Unidad 4: Dinámica y teoremas de conservación de la dinámica.

Ing. Nahuel Castello

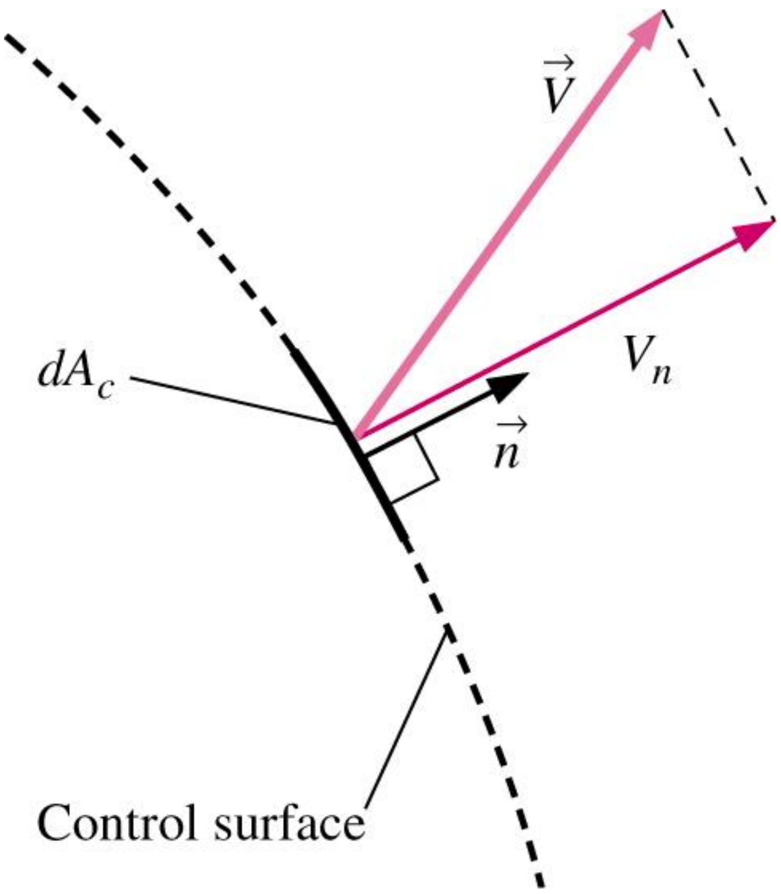
Mecánica de los fluidos - Departamento de Ingenieria Industrial
Universidad Tecnológica Nacional FRH

2017

Contenido de La Unidad

- Ecuación de continuidad (Modelos de Euler y de Lagrange)
- Deducción de la Ecuación de Bernoulli para flujo estacionario incompresible
- Equilibrio de fuerzas en traslación
- Teorema de conservación de la cantidad de movimiento
- Ecuación de Cauchy
- Ecuaciones Indefinidas
- Ecuación de Euler
- Equilibrio de momentos en rotación
- Ecuaciones de Navier Stokes
- Ecuaciones de Lamé para fluidos Newtonianos
- Ecuación de Euler y de la estática
- Integración y sistema de Bernoulli para flujo compresible
- Casos particulares del sistema de Bernoulli
- Diagrama Piezométrico
- Corrientes relativas (Bomba centrífuga)

Ecuación de Continuidad



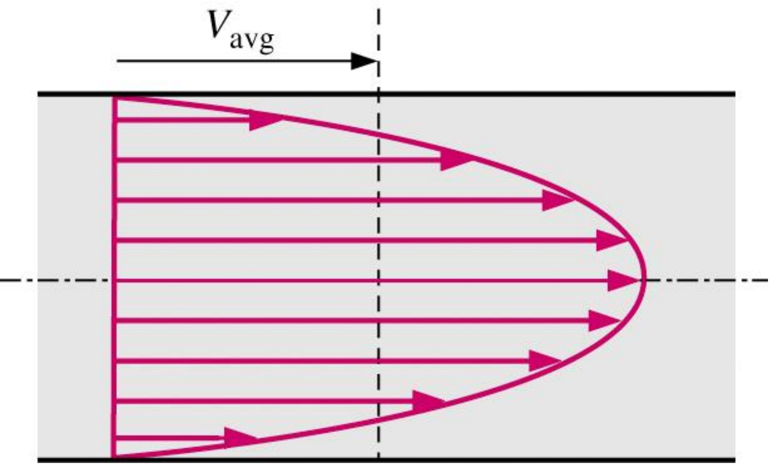
- La cantidad de masa de fluido que fluye por una determinada superficie por unidad de tiempo se conoce como Caudal Másico, y se nombra como $\dot{m}$
- El punto sobre la m se utiliza para indicar que corresponde a la masa por unidad de tiempo.
- El caudal másico a través de un área es obtenido mediante la siguiente integración:

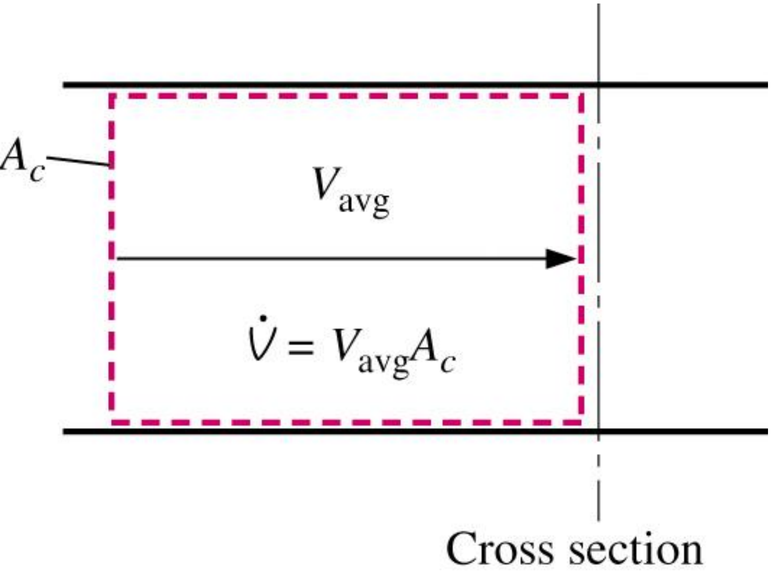
$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta m = \int_{A_c} \rho V_n dA_c$$

$$\dot{m}$$

- Aunque esta expresión es exacta, no siempre es conveniente para análisis de Ingenieria.

Ecuación de Continuidad





- La integral puede reemplazarse en muchos flujos por la siguiente expresión haciendo uso de la velocidad y densidad promedio.

$$V_{avg} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} V_n \, dA_c$$

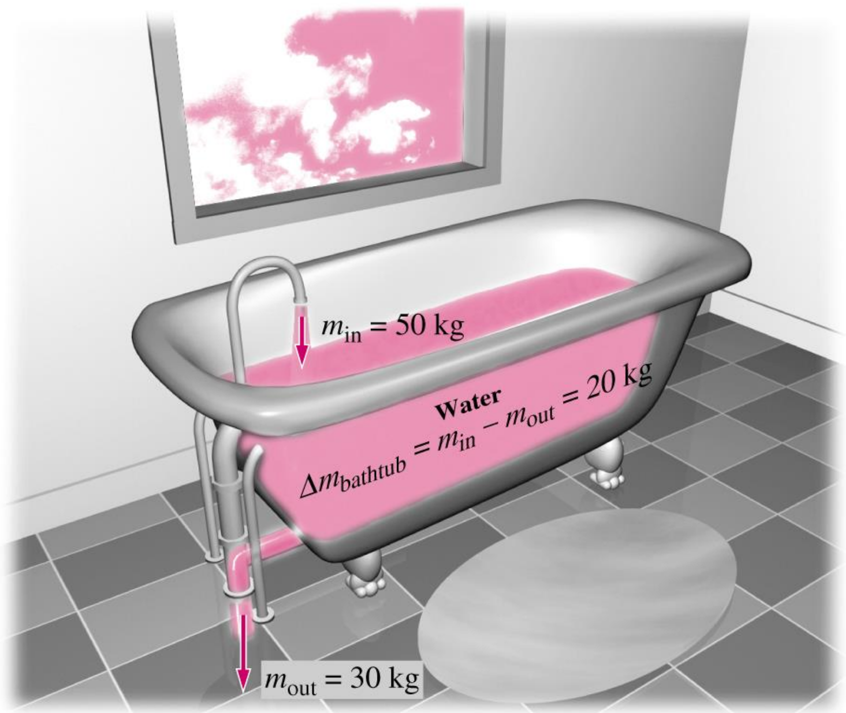
$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c$$

- El caudal volumétrico, $\dot{V}$, se define como:

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n \, dA_c = V_{avg} A_c = V A_c$$

- Nota: Muchas veces Q es utilizado para denotar al caudal volumétrico.
- El caudal másico y volumétrico están relacionados por la siguiente expresión: $\dot{m} = \rho \dot{V}$

