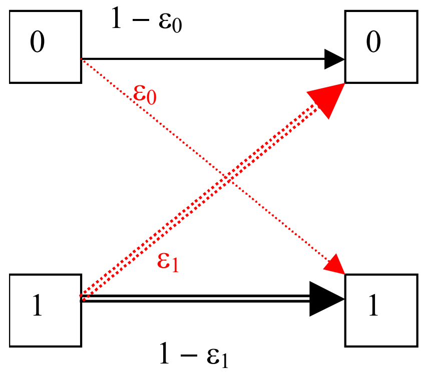
Comunicación a través de un canal ruidoso

Se transmite un símbolo binario (0 ó 1) a través de un canal ruidoso y es recibido incorrectamente con probabilidad ε_0 y ε_1, respectivamente, como se indica en la figura.



Cuando se transmiten varios símbolos los errores ocurridos en cada uno de ellos son independientes.

a) Suponiendo que el canal transmite un 0 con probabilidad p y transmite un 1 con probabilidad $1-p$, ¿cuál es la probabilidad de que un símbolo elegido al azar se reciba correctamente?

b) Se transmite la cadena de símbolos 1011, ¿Cuál es la probabilidad de que todos los símbolos sean recibidos correctamente?

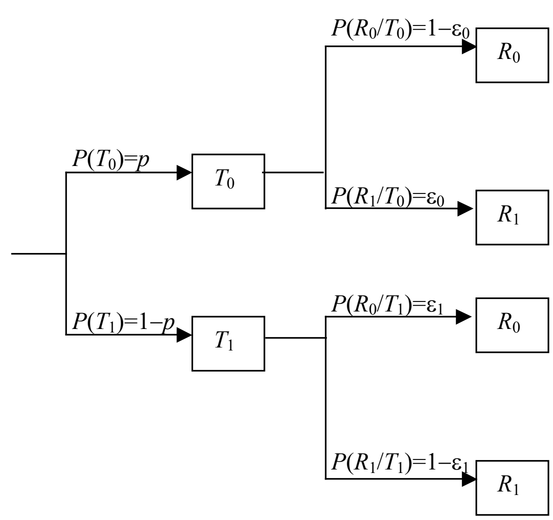
c) En un esfuerzo de mejorar la confiabilidad del sistema, cada símbolo es transmitido 3 veces y la cadena de símbolo recibida es decodificada según el criterio que se detalla a continuación. El símbolo 0 se transmite como 000 (triplicación perfecta) y es decodificado como 0 sí y sólo sí la cadena de 3 símbolos recibida contiene al menos dos ceros. En forma análoga, el 1 se transmite como 111 (triplicación perfecta) y es decodificado como 1 sí y sólo sí la cadena de 3 símbolos recibida contiene al menos dos unos. ¿Cuál es la probabilidad de que un 0 transmitido sea perfectamente decodificado?

d) El canal transmite un 0 con probabilidad p y un 1 con probabilidad $1-p$, usando el esquema detallado en c). ¿Cuál es la probabilidad de que si se recibió la cadena 101, se haya transmitido un 0?

e) Contestar la pregunta a) son el sistema de transmisión triplificada. Evaluar numéricamente las respuestas a) y e) si p=0,5 y ε_0=ε_1=0,05.

Resolución

Tn: el canal transmite el número n con n=0;1.
Rn: se recibe el número n con n=0;1.
C: el dígito elegido al azar es recibido correctamente.



a) $P(C) = P\left[(T_0 \cap R_0) \cup (T_1 \cap R_1)\right] \overset{Ax3}{=} P(T_0 \cap R_0) + P(T_1 \cap R_1) = P(T_0)P(R_0 / T_0) + P(T_1)P(R_1 / T_1)$

$$\boxed{P(C) = p(1-\varepsilon_0) + (1-p)(1-\varepsilon_1)}$$

b) Para que todos los símbolos de una cadena se reciban correctamente, no debe presentarse ningún error. Además los errores que se cometan son independientes, por tanto basta multiplicar las probabilidades de no error.

$$P(C/1011) = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_0)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_1) \Rightarrow \boxed{P(C/1011) = (1-\varepsilon_0)(1-\varepsilon_1)^3}$$

