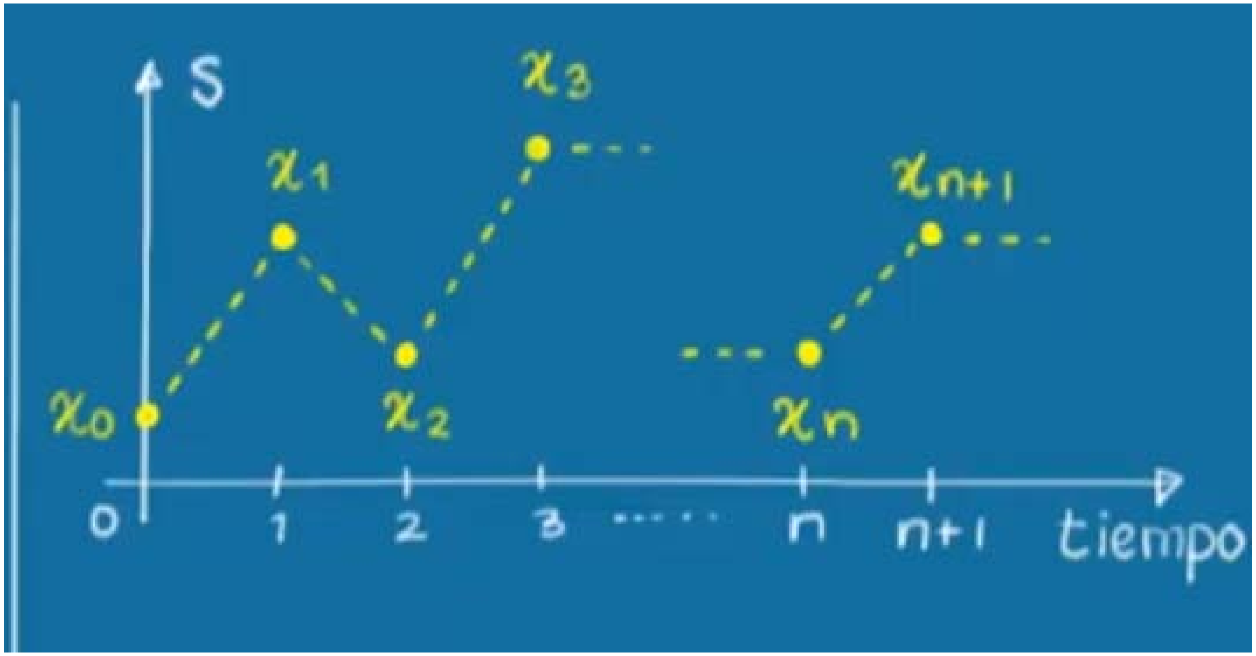
Una cadena de Markov es una sucesión de ensayos similares u observaciones en la cual cada ensayo tiene el mismo número finito de resultados posibles y en donde la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende sólo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo.

Propiedad de Markov: Dada una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots,$ tales que el valor de X_n es el estado del proceso en el tiempo n. Si la distribución de probabilidad condicional de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por sí sola, entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots X_2 = x_2, X_1 = x_1) = \\ P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n) \end{array}}$$

Donde x_i es el estado del proceso en el instante i.

Esta identidad es la denominada ***propiedad de Markov:*** El estado en $t + 1$ sólo depende del estado en t y no de la evolución anterior del sistema



S
x_0
x_1
x_2
x_3
x_n
x_{n+1}
0
1
2
3
n
n+1
tiempo

Las cadenas de Markov tienen la propiedad particular de que las probabilidades que describen la forma en que el proceso evolucionará en el futuro dependen sólo del estado actual en que se encuentra el proceso y, por lo tanto, son independientes de los eventos que ocurrieron en el pasado. Muchos procesos se ajustan a esta descripción, por lo que las cadenas de Markov constituyen una clase de modelo probabilístico de gran importancia.

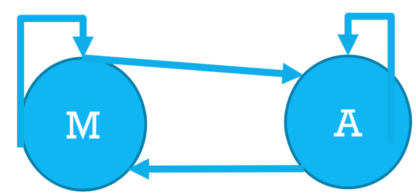
EJEMPLO

Suponga que nos interesa analizar la cuota del mercado y la lealtad de los clientes para Mister M y Astro A, los únicos supermercados en una pequeña ciudad. Nos enfocamos en la secuencia de los viajes de compras de un cliente y asumimos que éste hace un viaje de compras cada semana a Mister M y Astro A

Utilizando la terminología de los procesos de Markov, nos referimos a los periodos semanales o viajes de compras como ensayos del proceso. Por tanto, en cada ensayo el cliente comprará en M o en A. La tienda particular seleccionada en una semana dada se conoce como estado del sistema en ese periodo. Como el cliente tiene dos alternativas de compra en cada ensayo, decimos que el sistema tiene dos estados. Con un número finito de estados, los identificamos como sigue:

Estado 1. El cliente compra en M.

