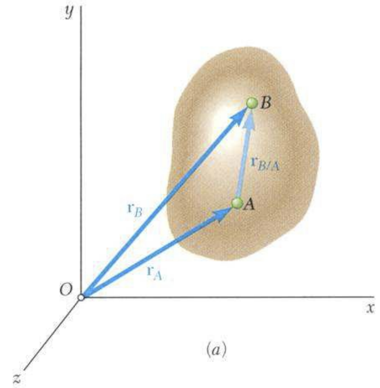
CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

MODELO DE CUERPO RIGIDO

Un cuerpo rígido es un sistema de puntos materiales cuyas distancias mutuas permanecen constantes por más grandes que sean las fuerzas que actúen sobre él. Esto determina la condición de rigidez que matemáticamente podemos expresar del siguiente modo:



$$|\vec{r}_i - \vec{r}_k| = d_{ik} = \text{cte}$$

Si empleamos letras para indicar las posiciones de cada partícula, esta condición se expresa

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d_{AB} = \text{cte}$$

Es decir, ninguna fuerza que "actúe" sobre el cuerpo rígido será capaz de modificar la distancia que guarda cada una de las partículas que componen al sólido con todas las demás. Esta es su característica distintiva.

Elevando al cuadrado:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_k) = d_{ik}^2 = \text{cte}$$

y derivando esta expresión respecto al tiempo obtenemos la condición sobre las velocidades.

$$0 = 2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_k}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_k) = 2\,(\vec{v}_i - \vec{v}_k) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

Esta es la **condición cinemática de rigidez**, que podemos escribir

$$\vec{v}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_k) = \vec{v}_k \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

o, empleando letras, para cada par de puntos del sólido

$$\vec{v}^A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v}^B \cdot \overrightarrow{AB}$$

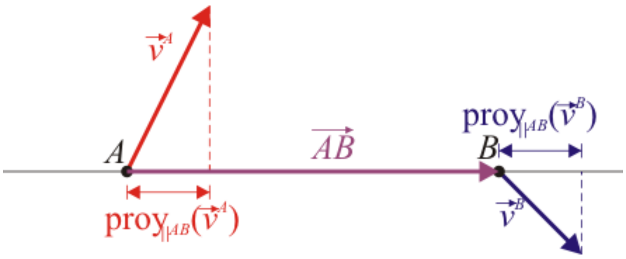
Dividiendo por la distancia entre las partículas A y B

$$\vec{v}^A \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \vec{v}^B \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

siendo cada miembro la proyección de la velocidad en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$

$$\text{proy}_{\|\overrightarrow{AB}}(\vec{v}^A) = \text{proy}_{\|\overrightarrow{AB}}(\vec{v}^B)$$

La condición cinemática de rigidez implica que, dadas dos partículas, A y B, la proyección de sus respectivas velocidades sobre la recta que las une es la misma.



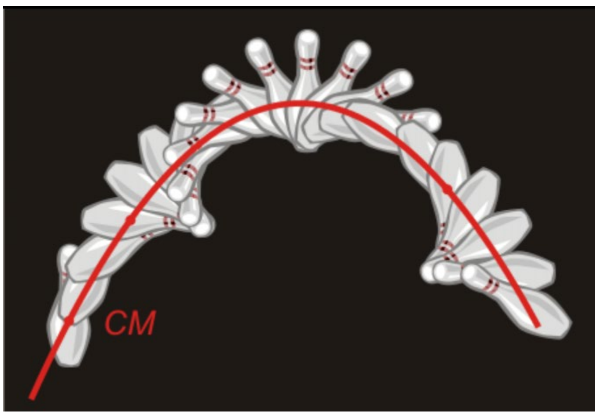
El que las dos proyecciones sean iguales quiere decir que la componente de las velocidades en esa dirección es la misma; las dos partículas avanzan o retroceden a lo largo de esa línea en igual medida, manteniendo su distancia relativa

Un cuerpo así solo existe en condiciones ideales, por eso se trata de un modelo, pero en muchos casos es posible aproximar el comportamiento de un cuerpo solido al de un cuerpo idealmente rígido ya que las deformaciones que sufre el objeto en su movimiento son muy pequeñas y a fines prácticos despreciables.

