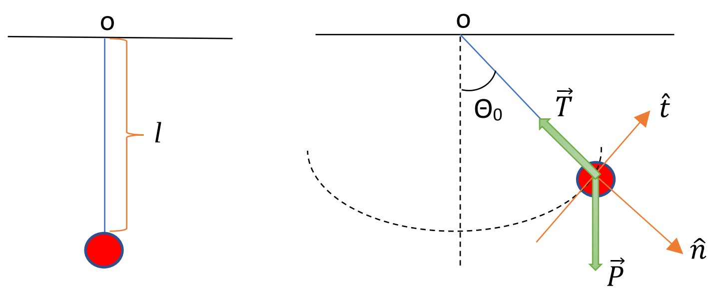
PÉNDULO

El péndulo es una forma de movimiento oscilatorio, si las oscilaciones son pequeñas el péndulo realizará un movimiento Armónico Simple.

PÉNDULO SIMPLE:

Un péndulo simple consta de un cuerpo puntual de masa $\boldsymbol{m}$ suspendido de un punto "**o**" por medio de una cuerda inextensible de longitud $\boldsymbol{l}$ y masa despreciable.

Inicialmente el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio (fig a) y se lo separa de su posición de equilibrio (fig b) una longitud ds pero relacionamos la longitud de arco con el ángulo Θ_0.



a) Posición de Equilibrio

b) Posición inicial de la oscilación

Como el péndulo va a realizar una oscilación circular, es conveniente trabajar con posición angular (θ), velocidad angular $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ y aceleración angular $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$.

De la figura b, se observa que sobre el cuerpo actúan solamente la fuerza Tensión y la fuerza Peso, en la dirección tangencial ($\hat{t}$) la fuerza neta aplicada es la componente de la fuerza Peso en esa dirección, que es la fuerza restauradora que produce el movimiento oscilatorio.

La ecuación de Newton en esa dirección queda de la siguiente manera:

$$-Psen(\theta) = ma_t \qquad (1)$$

Recordando el apunte de movimiento circular, la aceleración tangencial y la aceleración angular están relacionadas por $a_t = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ y reemplazando en la ecuación de Newton

$$-mgsen(\theta) = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Simplificando la masa y tomando pequeñas oscilaciones $sen(\theta) \approx \theta$

$$-g\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-\frac{g}{l}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2)$$

En la ec (2) vemos que la aceleración es lineal con la posición y de signo opuesto, condición que indica que el movimiento realizado por el cuerpo es un MAS (recordar apunte de movimiento oscilatorio)

Si llamamos $\omega^2 = \frac{g}{l}$ se puede reescribir a la ec (2) como :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad (3)$$

Siendo la ec (3) la ecuación diferencial de segundo orden que representa la ecuación de un movimiento oscilatorio armónico simple cuya solución es

$$\theta_{(t)} = \theta_0 sen(\omega^2 t + \varphi) \qquad (4)$$

Siendo

$$\theta_0 : la\ amplitud\ de\ la\ oscilación$$

$$\varphi : la\ fase\ inicial$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} : la\ pulsación\ o\ frecuencia\ propia\ del\ sistema$$

El período (T) del movimiento es

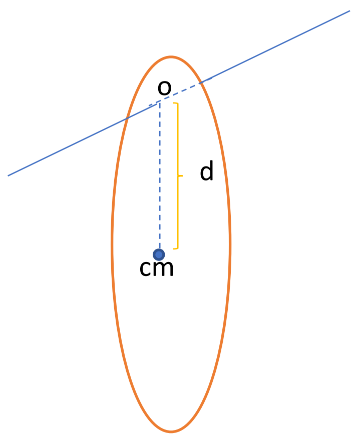
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (5)$$

La ec (5) indica que el período de la oscilación depende solamente de la longitud $\boldsymbol{l}$ de la cuerda y, además, la frecuencia y el período son independientes de la amplitud de la oscilación, una característica del MAS.

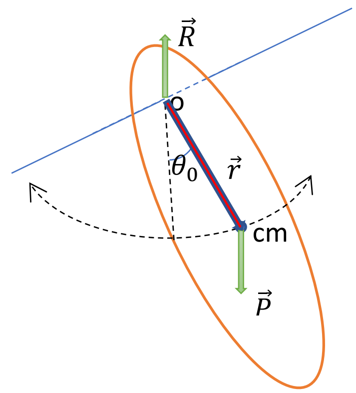
PÉNDULO FÍSICO :

Se define como péndulo físico a cualquier cuerpo rígido que pueda oscilar respecto de un eje fijo que no pasa por su centro de masa

Al apartarse al cuerpo rígido de su posición de equilibrio, comenzará a oscilar por la acción de su propio peso.



a) Posición de equilibrio



$\vec{R}: fuerza\ de\ reacción\ en\ o$

$\vec{r}: vector\ de\ o\ al\ cm$

$|\vec{r}|: d$

b) Posición inicial de la oscilación

Sobre el cuerpo rígido actúan dos fuerzas: la fuerza de reacción $(\vec{R})$ aplicada en el punto de sujeción "o" y la fuerza peso $(\vec{P})$ aplicada en el centro de masa.

El cuerpo oscila realizando su cm una trayectoria circular, de la ecuación dinámica para la rotación

$$\vec{M}^{o}_{Fext} = I^{o}\vec{\alpha} \qquad (6)$$

Respecto del punto o la única fuerza que realiza un momento externo sobre el cuerpo rígido es la fuerza peso y la ec (6) queda

$$-Pdsen(\theta) = I^{o}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para pequeñas oscilaciones $sen(\theta) \approx \theta$

$$-mgd\theta = I^{o}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-\frac{mgd}{I^{o}}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (7)$$

de la ec (7) se ve que la aceleración es proporcional a la posición pero de signo opuesto, el movimiento realizado por el cuerpo rígido será un MAS

llamando $\omega^2 = \frac{mgd}{I^{o}}$ la ec puede reescribirse como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad (8)$$

Que es la ecuación de movimiento de un MAS y tiene como solución

$$\theta_{(t)} = \theta_0 sen(\omega^2 t + \varphi) \qquad (9)$$

Siendo

$$\theta_0 \text{: } la\ amplitud\ de\ la\ oscilación$$

$$\varphi \text{ : } la\ fase\ inicial$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I^o}} \text{ : } la\ pulsación\ o\ frecuencia\ propia\ del\ sistema$$

El período de la oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I^o}{mgd}} \qquad (10)$$

Para el cuerpo rígido el período y la frecuencia dependen del momento de inercia (la forma del cuerpo) y del punto “o” respecto al cuál se haga oscilar el sólido.