Ondas Mecánicas

Introducción:

Desde muy temprana edad todas las personas somos capaces de percibir o apreciar lo que es una onda, incluso sin saberlo. Todos hemos alguna vez arrojado una piedra desde la orilla de un rio para saber, o al menos tener alguna aproximación, acerca de que tan profundo es dicho rio.

En el punto de contacto entre la piedra y el agua es donde se crean las ***ondas.*** Si observamos con detenimiento, vamos ver que las ondas creadas en este caso se desplazan desde el punto de contacto entre la piedra y el agua en círculos y desde allí hacia afuera pudiendo llegar incluso hasta la orilla.

Existen dos grandes grupos de Ondas, las ondas mecánicas y las ondas electromagnéticas, pero en lo que respecta a este curso, las ondas que se estudiaran son las llamadas ***Ondas Mecánicas.***

Propagación de una perturbación:

Todas las ondas mecánicas requieren:

- Alguna fuente de perturbación
- Un medio que contenga elementos que sean factibles de perturbación
- Algún mecanismo físico a partir del cual los elementos puedan influirse mutuamente

Veamos un ejemplo mediante el cual podamos poner en evidencia un *movimiento ondulatorio.*

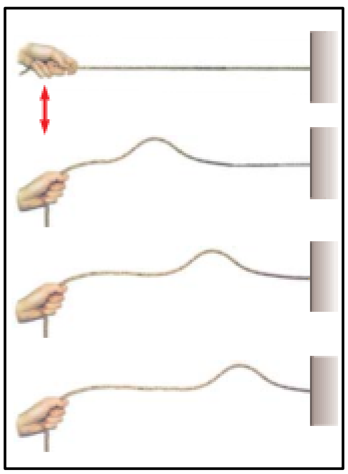
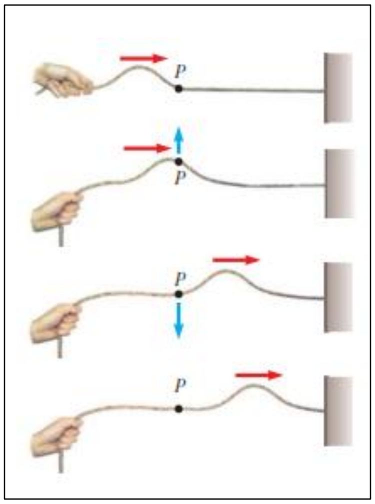


Fig. 1. Un pulso viaja por una Cuerda estirada

Si disponemos una cuerda tensa, fija en un extremo y con nuestra mano sacudimos el extremo opuesto vamos a observar como aparece un pulso que va a viajar a lo largo de la cuerda con una rapidez definida. En la figura 1 se muestra la evolución de dicho pulso viajando a lo largo de la cuerda. Por lo tanto la cuerda es el medio a través del cual viaja dicho pulso. Este alcanzará un altura y una rapidez a los largo del medio (la cuerda).

Definido el concepto de pulso, ahora pensemos que pasaría si a aquella cuerda tensa que se encontraba fija en un extremo, ahora la comenzamos a mover desde el extremo opuesto hacia arriba y hacia abajo repetidamente. Vamos a estar en presencia de una *onda viajera* debido a que aquel pulso que observamos en un primer instante ahora viaja a través del medio.

A medida que viaja el pulso de la figura 1, cada elemento perturbado de la cuerda se mueve en una dirección perpendicular a la dirección de propagación. Por otro lado ninguna parte de la cuerda se mueve alguna vez en la dirección de la propagación.



En la figura 2 se muestra este punto para un elemento particular llamado P. La dirección de movimiento de cualquier elemento P de la cuerda (flechas azules) es perpendicular a la dirección de propagación (flechas rojas).

Fig. 2. Un pulso viaja por una cuerda estirada

Una onda viajera que hace que los elementos del medio perturbado se muevan perpendiculares a la dirección de propagación se llama *onda transversal.*

Ahora bien, si comparamos esta onda con otro tipo de pulso, uno que se mueve por un largo resorte estirado como el que se muestra a continuación:

Fig.3. Un pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado. El desplazamiento de las espiras es paralelo a la dirección de la propagación.

