UTNHAEDO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

# Problemas Adicionales- Variable aleatoria continua

## Problema 1

Un viajante tiene tres alternativas de viaje a su trabajo: A, B y C, y sabe que los porcentajes de veces que usa estos medios son respectivamente: 50 %, 30 % y 20 %. El tiempo de viaje (en horas) de cada medio de transporte es una variable aleatoria T cuya función de densidad depende de la alternativa elegida, siendo:

$$f_A(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \leq t \leq t_{maxA} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_B(t) = \begin{cases} 2\,t & si \quad 0 \leq t \leq t_{maxB} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_C(t) = \begin{cases} 3t & si \quad 0 \leq t \leq t_{maxC} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se sabe que ha transcurrido media hora y el viajante aún no ha llegado al trabajo ¿Cuál es la probabilidad de que llegue por el medio de transporte A?

**Solución:**

Definimos en primer lugar los eventos:

A: El viajante utiliza el medio de transporte A

B: El viajante utiliza el medio de transporte B

C: El viajante utiliza el medio de transporte C

De acuerdo con los datos del problema resulta:

$$P(A) = 0{,}50 \qquad P(B) = 0.30 \qquad P(C) = 0{,}20$$

Definimos la variable aleatoria:

T: Tiempo de viaje en horas

Debemos determinar en primer lugar los extremos de las funciones de densidad de acuerdo con la alternativa de transporte elegida. Al ser una función de densidad debe verificar en cada caso:

$$\int_0^{t_{maxA}} f_A(t)\, dt = 1$$

$$\int_0^{t_{maxA}} t\, dt = 1$$

$$\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{t_{maxA}} = 1$$

$$\frac{(t_{maxA})^2}{2} = 1$$

$$(t_{maxA})^2 = 2$$

$$|t_{maxA}| = \sqrt{2}$$

Como $t_{maxA} > 0$ entonces $t_{maxA} = \sqrt{2}$ de manera que:

$$f_A(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para el medio de transporte B resulta

$$\int_0^{t_{maxB}} f_B(t)\, dt = 1$$

$$\int_0^{t_{maxB}} 2t\, dt = 1$$

$$\frac{2t^2}{2}\Big|_0^{t_{maxB}} = 1$$

$$(t_{maxB})^2 = 1$$

$$|t_{maxB}| = 1$$

Como $t_{maxB} > 0$ $entonces$ $t_{maxB} = 1$

$$f_B(t) = \begin{cases} 2\,t & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para el medio de transporte C

$$\int_0^{t_{maxC}} f_C(t)\, dt = 1$$

$$\int_0^{t_{maxC}} 3t\, dt = 1$$

$$\frac{3t^2}{2}\Big|_0^{t_{maxC}} = 1$$

$$\frac{3(t_{maxC})^2}{2} = 1$$

$$(t_{maxC})^2 = \frac{2}{3}$$

$$|t_{maxC}| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Como $t_{maxC} > 0$ $entonces$ $t_{maxC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$f_C(t) = \begin{cases} 3\,t \quad si \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ 0 \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se desea determinar:

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{P(A \cap T > 0{,}5)}{P(T > 0{,}5)}$$

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{P(A).P(T > 0{,}5/A)}{P(A \cap T > 0{,}5) + P(B \cap T > 0{,}5) + P(C \cap T > 0{,}5)}$$

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{P(A).P(T > 0{,}5/A)}{P(A).P(T > 0{,}5/A) + P(B).P(T > 0{,}5/B) + P(C).P(T > 0{,}5/C)}$$

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{0{,}50.\int_{0{,}5}^{\sqrt{2}} t\,dt}{0{,}50.\int_{0{,}5}^{\sqrt{2}} t\,dt + 0{,}30.\int_{0{,}5}^{1} 2t\ \ dt + 0{,}20.\int_{0{,}5}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} 3t\ \ dt}$$

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{0{,}50.\int_{0{,}5}^{\sqrt{2}} t\,dt}{0{,}50.\int_{0{,}5}^{\sqrt{2}} t\,dt + 0{,}30.\int_{0{,}5}^{1} 2t\ \ dt + 0{,}20.\int_{0{,}5}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} 3t\ \ dt}$$

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{0{,}50. \quad 0{,}875}{0{,}50. \quad 0{,}875 + 0{,}30. \quad 0{,}75 + 0{,}20. \quad 0{,}625}$$

$$P(A/T > 0{,}5) = \frac{0{,}4375}{0{,}7875} = 0{,}5555$$

## Problema 2

Sea $W$ una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0{,}1)$

Demostrar que $X = -\frac{1}{\lambda}.\,ln(1 - W), con\ \lambda > 0$ es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda$

**Solución**:

Como $W \sim (0{,}1)$ entonces su función de distribución podemos expresarla como:

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 \quad si\ \ w < 0 \\ w \quad si \quad 0 \leq w \leq 1 \\ 1 \qquad si \quad w > 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}.ln(1-W) \leq x\right)$$

$$F_X(x) = P(ln(1-W) \geq -\lambda x)$$

$$F_X(x) = P(1 - W \geq e^{-\lambda . x})$$

$$F_X(x) = P(-W \geq e^{-\lambda . x} - 1)$$

$$F_X(x) = P(W \leq 1 - e^{-\lambda . x})$$

$$F_X(x) = F_W(1 - e^{-\lambda . x})$$

Como $0 < 1 - e^{-\lambda . x} < 1$ y $x > 0$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda . x}$$

De manera que la variable aleatoria $X \sim Exp(\lambda)$