La condición de rigidez impone limitaciones a las posibles distribuciones de velocidades. Solo aquellos movimientos que preservan las distancias entre los puntos son admisibles. Estos movimientos posibles se conocen como *movimientos rígidos*.

En general, el movimiento de un sólido rígido puede ser muy complejo; sin embargo, haciendo oportunas descomposiciones, puede ser analizado por partes, lo que nos permitirá simplificar el problema.

En la siguiente animación se ha representado el movimiento de un bolo lanzado al aire:



El bolo durante su vuelo describe un movimiento complejo, en el que gira y al mismo tiempo va desplazándose hacia la derecha. Como el sólido es un sistema de partículas, podemos calcular la aceleración de su centro de masas utilizando la segunda ley de Newton. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre él (despreciando el rozamiento) son los pesos de las partículas que lo constituyen y, por tanto, la aceleración de su centro de masas viene dada por:

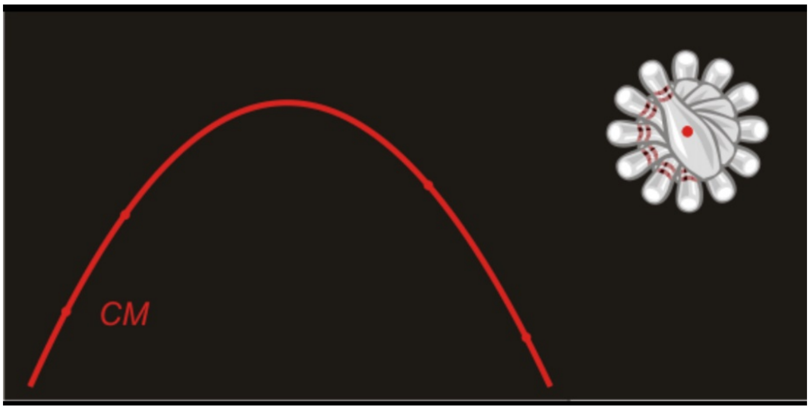
$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum \vec{F}_{ext} = \frac{1}{M}\sum m_i\,\vec{g} = \vec{g}$$

Es decir, el centro de masas del bolo se mueve como un punto de masa igual a la masa total del sistema lanzada al aire. Por tanto, describe un movimiento parabólico.

Utilizando la segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas podemos describir el movimiento de traslación del centro de masas de un sólido rígido.

Sin embargo, en la animación se observa que, además del movimiento de traslación de su centro de masas, el bolo describe una serie de giros. La segunda ley de Newton es válida únicamente para describir movimientos de traslación, por lo que debemos encontrar otra ecuación que nos permita analizar la parte rotacional del movimiento.

Si observamos el sólido **desde un sistema de referencia situado en su centro de masas** (parte superior derecha de la figura):



vemos que su movimiento es únicamente de rotación.

El movimiento del bolo se puede estudiar como la composición del movimiento de traslación de su centro de masas con respecto al origen del sistema de referencia y la rotación con respecto a un eje que pasa por el centro de masas.

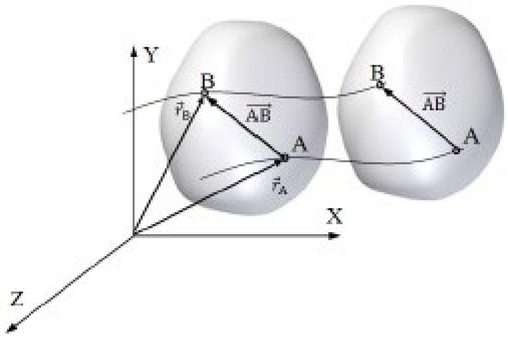
CLASIFICACION DEL MOVIMIENTO DE LOS SOLIDOS RIGIDOS

MOVIMIENTO DE TRASLACION PURA

Un sólido rígido experimenta un movimiento de traslación cuando cualquier recta PQ que une dos puntos cualesquiera del cuerpo mantiene su dirección durante el movimiento.