El extremo izquierdo del resorte recibe un ligero empuje hacia la derecha y después recibe un ligero jalón hacia la izquierda. Este movimiento crea una súbita compresión de una región de las espiras. Esta región comprimida ahora viaja a los largo del resorte (en esta caso a la derecha).
Si observamos vamos a notar que la dirección del desplazamiento de las espiras es paralela a la dirección de propagación de la región comprimida. Una onda viajera o pulso que mueve a los elementos del medio en paralelo a la dirección de propagación se llama *onda longitudinal.*

En la realidad existen algunas ondas que son una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. Las ondas en la superficie del agua son un buen ejemplo. Cuando una onda acuática viaja sobre la superficie del agua profunda, los elementos del agua en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares, como se muestra en la figura 4.
La perturbación tiene componentes tanto transversales como longitudinales. Los desplazamientos transversales que se ven en la figura 4 representan las variaciones en posición vertical de los elementos del agua. Los desplazamientos longitudinales representan elementos de agua móvil de atrás para adelante en una dirección horizontal.

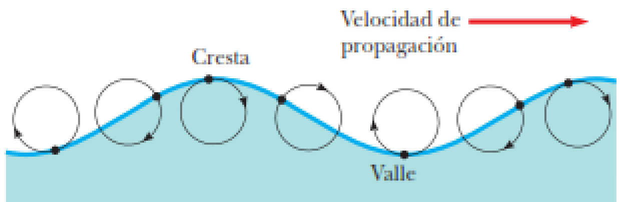


Fig.4. Ondas con desplazamientos transversales y longitudinales.

Otro ejemplo muy utilizado en la ingeniería es la aplicación de estos conceptos mediante el uso de las *ondas tridimensionales*.
Las ondas tridimensionales que viajan desde un punto abajo de la superficie de la Tierra donde se presenta un terremoto, son de ambos tipos, *transversales y longitudinales*. Las ondas longitudinales son las más rápidas de las dos y viajan con magnitudes de velocidad en el intervalo de 7 a 8 km cerca de la superficie. Se llaman *ondas P*, donde “P” es por primarias, porque viajan más rápido que las ondas transversales y llegan primero a un sismógrafo. *Las ondas transversales más lentas, llamadas ondas S*, donde “S” es para secundarias, viajan a través de la Tierra a 4 o 5 km cerca de la superficie. Al registrar en un sismógrafo el intervalo de tiempo entre las llegadas de estos dos tipos de ondas, se determina la distancia desde el sismógrafo al punto de origen de las ondas. Una sola medición establece una esfera imaginaria con centro en el sismógrafo, donde el radio de la esfera se determina mediante la diferencia en los tiempos de llegada de las ondas P y S. El origen de las ondas se ubica en alguna parte sobre dicha esfera. Las esferas imaginarias desde tres o más estaciones de monitoreo, ubicadas muy separadas unas de otras, se intersecan en una región de la Tierra, y esta región es donde se presentó el terremoto.

Modelo de Onda Progresiva:

Vamos a introducir una función de onda quizá ya vista pero que nos servirá para estudiar el comportamiento de una onda progresiva.
La onda representada en la figura 5 se llama *onda sinusoidal.*

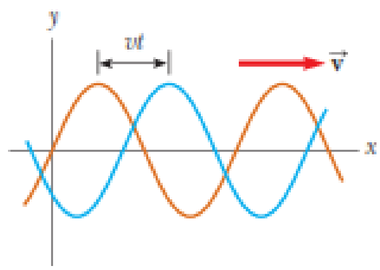


Fig.5. Onda Sinusoidal.

Una onda sinusoidal se podría establecer en una soga al agitar el extremo de la soga arriba y abajo en movimiento armónico simple. La onda sinusoidal es el ejemplo más simple de una onda periódica continua y se puede usar para construir ondas más complejas.
La curva café en la figura 5 representa una instantánea de una onda sinusoidal progresiva en t = 0, y la curva azul representa una instantánea de la onda en algún tiempo posterior t. Imagine dos tipos de movimiento que pueden presentarse. Primero, la forma de onda completa en la figura 5 se mueve hacia la derecha de modo que la curva café se mueve hacia la derecha y al final llega a la posición de la curva azul. *Este es el movimiento de la onda.*
Si nos concentramos en un elemento del medio, como el elemento en x = 0, observaremos que cada elemento se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje y en movimiento armónico simple. Este es el movimiento de los *elementos del medio*. **Es importante diferenciar entre el movimiento de la onda y el movimiento de los elementos del medio.**

A continuación se presentan las características matemáticas y sus respectivos parámetros para el análisis de un modelo de la **onda progresiva.**
Este modelo se usa cuando una onda se mueve a través del espacio sin interactuar con otras ondas o partículas.