Estado 2. El cliente compra en A.



Si decimos que el sistema está en el estado 1 en el ensayo 3, simplemente decimos que el cliente compra en M durante el tercer periodo de compra semanal.

A medida que llevamos el proceso de los viajes de compra al futuro, podemos decir con certeza dónde comprará el cliente durante una semana o ensayo dado. De hecho, nos damos cuenta que durante cualquier semana dada, el cliente puede ser o un cliente de M o un cliente de A. Sin embargo, utilizando un modelo de proceso de Markov, podremos calcular la probabilidad de que un cliente compre en cada tienda durante cualquier periodo. Por ejemplo, podemos determinar una probabilidad de 0.6 de que el cliente comprará en M durante una semana particular y una probabilidad de 0.4 de que lo hará en A.

Para determinar las probabilidades de que ocurran los diversos estados en ensayos sucesivos del proceso de Markov, necesitamos información sobre la probabilidad de que un cliente permanezca con la misma tienda o se cambie a la tienda competidora conforme el proceso avanza de un ensayo a otro o de una semana a otra.

Suponga que, como parte del estudio de investigación de mercados, reunimos datos de 100 compradores a lo largo de un periodo de 10 semanas. Suponga además que estos datos muestran el patrón de los viajes de compra semanales de cada cliente en función de la secuencia de las visitas a M y A**. Para desarrollar un modelo de proceso de Markov para la secuencia de viajes de compra semanales, tenemos que expresar la probabilidad de seleccionar cada tienda (estado) en un periodo dado sólo en función de la tienda (estado) que fue seleccionada durante el periodo previo**. Al revisar los datos, suponga que encontramos que de todos los clientes que compraron en M en una semana dada, 90% compró en M la siguiente semana, mientras que 10% se cambió a A. Suponga que datos similares de los clientes que compraron en A en una semana dada muestran que 80% compró en A la siguiente semana, mientras que 20% se cambió a M.

Como estas probabilidades indican que un cliente se traslada o realiza una transición de un estado en un periodo dado a cada estado en el siguiente periodo, estas probabilidades se llaman probabilidades de transición.

	SIGUIENTE PERIODO DE COMPRA SEMANAL	
PERIODO DE COMPRAS SEMANAL ACTUAL	M	A
M	0,9	0,1
A	0,2	0,8

Una importante propiedad de la tabla de probabilidades de transición es que la suma de las probabilidades en cada fila es 1

Es cuadrada

Los elementos que forman la martiz tienen que ser mayores o iguales a cero y menor y menores a 1

Utilizaremos el símbolo P_{ij} para representar las probabilidades de transición y el símbolo P para representar la matriz de probabilidades de transición; es decir,

P_{ij} probabilidad de realizar una transición del estado i en un periodo dado al estado J en siguiente periodo.