Entonces se cumple que:

> **Cualquier punto del sólido rígido recorre trayectorias idénticas con la misma velocidad y aceleración y en consecuencia se puede hablar de una única velocidad o aceleración para el sólido rígido.**



Si se toman dos partículas A y B cualesquiera pertenecientes al sólido rígido, sus vectores posición se relacionan:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

Derivando la expresión anterior respecto del tiempo tenemos:

$$\frac{\overrightarrow{dr_B}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr_A}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dAB}}{dt}$$

Durante la traslación el vector $\overrightarrow{AB}$ permanece constante, en modulo (ya la distancia entre dos puntos pertenecientes a un sólido rígido es invariable) y en dirección (pues en la traslación pura cualquier recta perteneciente a un sólido rígido mantiene su dirección en el movimiento); por lo que su derivada es nula:

$$\frac{\overrightarrow{dAB}}{dt} = 0$$

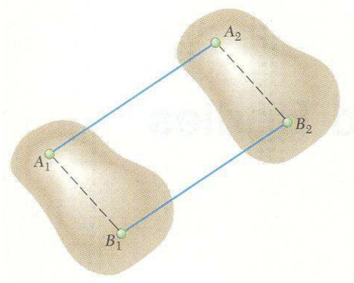
Sustituyendo en la derivada y derivando de nuevo:

$$\frac{\overrightarrow{dr_B}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr_A}}{dt} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

$$\frac{\overrightarrow{dv_B}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dv_A}}{dt} \rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

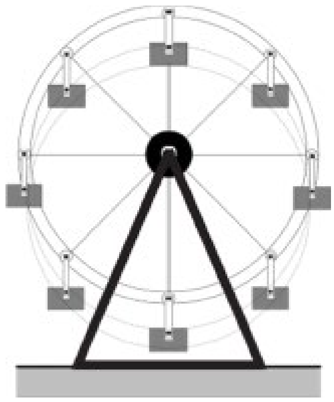
Todos los puntos del sólido rígido tienen la misma velocidad y aceleración para un instante determinado. Por esta razón, en el caso de la traslación pura cuando se puede hablar de velocidad o aceleración del sólido rígido.

La traslación puede ser rectilínea o curvilínea.



Traslación rectilínea: todos los puntos del sólido recorren trayectorias rectas y paralelas entre si.

Traslación curvilínea: las trayectorias recorridas por los distintos puntos del cuerpo son curvas. En la Figura la estructura circular de la rueda tiene rotación pura pero los carritos, despreciando los pequeños balanceos, tienen un movimiento de traslación circular.



Los puntos A y B describen circunferencias iguales con sus centros desplazados, los puntos tienen velocidades y aceleraciones iguales y la posición del carrito es siempre horizontal (cualquier recta contenida en el cuerpo mantiene su dirección en el movimiento).

MOVIMIENTO DE ROTACION PURA O ROTACION ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

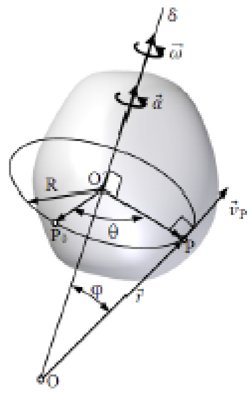
Se dice que un sólido tiene un movimiento de rotación pura cuando gira alrededor de un eje fijo

> **Todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran alineados en una recta perpendicular a cada una de las trayectorias denominada eje de rotación. Los puntos situados sobre el eje de rotación tienen velocidad nula.**

Para estudiar este tipo de movimiento vamos a comenzar representando un sólido rígido rotando alrededor del eje fijo δ, y definiendo las magnitudes vectoriales $\vec{w}$ y $\vec{\alpha}$, es decir la velocidad y aceleración angular del sólido.

Puesto que el sólido gira, su orientación cambia, y por lo tanto es necesario un parámetro que indique que tan rápido gira, es decir un parámetro que exprese el ángulo girado por unidad de tiempo.

Siendo θ el ángulo que gira el sólido en torno a su eje, pueden definirse la velocidad angular $\vec{w}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$:

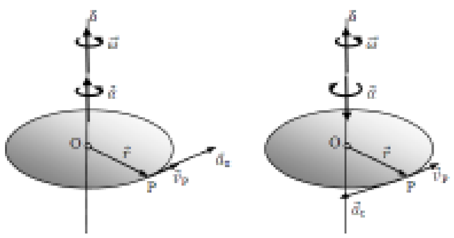


$\vec{w}$: Velocidad angular del sólido rígido:

- Módulo: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- Dirección: perpendicular a la circunferencia trayectoria, pasando por su centro; coincide con la dirección del eje de rotación.
- Sentido: el del avance del sacacorchos al girar en el sentido del movimiento.
- Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación, ya que es un vector deslizante.