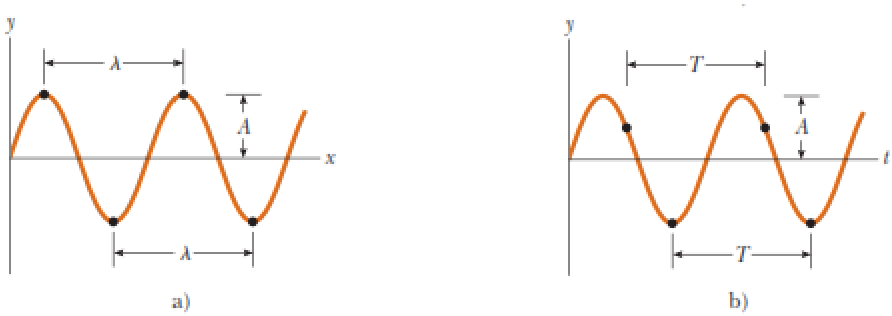


Fig.6. Modelo de una onda progresiva.

Un punto en la figura 6 en que el desplazamiento del elemento de su posición normal está más alto se llama *cresta* de la onda. El punto más bajo se llama *valle*. La distancia de una cresta a la siguiente se llama longitud de onda λ.
De manera más general, la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos cualesquiera en ondas adyacentes, como se muestra en la figura 6a. Si contabilizamos el número de segundos entre las llegadas de dos crestas adyacentes en un punto determinado en el espacio, estaremos midiendo el periodo T de las ondas. En general, el periodo es el intervalo de tiempo requerido para que dos puntos idénticos de ondas adyacentes pasen por un punto, como se muestra en la figura 6b. Por otro lado si hacemos la inversa del periodo T obtendremos la *frecuencia f*.
En general, la frecuencia de una onda periódica es el número de crestas (o valles o cualquier otro punto en la onda) que pasa un punto determinado en un intervalo de tiempo unitario. La frecuencia de una onda sinusoidal se relaciona con el periodo mediante la siguiente expresión:

$$f = \frac{1}{T}$$

La unidad de frecuencia más utilizada es el *hertz (Hz)*. La correspondiente unidad para *T es segundos.*
La máxima posición de un elemento del medio relativo a su posición de equilibrio se llama *amplitud A* de la onda.
Las ondas viajan con una *rapidez* específica, y esta rapidez depende de las propiedades del medio en el que las ondas viajan.

Por definición, la onda viaja a través de un desplazamiento Δx igual a una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo Δt de un periodo T. Por tanto, la rapidez de onda, la longitud de onda y el periodo se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}$$

La función de onda se expresa en una forma conveniente al definir otras dos cantidades, el ***número de onda angular k*** (por lo general simplemente llamado número de onda) y ***la frecuencia angular*** ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Una vez conocidas estas definiciones podemos escribir la defunción en su forma compacta de la ***función de onda para una onda sinusoidal:***

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

De acuerdo a lo que habíamos definido, la rapidez de onda v venía dada por la expresión:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

O su expresión equivalente:

$$v = \lambda f$$

Finalmente definimos ***la expresión general para una onda sinusoidal:***

$$\boxed{y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)}$$

Donde Ø es la constante de fase. Esta constante se determina a partir de las condiciones iniciales.

Ondas Sinusoidales en Cuerdas:

Ya hemos visto como crear un pulso al sacudir una cuerda hacia arriba y hacia abajo. Ahora bien si quisiéramos crear *una onda*, deberíamos repetir n veces este proceso en el tiempo vibrando tal como lo haría un sistema que reproduzca un Movimiento Armónico Simple.
Esto podríamos modelarlo con una varilla vibratoria como la que se muestra en la siguiente figura:

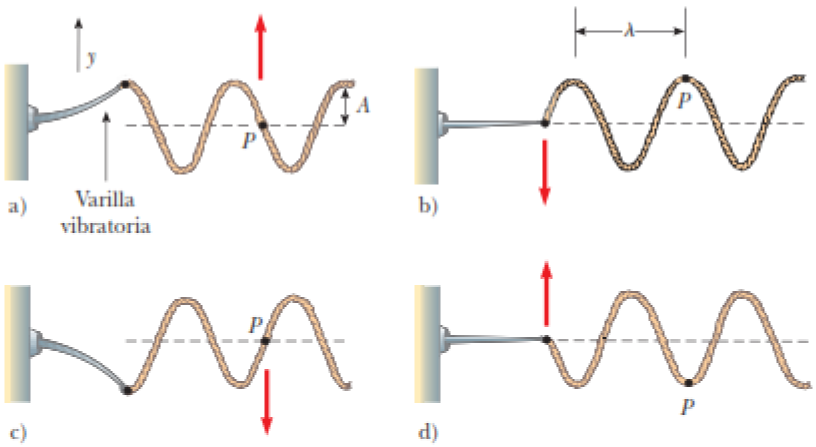


Fig.7. Modelo para producir una onda sinusoidal sobre una cuerda.

