TEORIA DE COLAS. Introducción

INVESTIGACIÓN OPERATIVA 2019

Las colas…

- Las colas son frecuentes en nuestra vida cotidiana:
  - En un banco
  - En un restaurante de comidas rápidas
  - En la universidad
  - Los autos en un lavadero

Teoría de colas

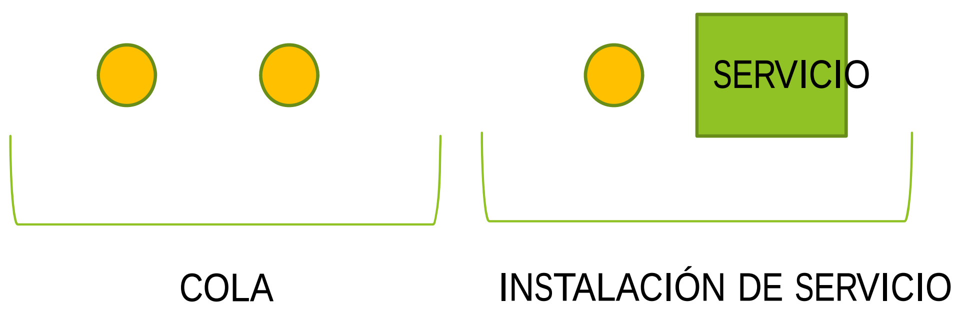
- Una cola es una línea de espera
- La teoría de colas es un conjunto de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares

- En principio el sistema está en un estado inicial
- Se supone que el sistema de colas llega a una condición de estado estable (nivel normal de operación)
- Existen otras condiciones anormales (horas pico, etc.)
- Lo que interesa es el estado estable

Teoría de colas

- Existen muchos sistemas de colas distintos
- Algunos modelos son muy especiales
- Otros se ajustan a modelos más generales
- Otros se pueden tratar a través de la simulación

- Un sistema de colas puede dividirse en dos componentes principales:
  - –La cola
  - –La instalación del servicio



LA COLA

- Los clientes o llegadas vienen en forma individual para recibir el servicio

- Los clientes o llegadas pueden ser:
  - Personas
  - Automóviles
  - Máquinas que requieren reparación
  - Documentos
  - Entre muchos otros tipos de artículos

LA COLA

- Si cuando el cliente llega no hay nadie en la cola, pasa de una vez a recibir el servicio
- Si no, se une a la cola

LA COLA

- El número de clientes en la cola es el número de clientes que esperan el servicio
- El número de clientes en el sistema es el número de clientes que esperan en la cola más el número de clientes que actualmente reciben el servicio

LA COLA

- La capacidad de la cola es el número máximo de clientes que pueden estar en la cola
- Generalmente se supone que la cola es infinita
- Aunque también la cola puede ser finita

LA DISCIPLINA DE LA COLA

- La disciplina de la cola se refiere al orden en que se seleccionan los miembros de la cola para comenzar el servicio
- La más común es PEPS: primero en llegar, primero en servicio
- Puede darse: selección aleatoria, prioridades, UEPS, entre otras.

Las llegadas

- Las llegadas van a la instalación del servicio de acuerdo con la disciplina de la cola
- Generalmente ésta es *primero en llegar, primero en ser servido*
- Pero pueden haber otras reglas o colas con prioridades

Las llegadas

- El tiempo que transcurre entre dos llegadas sucesivas en el sistema de colas se llama tiempo entre llegadas
- El tiempo entre llegadas tiende a ser muy variable
- El número esperado de llegadas por unidad de tiempo se llama tasa media de llegadas (λ)

Las llegadas

- El tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda$
- Por ejemplo, si la tasa media de llegadas es $\lambda = 20$ clientes por hora
- Entonces el tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda = 1/20 = 0.05$ horas o 3 minutos

Las llegadas con Distribución Poisson

- Es una distribución discreta empleada con mucha frecuencia para describir el patrón de las llegadas a un sistema de colas
- Para tasas medias de llegadas pequeñas es asimétrica y se hace más simétrica y se aproxima a la binomial para tasas de llegadas altas

EL SERVICIO CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

- El servicio puede ser brindado por un servidor o por servidores múltiples
- El tiempo de servicio varía de cliente a cliente
- El tiempo esperado de servicio depende de la tasa media de servicio (μ)

EL SERVICIO

- El tiempo esperado de servicio equivale a $1/\mu$
- Por ejemplo, si la tasa media de servicio es de 25 clientes por hora
- Entonces el tiempo esperado de servicio es $1/\mu = 1/25 = 0.04$ horas, o 2.4 minutos

SERVIDORES

- Uno o varios
- En paralelo
- En serie

POBLACIÓN

- Finita
- Infinita

DESEMPEÑO

- Para evaluar el desempeño se busca conocer dos factores principales:

1. El número de clientes que esperan en la cola
2. El tiempo que los clientes esperan en la cola y en el sistema

MEDIDAS DE DESEMPEÑO :