$\vec{\alpha}$: Aceleración angular del sólido rígido:

- Módulo: $\alpha = \frac{dw}{dt}$
- Dirección: perpendicular a la circunferencia trayectoria, pasando por su centro; coincide con la dirección del eje de rotación
- Sentido: cuando $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{w}$ el sólido gira cada vez rápido; si $\vec{\alpha}$ tiene sentido opuesto a $\vec{w}$; el sólido está frenando (ver figura)



- Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación, ya que es un vector deslizante.

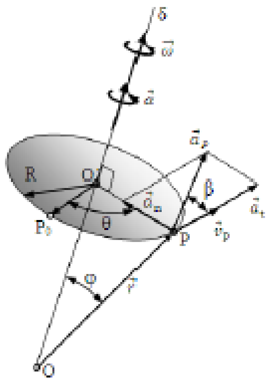
En este punto resulta interesante insistir en un par de ideas en torno a las dos magnitudes vectoriales definidas:

- Se puede hablar de una velocidad angular $\vec{w}$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ que definen el movimiento de rotación pura del sólido rígido.
- $\vec{w}$ y $\vec{\alpha}$ también caracterizan los movimientos circulares de cada uno de los puntos pertenecientes al sólido rígido. Así, podremos calcular la velocidad y la aceleración lineales de

un punto cualquiera del sólido rígido considerando su movimiento circular en un plano perpendicular al eje de rotación.

Aclaración: $\vec{w}$ y $\vec{\alpha}$ tienen la misma dirección por tratarse de una rotación alrededor de un eje fijo, el cual es un movimiento particular. Se verá más adelante que en el caso del movimiento general $\vec{w}$ y $\vec{\alpha}$ pueden tener direcciones diferentes.

Supongamos que a continuación desean conocerse la velocidad y aceleración lineales de un punto cualquiera P del sólido que rota con una velocidad angular $\vec{w}$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ alrededor de un eje fijo δ.



En la Figura se han representado el eje de rotación y la trayectoria de un punto. Puede observarse, que el eje de rotación δ pasa por un punto O conocido y que el punto P describe una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje δ y con su centro O´ en dicho eje.

Para calcular **la velocidad del punto P** se parte de la expresión de la velocidad instantánea obtenida anteriormente:

$$\overrightarrow{v_P} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}.\overrightarrow{u_t}$$

- Módulo: Se sabe que ds = $Rd\theta$ y en la Figura se observa R = $rsen\varphi$, por lo que:

$$v_p = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R.w = rsen\varphi.w$$

- Dirección: $\overrightarrow{u_t}$ tangente a la trayectoria, es decir, tangente a la circunferencia
- Sentido: el del movimiento
- Aplicada en el punto P

Por último, puede verse que el vector $\vec{v}$ es el producto vectorial de la velocidad angular del sólido y el vector de posición del punto P respecto de cualquier punto que pertenezca al eje de rotación:

$$\overrightarrow{v_P} = \vec{w}x\vec{r}$$

Para calcular **la aceleración del punto P** se deriva la velocidad respecto del tiempo. La expresión obtenida puede descomponerse en las denominadas componentes intrínsecas de la aceleración: la aceleración tangencial y la aceleración normal.

$$\vec{a_p} = \frac{\overrightarrow{dv_P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{w}x\vec{r}) = \frac{\overrightarrow{dw}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

La aceleración tangencial: $\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

- Módulo: $a_t = \alpha \cdot rsen\varphi = R \cdot \alpha$
- Dirección: tangente a la circunferencia trayectoria en el punto P
- Sentido: el que origina α
- Aplicada en el punto P

La aceleración normal: $\vec{a}_n = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \vec{w}x\vec{v_p}$

- Módulo: $a_n = \omega \cdot v_P \cdot sen90° = \omega \cdot R \cdot \omega = \omega^2 \cdot R$
- Dirección: Normal a la trayectoria
- Sentido: hacia el centro de la circunferencia descrita por el punto P
- Aplicada en el punto P

