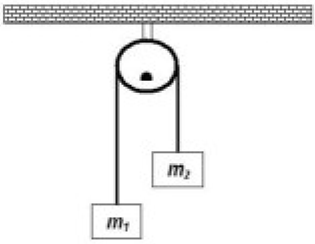
Ejercicio 82

El sistema de la figura está formado por dos masas vinculadas por una soga inextensible que pasa por una polea de masa despreciable.
a) Plantee las ecuaciones de Newton para cada masa y calcule el módulo de la aceleración del sistema. Datos: m1 =10 kg; m2= 3 kg.
b) Si el sistema parte del reposo, ¿cuál es la velocidad de la masa 2 cuando la masa 1 descendió 1 m?
[a) a=5,38 m/s 2 ; b) 3,28 m/s]



En primer lugar elegiremos un sistema de coordenadas y haremos el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.

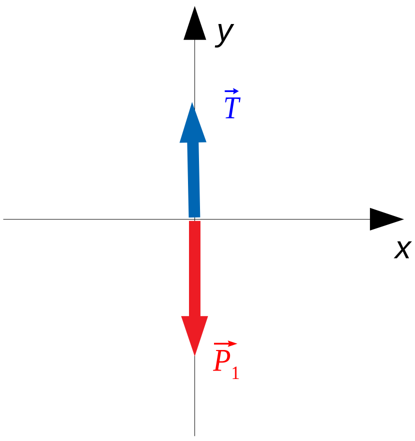


Diagrama de cuerpo libre
de la masa m1

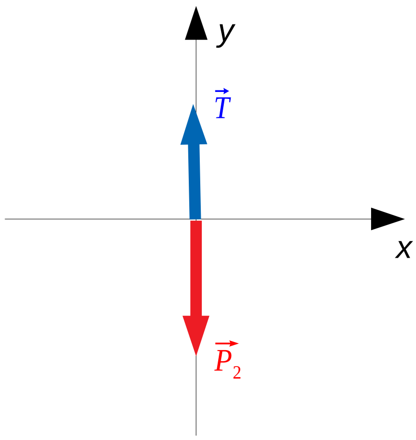


Diagrama de cuerpo libre
de la masa m2

Sobre cada masa actúan las fuerzas del peso $\vec{P}$ y la tensión de la cuerda $\vec{T}$ .Dado que la cuerda es inextensible, la tensión que ejerce sobre ambas masas es la misma. Escribiendo las fuerzas con sus componentes:

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= (0,-m_1 \cdot g) \\ \vec{T} &= (0,|\vec{T}|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_2 &= (0,-m_2 \cdot g) \\ \vec{T} &= (0,|\vec{T}|) \end{aligned}$$

Ahora podemos plantear la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Vamos a hacer la suposición de que la masa m1 se está desplazando hacia abajo y la masa m2 hacia arriba. Con esto:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{P}_1 & + & \vec{T} & = & m_1 \cdot \vec{a} \\ (0,-m_1 \cdot g) & + & (0,|\vec{T}|) & = & m_1 \cdot (0,-|\vec{a}|) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \vec{P}_2 & + & \vec{T} & = & m_1 \cdot \vec{a} \\ (0,-m_2 \cdot g) & + & (0,|\vec{T}|) & = & m_2 \cdot (0,|\vec{a}|) \end{array}$$

Analizando la componente y:

$$-m_1 \cdot g + |\vec{T}| = -m_1 \cdot |\vec{a}| \quad (ec.1) \qquad\qquad -m_2 \cdot g + |\vec{T}| = m_2 \cdot |\vec{a}| \quad (ec.2)$$

Aquí tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas: $|\vec{T}|$ y $|\vec{a}|$. Este sistema se puede resolver de distintas maneras. Aquí utilizaremos sustitución. Despejando $|\vec{T}|$ de la ecuación ec.2 y sustituyéndolo en ec.1:

$$-m_1 \cdot g + m_2(|\vec{a}| + g) = -m_1 \cdot |\vec{a}| \quad \rightarrow \quad |\vec{a}|(m_1 + m_2) = g \cdot (m_1 - m_2) \quad \rightarrow \quad |\vec{a}| = \frac{g \cdot (m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = 5.38 \frac{m}{s^2}$$

$|\vec{a}|$ nos dio un valor positivo con lo cual era correcta la suposición inicial de que la masa 1 se mueve hacia abajo y la masa 2 hacia arriba.

Luego nos plantean: Si el sistema parte del reposo, ¿cuál es la velocidad de la masa 2 cuando la masa 1 descendió 1 m? Para resolver este punto recurrimos a las ecuaciones dinámicas. Considerando que los cuerpos poseen una aceleración constante en y:

$$\begin{aligned} a_{1y} &= -|\vec{a}| \\ v_{1y} &= -|\vec{a}| \cdot t + v_{0y1} \\ r_{1y} &= -|\vec{a}| \cdot \frac{t^2}{2} + v_{0y1} \cdot t + y_{01} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_{2y} &= |\vec{a}| \\ v_{2y} &= |\vec{a}| \cdot t + v_{0y2} \\ r_{2y} &= |\vec{a}| \cdot \frac{t^2}{2} + v_{0y2} \cdot t + y_{02} \end{aligned}$$

Considerando que ambas masas 1 parten del reposo, $v_{0y1} = 0$ y $v_{0y2} = 0$. También elegimos el sistema de coordenadas de modo que la masa 1 parte de la posición $y_{01} = 0$. Con todo esto:

$$\begin{aligned} a_{1y} &= -|\vec{a}| \\ v_{1y} &= -|\vec{a}| \cdot t \\ r_{1y} &= -|\vec{a}| \cdot \frac{t^2}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_{2y} &= |\vec{a}| \\ v_{2y} &= |\vec{a}| \cdot t \\ r_{2y} &= |\vec{a}| \cdot \frac{t^2}{2} + y_{02} \end{aligned}$$

Ahora me piden v_{2y} cuando la masa1 haya descendido 1m. Para calcular esto necesitamos saber el tiempo en el cual la masa m1 desciende 1 m, y luego calcular v_{2y} en ese tiempo. De la ecuación ec.4:

$$r_{1y} = -|\vec{a}| \cdot \frac{t^2}{2} \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot r_{1y}}{-|\vec{a}|}} \quad \rightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1m)}{-5.38 \frac{m}{s^2}}} = 0.61 s$$

Ahora podemos calcular v_{2y} en este tiempo:

$$v_{2y}(t^*) = |\vec{a}| \cdot t^* = 5.38 \frac{m}{s^2} \cdot 0.61 s = 3.28 \frac{m}{s}$$