Más allá de las características matemáticas que definen los parámetros del movimiento sinusoidal, cada elemento de la cuerda, como el que se encuentra en P, también oscila verticalmente con movimiento armónico simple. Por otro lado, aun cuando cada elemento oscila en la dirección y, la onda viaja en la dirección x con una rapidez v. Desde luego, esta es la definición de una onda transversal.
La función de onda se puede escribir entonces:

$$\boxed{y = A \operatorname{sen}\,(kx - \omega t)}$$

Se puede usar esta expresión para describir el movimiento de cualquier elemento de la cuerda. Un elemento en el punto P (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, y de este modo su coordenada x permanece constante. Por lo tanto, la rapidez transversal v_y (no confundir con la rapidez de onda v) y la aceleración transversal a_y de los elementos de la cuerda son:

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Los valores máximos para la velocidad transversal y la aceleración transversal quedan definidos por:

$$v_{y,\,\text{máx}} = \omega A$$

$$a_{y,\,\text{máx}} = \omega^2 A$$

La rapidez transversal llega a su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transversal llega a su valor máximo ($\omega^2 . A$) cuando $y = \pm A$.

La rapidez de ondas en cuerdas:

Si una cuerda bajo tensión se jala hacia ambos lados y luego se libera, la fuerza de tensión es responsable por acelerar un elemento particular de la cuerda de regreso hacia su posición de equilibrio. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del elemento aumenta con tensión creciente. Si el elemento regresa al equilibrio más rápidamente debido a esta aceleración aumentada, intuitivamente se argumentaría que la rapidez de la onda es mayor. En consecuencia, se espera que la rapidez de la onda aumente con tensión creciente.

Del mismo modo, ya que es más difícil acelerar un elemento pesado de la cuerda que un elemento ligero, la rapidez de la onda debe disminuir a medida que aumente la masa por unidad de longitud de la cuerda.

Si la tensión en la cuerda es T y su masa por unidad de longitud es μ (letra griega mu), la rapidez de onda, quedará definida por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Rapidez de una onda sobre una cuerda estirada.

Reflexión y Transmisión:

Hasta ahora hemos analizado el modelo de onda progresiva que viaja a través de un medio uniforme sin interactuar con algo más en el camino. Ahora vamos a considerar que sucede cuando una onda progresiva es afectada cuando encuentra un cambio en el medio. Por ejemplo, observemos un pulso que viaja en una cuerda que está rígidamente unida a un soporte en un extremo, como en la figura 8. Cuando el pulso alcanza el soporte, se presenta un cambio severo en el medio: la cuerda termina. Como resultado, el pulso experimenta reflexión; es decir, el pulso se mueve de regreso a lo largo de la cuerda en la dirección opuesta. Además se puede apreciar que el pulso reflejado está invertido. La razón de esta inversión se debe a que cuando el pulso alcanza el extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Por la tercera ley de Newton, el soporte debe ejercer sobre la cuerda una fuerza de reacción de igual magnitud y con dirección opuesta (hacia abajo). Esta fuerza hacia abajo hace que el pulso se invierta en la reflexión.

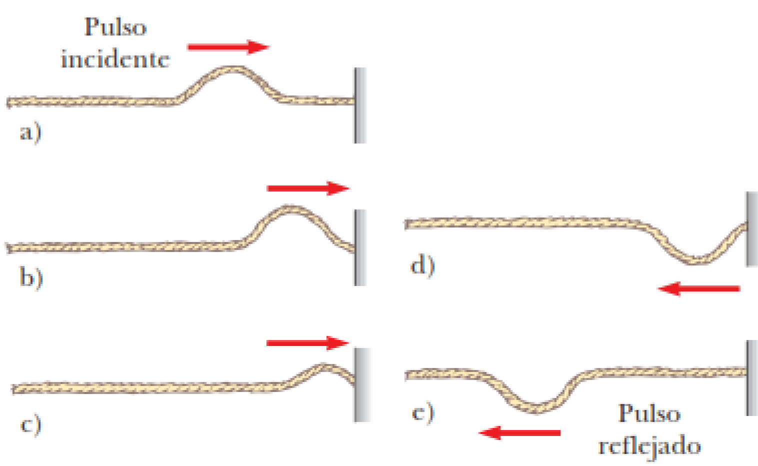


Fig.8. Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada.