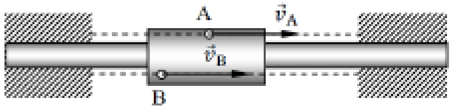
Por último, pueden calcularse el módulo de la aceleración y el ángulo β que forma la aceleración con la tangente:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2.\alpha^2 + R^2.w^4} = R.\sqrt{\alpha^2 + w^4}$$

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t}$$

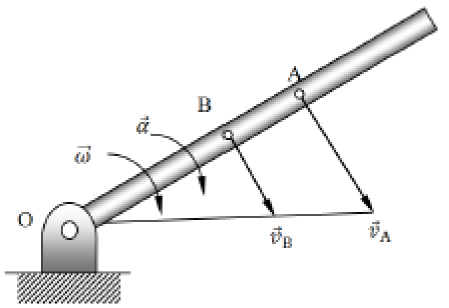
MOVIMIENTO GENERAL DE UN SOLIDO RIGIDO: MOVIMIENTO ROTOTRASLATORIO

Hasta el momento se han definido la traslación y la rotación pura como movimientos elementales del sólido rígido. Recordemos que en el caso de la traslación todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración y por lo tanto pueden definirse una $\vec{v}$ y una $\vec{a}$ para el sólido.



$$\vec{v}_B = \vec{v_A}$$

En el caso de la rotación pueden definirse una $\vec{w}$ y $\vec{\alpha}$, que son las que producen el cambio de orientación del sólido en el espacio.

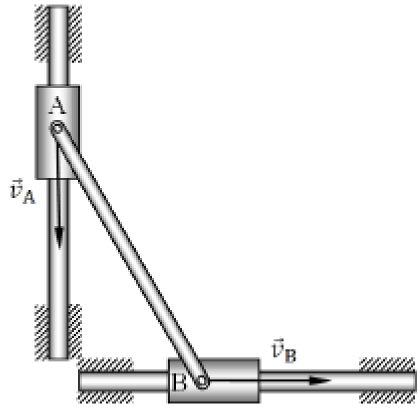


$\vec{v}_B \neq \vec{v_A}$

$\vec{v_B} = \vec{w} x \overrightarrow{OB}$

$\vec{v_A} = \vec{w} x \overrightarrow{OA}$

En el ejemplo de la Figura, la barra AB no tiene un movimiento de traslación ya que es evidente que los puntos A y B no tienen la misma velocidad y que la barra cambia de orientación en el movimiento. Sin embargo, tampoco se mueve con rotación pura ya que los puntos A y B no describen trayectorias circulares con eje común, por tanto puede deducirse que su movimiento es general.



El movimiento general un sólido rígido consiste en una traslación y una rotación simultáneas y por lo tanto puede expresarse en cada instante como la superposición de una traslación de un punto de referencia arbitrario y una rotación alrededor del eje que pasa por dicho punto de referencia.

La velocidad de cada punto del cuerpo rígido será, de acuerdo con la superposición de movimientos independientes:

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{w} \times \vec{r}$$

Esta es la expresión del campo de velocidades para un movimiento rototraslatorio, puede observarse que la velocidad de traslación $\vec{v_0}$ es la velocidad de los puntos del eje de rotación.

Este estado mas general de movimiento de un cuerpo rígido esta definido por los vectores $\vec{v_0}\ y\ \vec{w}$, conocidos los cuales, el movimiento queda íntegramente determinado.

Puede demostrarse que el campo de velocidades cumple la condición de rigidez

Si para todo $\vec{r}$ se cumple

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

entonces, para dos puntos cualesquiera se verifica

$$\vec{v}(\vec{r}_2) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_2$$

$$\vec{v}(\vec{r}_1) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_2$$

Restando

$$\vec{v}(\vec{r}_2) - \vec{v}(\vec{r}_1) = \vec{\omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

El segundo miembro es ortogonal a $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, por lo que

$$(\vec{v}(\vec{r}_2) - \vec{v}(\vec{r}_1)) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$

y separando los términos

$$\vec{v}(\vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{v}(\vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

esto es, el campo de velocidades cumple la condición de rigidez

También puede observarse que todos los puntos que están sobre una recta paralela al eje de rotación (paralela a $\vec{w}$) tienen la misma velocidad.