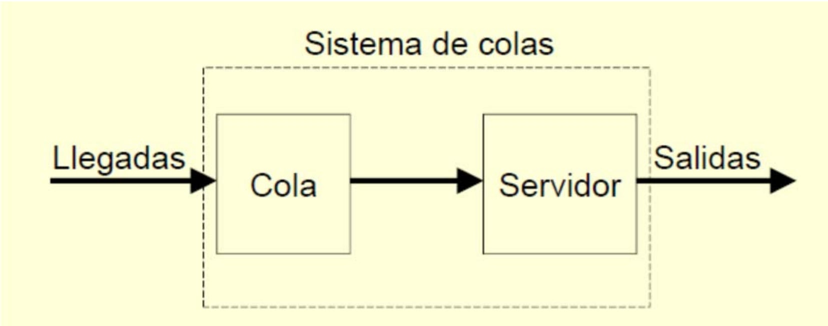
1. Número esperado de clientes en la cola L_c
2. Número esperado de clientes en el sistema L
3. Tiempo esperado de espera en la cola W_c
4. Tiempo esperado de espera en el sistema W

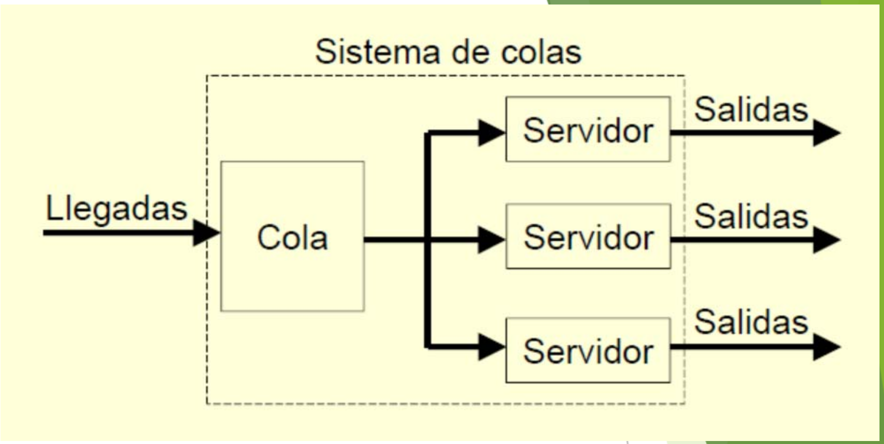
FACTOR DE UTILIZACIÓN DEL SISTEMA:

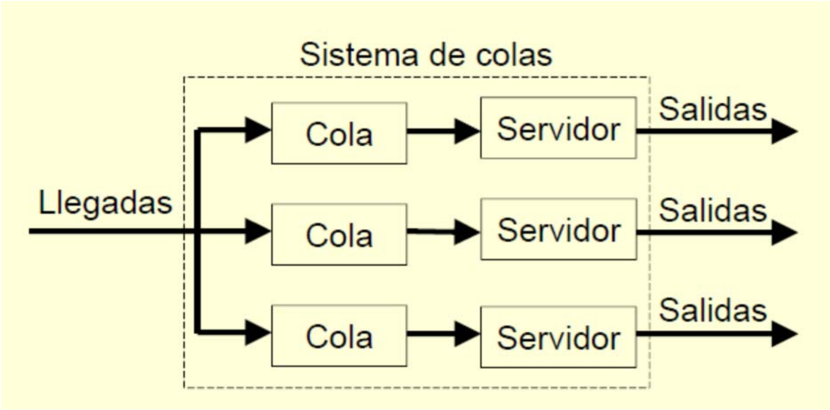
- Dada la tasa media de llegadas λ y la tasa media de servicio μ, se define el factor de utilización del sistema ρ.
- Generalmente se requiere que $\rho < 1$
- Su fórmula, con un servidor y con s servidores, respectivamente, es:

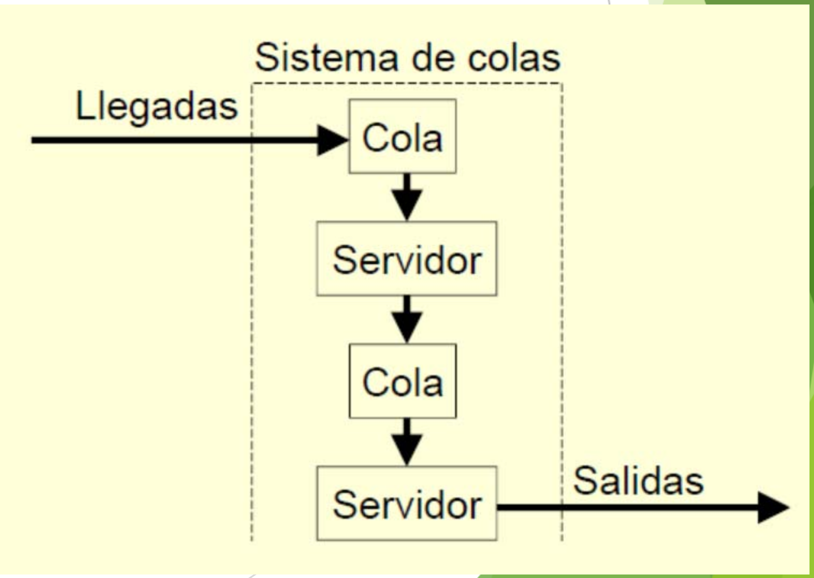
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