Si ahora consideramos otro caso, en el cual el pulso llega al final de una cuerda que es libre de moverse verticalmente como en la figura 9. La tensión en el extremo libre se mantiene porque la cuerda está amarrada a un anillo de masa despreciable que tiene libertad para deslizarse verticalmente sobre un poste uniforme sin fricción. De nuevo, el pulso se refleja, pero esta vez *no se invierte*. Cuando llega al poste, el pulso ejerce una fuerza sobre el extremo libre de la cuerda, lo que hace que el anillo acelere hacia arriba. El anillo se eleva tan alto como el pulso entrante, y luego la componente hacia abajo de la fuerza de tensión tira el anillo de vuelta hacia abajo. Este movimiento del anillo produce un pulso reflejado que *no se invierte* y que tiene la misma amplitud que el pulso entrante.

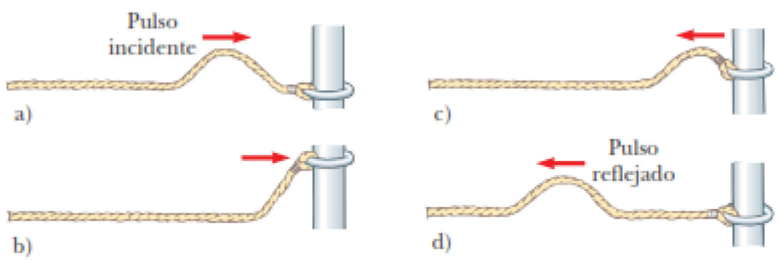


Fig.9. Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada.
El pulso reflejado no está invertido.

Superposición e Interferencia:

Muchos fenómenos ondulatorios interesantes en la naturaleza no se pueden describir mediante una sola onda progresiva. En vez de ello, se debe analizar estos fenómenos en términos de una combinación de ondas progresivas. Para analizar tales combinaciones ondulatorias, se utiliza el ***principio de superposición***:

Podemos enunciar este principio de la siguiente manera:

"Si dos o más ondas progresivas se mueven a través de un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales"

La figura 10 es una representación gráfica de la superposición de dos pulsos. La función de onda para el pulso móvil hacia la derecha es y_1 , y la función de onda para el pulso móvil hacia la izquierda es y_2. Los pulsos tienen la misma rapidez pero diferentes formas y el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos. Si observamos la figura 10b, es ahí donde las ondas comienzan a *superponerse*, la función de onda para la onda compleja resultante se define por $y_1 + y_2$. Cuando las crestas de los pulsos coinciden (figura 10.c), la onda resultante conocida por $y_1 + y_2$ tiene una amplitud mayor que los pulsos individuales. Los dos pulsos finalmente se separan y continúan su movimiento en sus direcciones originales (figura 10.d). Un aspecto importante y conceptual de este fenómeno es que la forma del pulso permanece invariable después de la interacción. ¡Como si los dos pulsos nunca se hubieran encontrado!

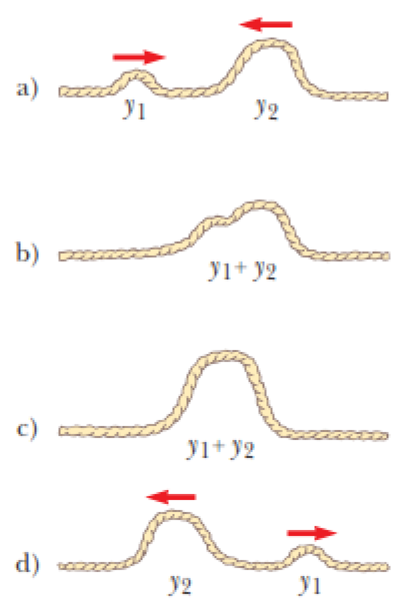


Fig.10. Superposición de Pulsos. Interferencia Constructiva

Esta combinación de ondas separadas en la misma región de espacio para producir una onda resultante recibe el nombre de ***Interferencia.***

Cuando los desplazamientos causados por los dos pulsos están en la misma dirección (fig. 10), a esta interferencia se la llama ***Interferencia constructiva.***

El pulso resultante muestra una amplitud *mayor* que la de cualquier pulso en forma individual.

Por otro lado, si consideramos dos pulsos que viajan en direcciones opuestas en una cuerda tensa donde un pulso se invierte relativo con el otro, como se muestra en la figura 11. Cuando estos pulsos comienzan a superponerse, el pulso resultante se conoce por $y_1 + y_2$ pero los valores de la función $y_2$son negativos. De nuevo, los dos pulsos pasan uno a través del otro; sin embargo, ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en direcciones opuestas, a su superposición se define como ***interferencia destructiva***.