Si P y Q son dos puntos sobre una recta paralela a $\vec{w}$

$$\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{\omega} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_Q} = \overrightarrow{v_0} + \vec{w} \times \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{v_0} + \vec{w} \times \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{v_0} + \vec{w} \times \left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{v_P}$$

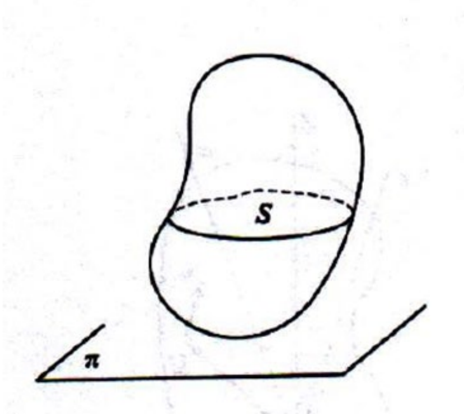
Dado que el centro de masa es un punto notable del cuerpo rígido, es muy útil tomarlo como punto de referencia del movimiento del rígido. De manera que la velocidad de cualquier otro punto del cuerpo la podemos escribir como:

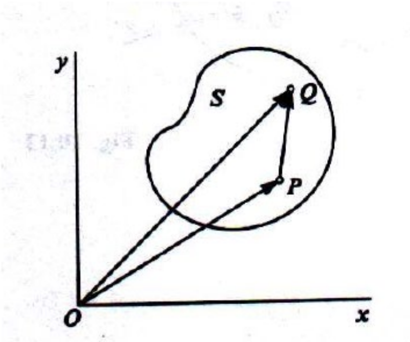
$$\vec{v} = \overrightarrow{v_{CM}} + \vec{w} \times \vec{r}$$

Donde $\vec{r}$ es la posición del punto respecto al centro de masa

MOVIMIENTO PLANO

Un sólido rígido realiza un movimiento plano cuando las trayectorias de sus puntos y sus velocidades son en todo instante paralelas a un plano fijo π tal y como se indica en la figura. En este caso particular, la posición del sólido y el movimiento que describe en cada instante estará determinado estudiando simplemente una sección del sólido por un plano paralelo al plano π considerado



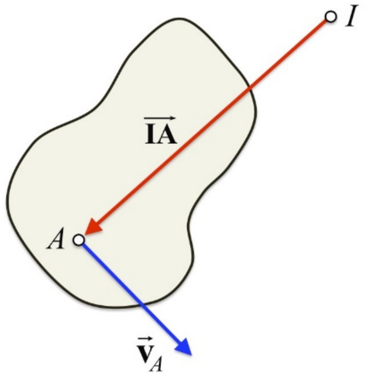


Vamos a suponer la sección plana escogida como representativa del sólido situada en el plano coordenado XY.

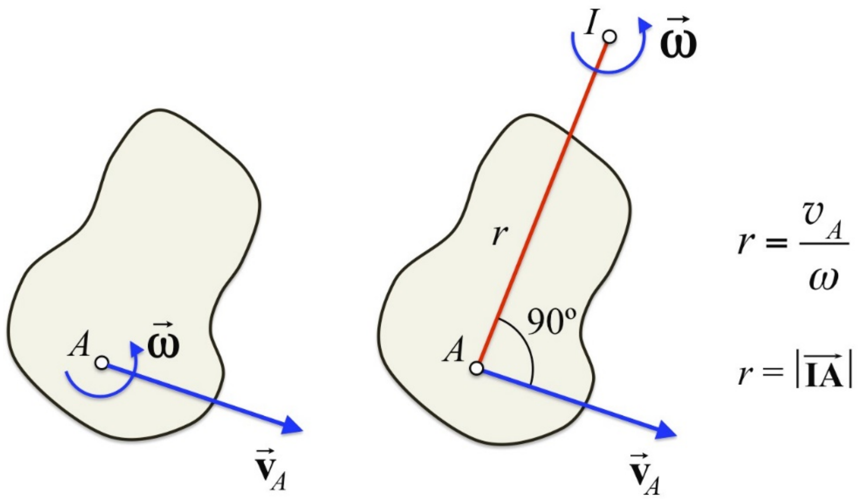
En el movimiento plano general de un sólido rígido no hay ningún punto que se halle siempre en reposo. Sin embargo, en cada instante, es siempre posible hallar un punto del cuerpo (o de su extensión) que tenga velocidad nula. Este punto recibe el nombre de centro instantáneo de rotación (CIR).