SISTEMAS


Sistema de colas
Llegadas
Cola
Servidor
Salidas


Sistema de colas
Llegadas
Cola
Servidor
Salidas
Servidor
Salidas
Servidor
Salidas


Sistema de colas
Llegadas
Cola
Servidor
Salidas
Cola
Servidor
Salidas
Cola
Servidor
Salidas


Sistema de colas
Llegadas
Cola
Servidor
Cola
Servidor
Salidas

ETIQUETAS PARA DISTINTOS MODELOS

Notación de Kendall: $A/B/c$

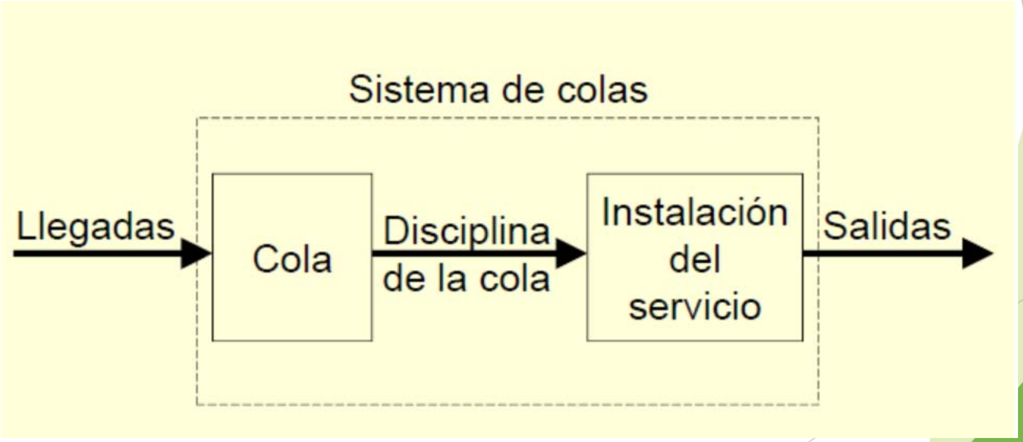
- A: Distribución de tiempos entre llegadas
- B: Distribución de tiempos de servicio
  - M: distribución exponencial
  - D: distribución degenerada
  - E_k: distribución Erlang
- c: Número de servidores

ETIQUETAS PARA DISTINTOS MODELOS

- $M/M/1$: Un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales
- $M/G/1$: Un servidor con tiempos entre llegadas exponenciales y una distribución general de tiempos de servicio
- $M/D/1$: Un servidor con tiempos entre llegadas exponenciales y una distribución degenerada de tiempos de servicio
- $M/E_k/1$: Un servidor con tiempos entre llegadas exponenciales y una distribución Erlang de tiempos de servicio

MODELO: M/M/1

- 1 COLA -
- Llegadas: Los tiempos entre llegadas son independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo a una distribución Poisson
- Servicio: Los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo a una distribución exponencial.
- El numero de servidores es igual a uno
- La población es infinita
- Disciplina de la cola: FIFO



MODELO: M/M/1

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$P_n = \rho^n P_0$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_C = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_C = \rho \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{T_s}{T_a}$$

$$T_a = \frac{1}{\lambda}$$

$$T_s = \frac{1}{\mu}$$

Ejercicio 1

1) En un lugar de atención con un único canal de despacho se conoce el arribo de clientes que asciende a quince unidades en promedio por hora, siendo la velocidad media de servicio de veinticinco unidades por hora. Las llegadas siguen una distribución Poisson y el servicio exponencial

Calcular :

Datos: λ= 15 clientes / hora μ= 25 clientes / hora $\rho = \lambda / \mu$ = 15/25= 0,6

a) Tiempo promedio entre dos arribos consecutivos. = $T_\lambda = 1/\lambda$ = 1/15 = 0,066 hora/ cliente = 4 minutos / clientes

b) Tiempo promedio de servicio. $T_\mu = 1/\mu$ = 1/25 = 0,04 hora / cliente = 2,4 minutos / clientes

c) Factor de tráfico. $\rho = \lambda / \mu$ = 15/25= 0,6

d) Tiempo medio de espera en el sistema. W= 1 /(μ- λ) = 1 / (25-15)= 0,1 hora/cliente = 6 minutos/cliente

e) Tiempo medio de espera en la cola. Wc = ρ /(μ- λ) = 0,6 / (25-15)= 0,06 hora/cliente = 3,6 minutos/cliente

f) Longitud media del sistema. L= ρ/(1- ρ) L= 0,6/(1- 0,6) = 1,5 clientes

g) Longitud media de la cola. Lc = ρ^2/(1- ρ) Lc= $(0,6)^2$/(1- 0,6) = 0,9 clientes

h) Porcentaje de tiempo ocioso del canal. = 1 - ρ = 1- 0,6 = 0,4 = 40%

i) Probabilidad de no esperar. P(0)= 1 - ρ = 1- 0,6 = 0,4