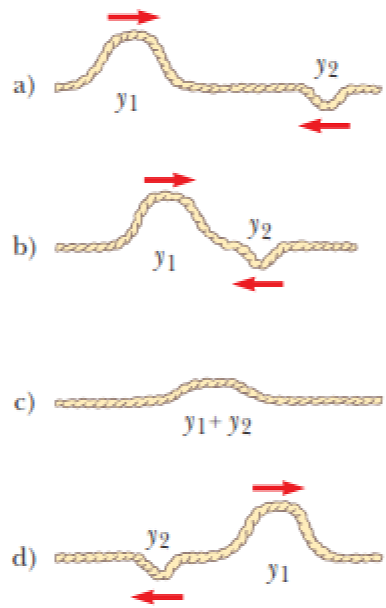


Fig.11. Superposición de Pulsos. Interferencia Destructiva

<u>Superposición de Ondas Sinusoidales:</u>

Vamos a aplicar ahora el principio de superposición a dos ondas sinusoidales que viajan en la misma dirección en un medio lineal. Si las dos ondas viajan hacia la derecha y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud pero difieren en fase, sus funciones de onda individuales se pueden expresar

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

Donde como ya hemos demostrado, $k = 2\pi$, $\omega = 2\pi f$ y φ es el ángulo de fase. Por lo tanto la función de onda quedara definida como:

$$y = y_1 + y_2 = A[\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)]$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Donde para nuestra función $a = kx - \omega t$ y $b = kx - \omega t + \varphi$, reemplazando, nuestra función de onda nos queda:

$$\boxed{y = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)}$$

Ecuación Resultante de dos ondas sinusoidales viajeras

La función de onda resultante y también es sinusoidal y tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas individuales porque la función seno incorpora los mismos valores de k y ω que aparecen en las funciones de onda originales. La amplitud de la onda resultante es $2Acos(\frac{\varphi}{2})$ y su fase es $\varphi/2$. Si la constante de fase φ es igual a 0, en tal caso cos(φ/2) =cos 0 = 1 y la amplitud de la onda resultante es 2A, el doble de la amplitud de cualquier onda individual. En este caso, se dice que las ondas están en fase en cualquier parte y, por tanto, ***interfieren constructivamente.***

Las crestas y valles de las ondas individuales y_1e y_2 se presentan en las mismas posiciones y se combinan para formar la curva roja y de amplitud 2A que se muestra en la figura 12.a. Ya que las ondas individuales están en fase, son indistinguibles en la figura 12.a, en la que aparecen como una sola curva azul. En general, la interferencia constructiva ocurre cuando $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$. Esto es cierto, por ejemplo, cuando $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots \ldots$ radianes, es decir cuando φ es múltiplo *par* de π.

Cuando φ es igual a π radianes ó a cualquier múltiplo impar de π, en tal caso cos (φ /2) = cos ($\pi/2$) = 0 y las crestas de una onda se presentan en las mismas posiciones que los valles de la segunda onda (figura 12.b).

Por lo tanto, como consecuencia de la interferencia destructiva, la onda resultante tiene amplitud *cero* en todas partes. En último lugar, cuando la constante de fase tiene un valor arbitrario distinto de 0 ó un múltiplo entero de π radianes (figura 12.c), la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está en alguna parte entre 0 y 2ª.

En el caso más general en el que las ondas tienen la misma longitud de onda pero diferentes amplitudes, los resultados son similares con las siguientes excepciones. En el caso en fase, la amplitud de la onda resultante no es el doble que en una sola onda, sino más bien es la suma de las amplitudes de las dos ondas. Cuando las ondas están π radianes fuera de fase, no se cancelan completamente como en la figura 12.b. El resultado es una onda cuya amplitud es la diferencia en las amplitudes de las ondas individuales.

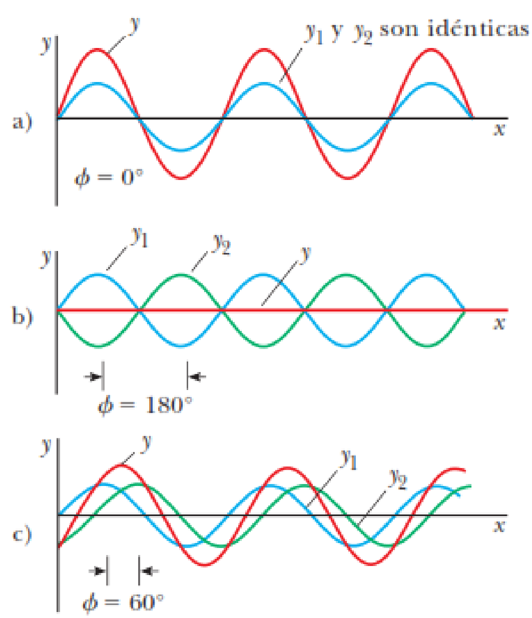


Fig.12. Superposición de Ondas Sinusoidales

Ondas Estacionarias:

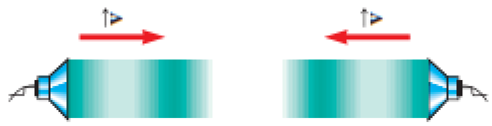


Fig.13. Ondas en superposición

Supongamos dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas en el mismo medio, como en la figura 13. Dichas ondas se combinan de acuerdo con el modelo de ondas en interferencia.

$$y_1 = A \text{ sen } (kx - \omega t) \qquad y_2 = A \text{ sen } (kx + \omega t)$$

Dónde:

- y_1 representa una onda que viaja en la dirección $+x$
- y_2 representa una onda que viaja en la dirección $-x$

Al sumar estas dos ecuaciones la función de onda resultante queda:

$$y = y_1 + y_2 = A \text{ sen } (kx - \omega t) + A \text{ sen } (kx + \omega t)$$

Usando la identidad trigonométrica: $(a \pm b) = sen(a).\cos(b) \pm \cos(a)sen(b)$
La expresión se reduce a:

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t$$

Ecuación de Onda Estacionaria

Esta ecuación representa la función de onda de una ***onda estacionaria.*** Una onda estacionaria es un patrón de oscilación con un contorno estacionario que resulta de la superposición de dos ondas idénticas que viajan en *direcciones opuestas.*
Además si observamos esta ecuación, vamos a notar que no contiene una función de $kx - \omega t$. Esto se debe a que no es una función para una sola onda progresiva. En una onda estacionaria, no hay sentido de movimiento en la dirección de propagación de cualquier onda original. Estamos ante un caso especial de un Movimiento Armónico Simple. Cada elemento del medio oscila con la misma frecuencia angular ω. Sin embargo la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento depende de la ubicación x del elemento en el medio.

La amplitud del movimiento armónico simple de un elemento del medio tiene un valor mínimo de cero cuando x satisface la condición $sen\ kx = 0$, es decir, cuando

$$kx = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$$

Ya que $k = 2\pi/\lambda$, estos valores para kx producen:

$$x = 0,\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda,\ \frac{3\lambda}{2},\ \ldots\ = \frac{n\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Posición de Nodos

Estos puntos que definimos con amplitud cero se llaman ***nodos.***

El elemento del medio con el mayor desplazamiento posible desde el equilibrio tiene una amplitud de 2A, que se define como la amplitud de la onda estacionaria. Las posiciones en el medio donde se presenta este desplazamiento máximo se llaman ***antinodos.***
Los antinodos se ubican en posiciones que satisfacen la condición $senkx = \pm 1$ de la coordenada x, es decir, cuando

$$kx = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots$$

Por lo tanto las posiciones de los antinodos se dan por:

$$x = \frac{\lambda}{4},\ \frac{3\lambda}{4},\ \frac{5\lambda}{4},\ \ldots\ = \frac{n\lambda}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Posición de Antinodos

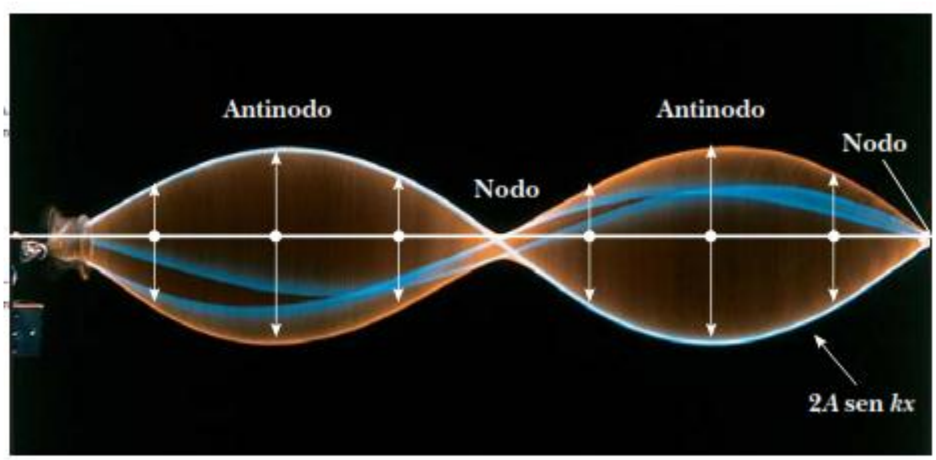


Fig.14. Fotografía múltiple de una Onda Estacionaria en una cuerda.

En la figura 14 se muestran dos nodos y dos antinodos en la onda estacionaria. La curva azul claro etiquetada $2A.sen\ kx$ en la figura representa una longitud de onda de las ondas progresivas que se combinan para formar la onda estacionaria. La ubicación de los nodos y antinodos quedaran definidas como se indica a continuación:

La distancia entre antinodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre nodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$.