El centro instantáneo de rotación (CIR) no es un punto fijo. Si en un instante determinado el punto *I* es el centro instantáneo de rotación, entonces su velocidad es nula, de manera que:

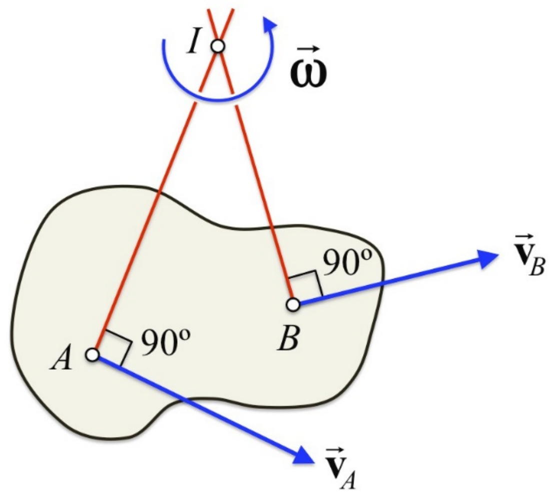
$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_I} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IA} \Rightarrow \overrightarrow{v_A} \perp \overrightarrow{IA}$$



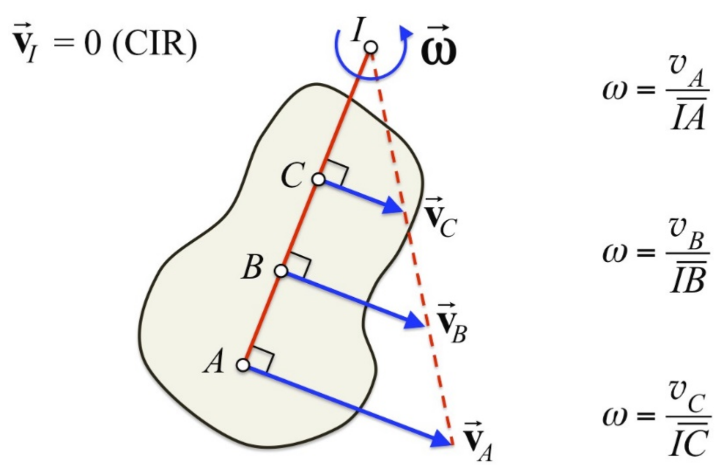
Por tanto, la recta que une el CIR con un punto cualquiera A del sólido es perpendicular a la velocidad de dicho punto.



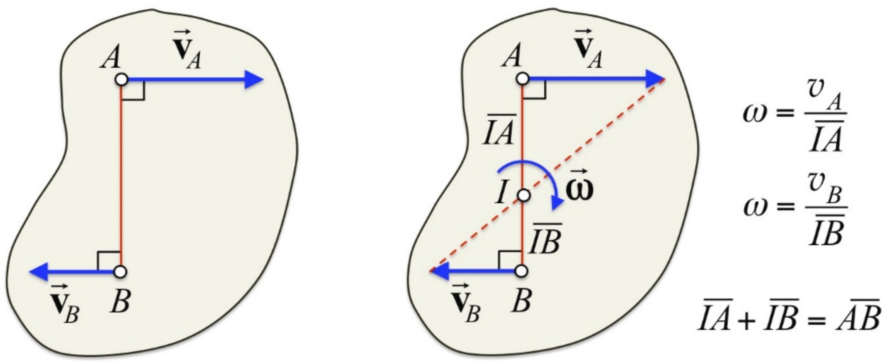
Si conocemos las velocidades de dos puntos del sólido A Y B, el CIR estará en la intersección de sus rectas perpendiculares a $\overrightarrow{v_A}\, y\, \overrightarrow{v_B}$ en *A* y *B*.