PERIODO DE COMPRAS SEMANAL ACTUAL

M

A

SIGUIENTE PERIODO DE COMPRA SEMANAL

M A

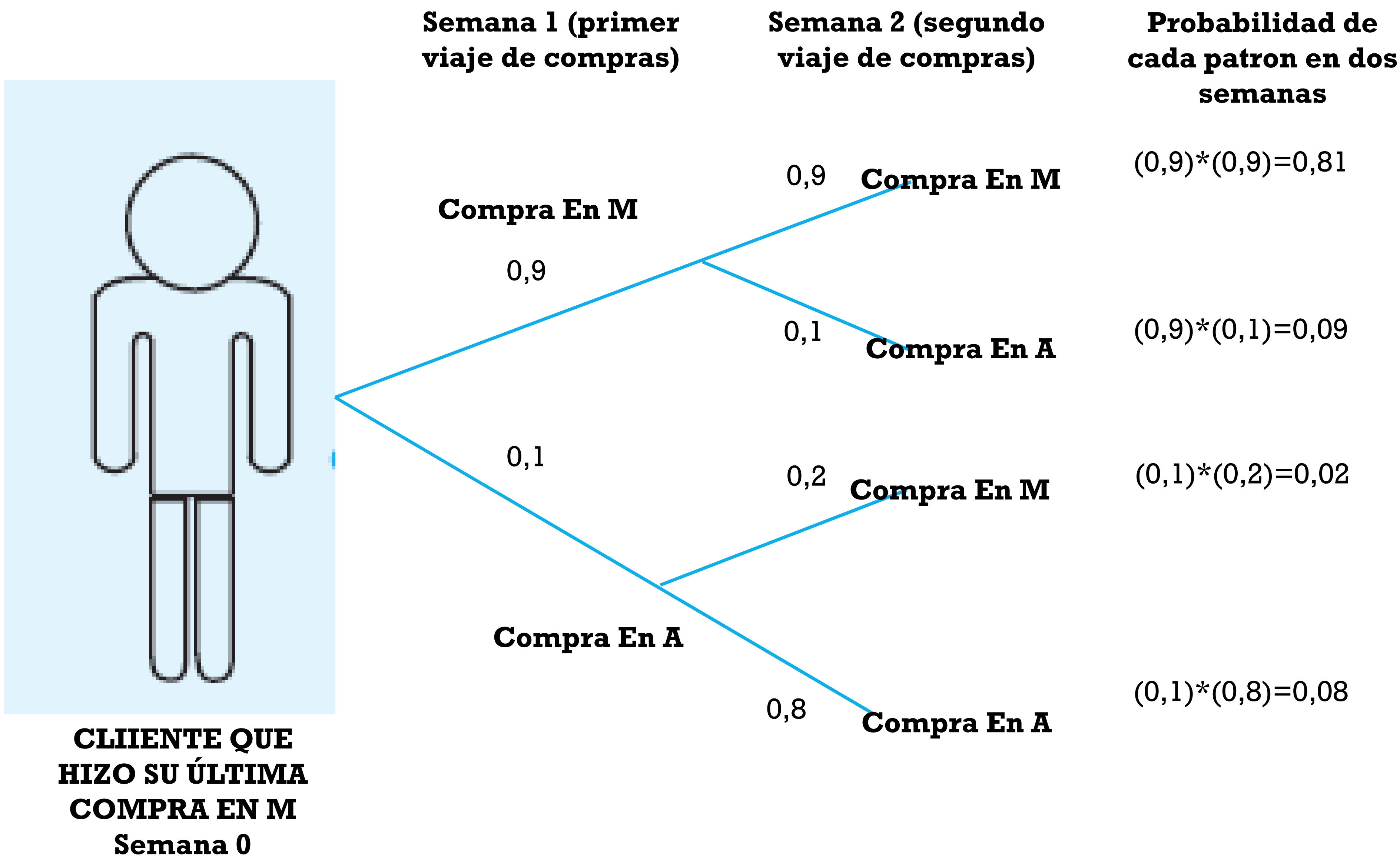
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se denomina ***matriz de transición***. Los elementos de la matriz de transición representan las probabilidades de que en el próximo ensayo el estado del sistema del partido indicado a la izquierda de la matriz cambie al estado del partido indicado arriba de la matriz.

Definición: Consideremos un proceso de Markov en que el sistema posee n estados posibles, dados por los números 1, 2, 3, …., n. Denotemos p_{ij} a la probabilidad de que el sistema pase al estado j después de cualquier ensayo en donde su estado era i antes del ensayo. Los números p_{ij} se denominan probabilidades de transición y la matriz nxn $P = (p_{ij})$ se conoce como ***matriz de transición*** del sistema

Observaciones:

1) La suma $p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{in} = 1$. Esta suma representa la probabilidad de que el sistema pase a uno de los estados 1, 2, …., n dado que empieza en el estado i. Ya que el sistema ha de estar en uno de estos n estados, la suma de probabilidades debe ser igual a 1. Esto significa que los elementos en cualquier renglón de la matriz de transición deben sumar 1.
2) Cada elemento $p_{ij} \geq 0$


Semana 1 (primer viaje de compras)
Semana 2 (segundo viaje de compras)
Probabilidad de cada patron en dos semanas
Compra En M
0,9
0,9
Compra En M
(0,9)*(0,9)=0,81
0,1
Compra En A
(0,9)*(0,1)=0,09
0,1
0,2
Compra En M
(0,1)*(0,2)=0,02
Compra En A
0,8
Compra En A
(0,1)*(0,8)=0,08
CLIIENTE QUE HIZO SU ÚLTIMA COMPRA EN M
Semana 0

Podemos extender este argumento a cualquier número de días en el futuro en que queremos hacer la predicción, vemos que $PxP = P^2$ corresponde a las probabilidades de transición en dos pasos, entonces P^3, P^4, ..., P^m corresponden a las probabilidades de transición en 3, 4, …., m pasos respectivamente. La matriz $\boldsymbol{P^m}$ se conoce como la ***matriz de transición en m pasos de la cadena de Markov.***

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$PXP = P^2 \quad \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{M} & \mathbf{A} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \mathbf{A} \end{array} & \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix} \end{array}$$

Teorema 2: Una matriz de transición P se dice que es ***regular*** si para algún entero positivo k, la matriz P^k no tiene elementos iguales a cero. Si P es una matriz de transición regular, entonces sin importar la matriz de estado inicial, las matrices de estado sucesivas se aproximan a alguna matriz de estado fija B en donde B.P = B. La matriz B se denomina ***matriz estacionaria*** del sistema