<u>Ondas Estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos:</u>

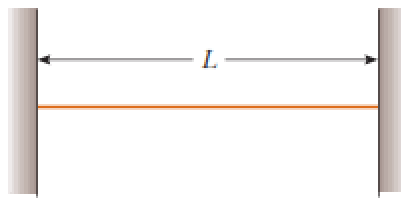


Fig.15. Una cuerda de longitud L fija en ambos extremos.

Considere una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, como se muestra en la figura 15. Este sistema se usará como modelo para una cuerda de guitarra o piano. En la cuerda se pueden establecer ondas estacionarias mediante una superposición continua de ondas incidentes y reflejadas desde los extremos. Podemos observar que hay una condición frontera para las ondas en la cuerda. Ya que los extremos de la cuerda están fijos, necesariamente tienen desplazamiento cero y, por ende, son nodos por definición. Esta condición frontera resulta en que la cuerda tenga un número de patrones de oscilación naturales discretos, llamados modos normales, cada uno con una frecuencia característica que se calcula con facilidad.

A continuación y debido al frecuente uso en el campo de la ingeniería, vamos presentar un análisis de un modelo de análisis llamado ***modelo de ondas bajo condiciones de frontera.***

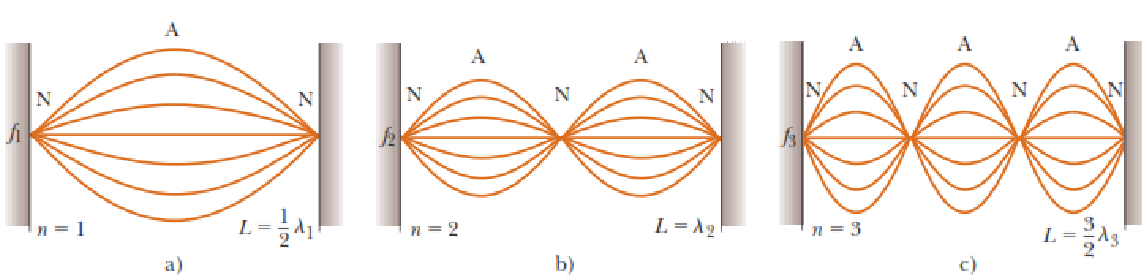


Fig.16. Modelo de Ondas bajo Condiciones de Frontera.

Los modos de oscilación normales para la cuerda de la figura 15 se describen al imponer las condiciones de frontera que los extremos sean nodos y que los nodos y antinodos estén separados por un cuarto de longitud de onda.

El primer modo normal (fig.16.a) se presenta cuando la longitud de onda λ_1 es igual al doble de la longitud de la cuerda, o λ_1 =2L. La sección de una onda estacionaria de un nodo al siguiente se llama *bucle.*
En el segundo modo normal (fig.16.b) la cuerda vibra en *dos bucles*. En este caso, la longitud de onda λ_2 =L.
El tercer modo normal fig.16.c) corresponde al caso en que λ_3 =2/3L y la cuerda vibra en *tres bucles.*

En general, las longitudes de onda de los diferentes modos normales para una cuerda de longitud L fija en ambos extremos son:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Donde el índice ***n*** se refiere al ***n***–ésimo modo normal de oscilación. Estos nodos son los modos ***posibles*** de oscilación de la cuerda.

Las frecuencias naturales asociadas con los modos de oscilación se obtienen de la relación $f = v/\lambda$ donde la rapidez de onda v es la misma para todas las frecuencias. Al usar la ecuación anterior para λ_n podemos encontrar las frecuencias naturales f_n de los modos normales.

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Estas son las *frecuencias cuantizadas* asociadas a la cuerda que oscila fija en sus extremos.
Sabiendo que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ para ondas en una cuerda, donde T es la tensión en la cuerda y μ la densidad de masa lineal, entonces también podemos expresar las frecuencias naturales de una cuerda tensa como:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La frecuencia más baja de todas f_1, que corresponde a $n = 1$, se llama ***fundamental*** o ***frecuencia fundamental*** y su expresión viene dada por:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Las frecuencias de los modos restantes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Las frecuencias de los modos normales que exhiben una correspondencia de múltiplo entero como ésta forman una ***serie armónica***, y los modos normales se llaman ***armónicos.***

La frecuencia fundamental f_1 es la frecuencia del primer armónico, la frecuencia $f_2 = 2f_1$ es la frecuencia del segundo armónico y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia del *n*–ésimo armónico.