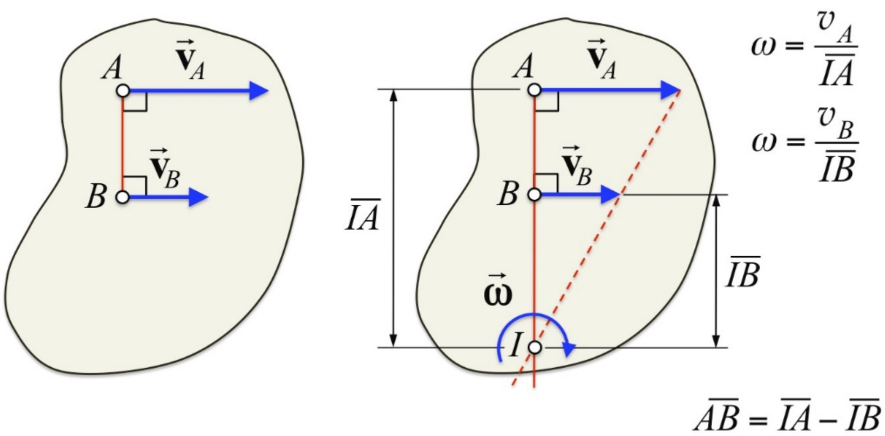


En todos los puntos del sólido que pertenecen a la recta que une el centro instantáneo de rotación *I* con el punto *A*, las velocidades son perpendiculares al vector IA:

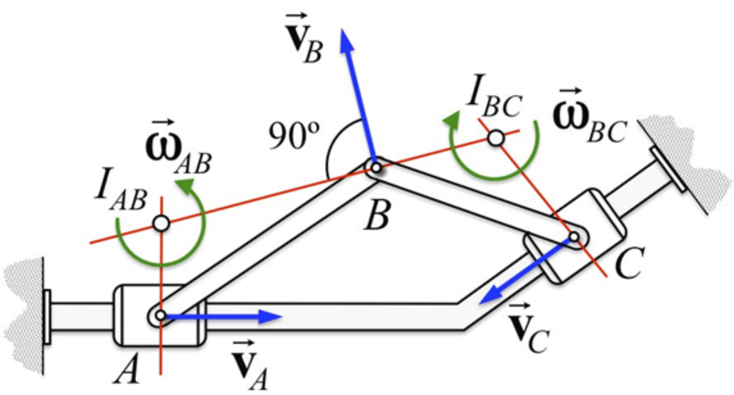


Consideremos dos puntos del sólido A y B cuyas velocidades, $\overrightarrow{v_A}\, y\, \overrightarrow{v_B}$, respectivamente, son conocidas y que el punto I es el CIR. Si las velocidades a $\overrightarrow{v_A}\, y\, \overrightarrow{v_B}$ son paralelas, el CIR se encuentra en la recta que une los puntos A y B.

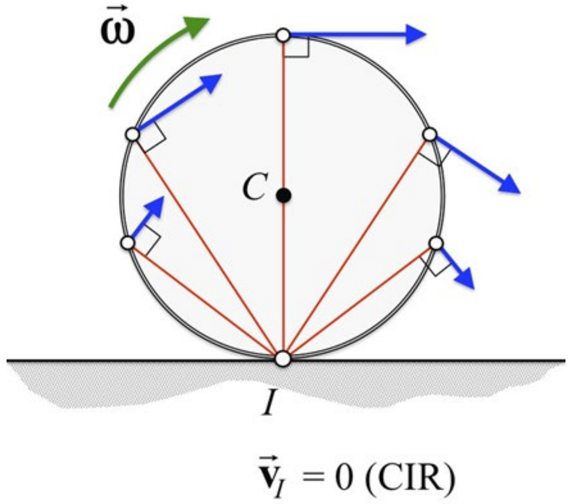




Cuando dos o más cuerpos están unidos por un pasador, se puede hallar un CIR para cada cuerpo. Como la velocidad del punto que une los dos cuerpos es la misma para cada uno de ellos, los CIR de uno y otro deberán estar sobre la recta que pase por el punto común de ambos cuerpos.



El CIR de una rueda que gira sobre una superficie se encuentra en el punto de contacto de la rueda con la superficie.



La velocidad de un punto en el sólido siempre es perpendicular al vector de posición relativa dirigido desde el CIR hacia el punto.

El lugar geométrico de los puntos que definen la ubicación del CIR durante el movimiento del sólido se llama centroda y, por tanto, cada punto de la centroda actúa como el CIR del sólido sólo por un instante.