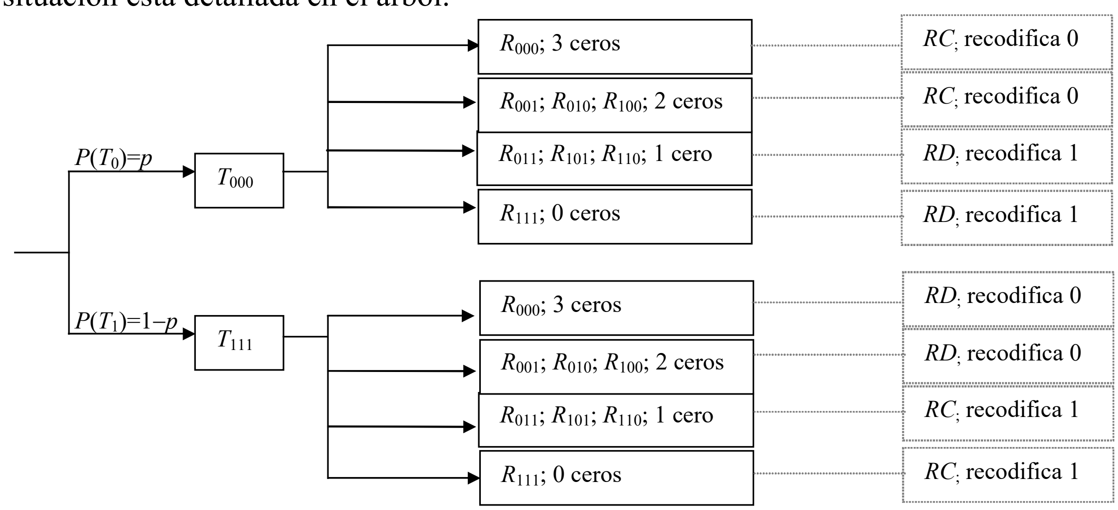
c) Sea *RC* el evento que se recodifica correctamente la triplificación (el evento complementario de recodificación defectuosa *RD*). Como se transmite un 000, la recodificación la marcará como 0 si se reciben las cadenas 000, 001, 010, 100, que responden a tener al menos dos ceros. Así, la probabilidad de este evento, considerando la independencia de los errores es

$$P(RCC/T_0) = P(R_{000}/T_0) + P(R_{001}/T_0) + P(R_{010}/T_0) + P(R_{100}/T_0)$$

$$P(RCC/T_0) = (1-\varepsilon_0)^3 + (1-\varepsilon_0)^2\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)\varepsilon_0(1-\varepsilon_0) + \varepsilon_0(1-\varepsilon_0)^2$$

$$\boxed{P(RCC/T_0) = (1-\varepsilon_0)^3 + 3(1-\varepsilon_0)^2\varepsilon_0}$$

d) Utilizando la nomenclatura propuesta con anterioridad para los eventos, la pregunta es $P(T_0 / R_{101})$, y la situación está detallada en el árbol.



$$P(T_0 / R_{101}) = \frac{P(T_0 \cap R_{101})}{P(R_{101})} \quad P(T_0 / R_{101}) = \frac{P(R_{101}/T_0)P(T_0)}{P(R_{101}/T_0)P(T_0) + P(R_{101}/T_1)P(T_1)}$$

$$P(T_0 / R_{101}) = \frac{(1-\varepsilon_0)\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)p}{(1-\varepsilon_0)\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)p + \varepsilon_1(1-\varepsilon_0)\varepsilon_1(1-p)}$$

$$\boxed{P(T_0 / R_{101}) = \frac{(1-\varepsilon_0)^2\varepsilon_0 p}{(1-\varepsilon_0)^2 p + \varepsilon_1^2(1-\varepsilon_0)(1-p)}}$$

e) La probabilidad de que la recodificación sea correcta enviando con el sistema de triplificación es

$$\boxed{P(RC) = P(RC \cap T_0) + P(RC \cap T_1) = P(RC/T_0)P(T_0) + P(RC/T_1)P(T_1)}.$$

Si p=0,5 y ε_0=ε_1=0,05, existe una simetría entre los números transmitidos y la eficiencia del sistema.

La probabilidad de recibir un símbolo correcto por el sistema simple es

$$P(C) = 2 \times 0,95 \times 0,5 = 0,95\,,$$

mientras que con el sistema de triplificación aumenta a un valor

$$P(RC) = 2\left[0,95^3 + 3 \times 0,95^2 \times 0,05\right]0,5 = 0,99275\,.$$

Estos resultados permiten comparar la eficiencia de ambos sistemas.