B = (X Y) matriz estacionaria $\quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

Por definición de probabilidades (X + Y) = 1 y además B.P = B o sea :

$$(X \quad Y) \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = (X \quad Y)$$

0,9X + 0,2 Y = X
0,1X + 0,8Y = Y
X + Y = 1

X = 0,66
Y= 0,33

Si, $a_1(1)$ denota la probabilidad de que el sistema esté en el estado 1 en el periodo 1, mientras que $a_2(1)$ denota la probabilidad de que el sistema esté en estado 2 en el periodo 1. Como $a_i(n)$ es la probabilidad de que el sistema esté en el estado i en el periodo n, esta probabilidad se conoce como probabilidad de estado.

Los términos $a_1(0)$ y $a_2(0)$ denotará la probabilidad de que el sistema esté en estado 1 o en el estado 2 en algún periodo inicial o de inicio. La semana 0 representa el periodo más reciente, cuando estamos iniciando el análisis de un proceso de Markov. Si hacemos $a_1(0) = 1$ y $a_2(0) = 0$, decimos que como condición inicial el cliente compró la última semana en M, por otra parte, si hacemos $a_1(0) = 0$ y $a_2(0) = 1$, empezaríamos el sistema con un cliente que compró la última semana en A

$$[a_1(0) \quad a_2(0)] = [\, 1 \quad 0 \,]$$

$$A(n) = [a\ 1(n)\ a\ 2(n)]$$

Es un vector que representa las probabilidades de estado en un periodo determinado.

Con esta notación, podemos determinar las probabilidades de estado en el periodo n + 1 simplemente con multiplicar las probabilidades de estado conocidas en periodo n por la matriz de probabilidades de transición.

Utilizando el vector de las probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, la multiplicación1 puede expresarse como sigue:

A(periodo siguiente) = A(periodo actual)P(matriz de transición)

Si P denota la matriz de transición de una cadena de Markov y An es la matriz de estado después de n periodos, entonces la matriz de estado $A_{(n+1)}$ después del ensayo siguiente está dada por:

$$A_{n+1} = A_n P$$

Al iniciar con el sistema en el estado 1 en el periodo 0, tenemos $A(0) = [1\ 0]$.
Podemos calcular las probabilidades de estado en el periodo 1 como sigue:

$$A_1 = A_0 P \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$= [0.9 \quad 0.1]$$

Las probabilidades de estado $a_1(1) = 0.9$ y $a_2(1) = 0.1$ son las probabilidades de que un cliente que compró en M durante la semana 0 lo haga en M o en A durante la semana 1.

PROBABILIDADES DE ESTADO DURANTE PERIODOS FUTUROS COMENZANDO CON UN CLIENTE QUE COMPRA EN M

Probabilidad de estado	Periodo (n)										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$a_{1(n)}$	1	0.9	0.83	0.781	0.747	0.723	0.706	0.694	0.686	0.680	0.676
$a_{2(n)}$	0	0.1	0.17	0.219	0.253	0.277	0.294	0.306	0.314	0.320	0.324

$$A_{n+1} = A_n P$$

Al iniciar con el sistema en el estado 2 en el periodo 0, tenemos $A(0) = [0\ 1]$.
Podemos calcular las probabilidades de estado en el periodo 1 como sigue:

$$A_1 = A_0 P \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$= [0.2 \quad 0.8]$$

Las probabilidades de estado $a_1(1) = 0.2$ y $a_2(1) = 0.8$ son las probabilidades de que un cliente que compró en A durante la semana 0 lo haga en M o en A durante la semana 1.

PROBABILIDADES DE ESTADO DURANTE PERIODOS FUTUROS COMENZANDO CON UN CLIENTE QUE COMPRA EN A

Probabilidad de estado	Periodo (n)										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{1(n)}$	0	0.2	0.34	0.438	0.507	0.555	0.589	0.612	0.628	0.640	0.648
$a_{2(n)}$	1	0.8	0.66	0.562	0.493	0.445	0.411	0.388	0.372	0.360	0.352

A medida que continuamos con el proceso de Markov, vemos que la probabilidad de que el sistema esté en un estado particular después de un gran número de periodos es independiente de su estado inicial. Las probabilidades a las que nos aproximamos después de un gran número de transiciones se conocen como probabilidades de estado estacionario.

Definiciones en los Procesos de Markov de Primer Orden:

Estados: Las condiciones en las cuales se encuentra un ente ó sucesos posibles.
Ensayos: Las ocurrencias repetidas de un evento que se estudia.
Probabilidad de Transición: La probabilidad de pasar de un estado actual al siguiente en un período ó tiempo, y se denota por $\boldsymbol{p_{ij}}$ (la probabilidad de pasar del estado **i** al estado **j** en una transición ó período)