Ecuación de Continuidad

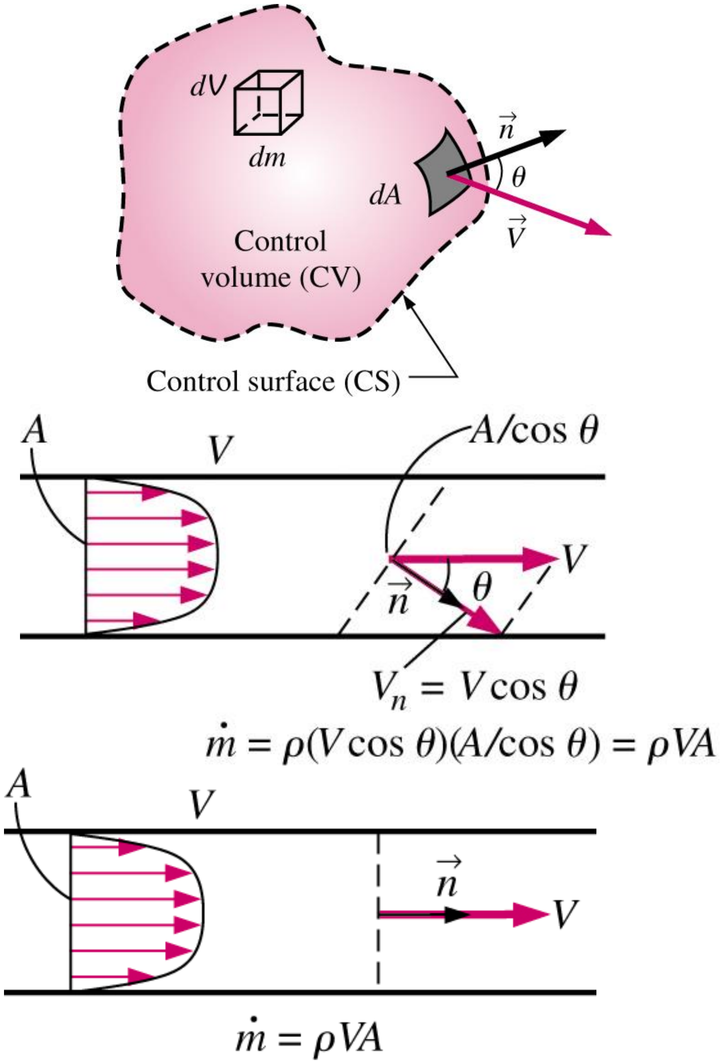


- El Principio de **Conservación de la Masa** puede expresarse como:

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{dm_{CV}}{dt}$$

- Donde $\dot{m}_{in}$ y $\dot{m}_{out}$ son el caudal másico entrante y saliente en el volumen de control, y dm_{CV}/dt es la relación de cambio de masa dentro del volumen de control.

Ecuación de Continuidad



- Para un volumen de control, CV, de forma arbitraria.
  - La tasa de cambio de masa dentro del VC es:

$$\frac{dm_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \, d\mathcal{V}$$

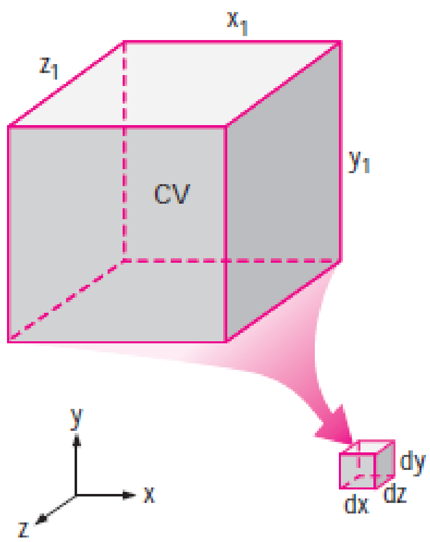
  - El flujo neto de masa a través del VC es:

$$\dot{m}_{net} = \int_{CS} \delta \dot{m} = \int_{CS} \rho V_n dA = \int_{CS} \rho\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) dA$$

- Entonces la expresión general de P.C.M esta dada por:

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) dA = 0$$

Ecuación de Continuidad



Análisis Diferencial a través del uso de un volumen de control de tamaño infinitesimal

$$0 = \int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

Teorema de la Divergencia (T. Gauss)

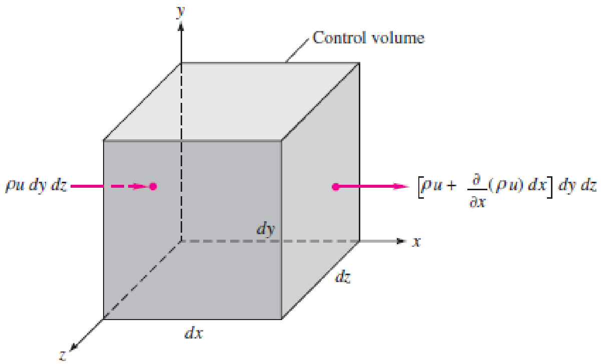
$$\int_{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{G}\, dV = \oint_{A} \vec{G} \cdot \vec{n}\, dA \qquad 0 = \int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \int_{CV} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) dV$$

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right)\right] dV = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0}$$

Ecuación de continuidad en coordenadas Eulerianas

Ecuación de Continuidad



Face	Inlet mass flow	Outlet mass flow
x	$\rho u \, dy \, dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\, dx\right] dy \, dz$
y	$\rho v \, dx \, dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\, dy\right] dx \, dz$
z	$\rho w \, dx \, dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\, dz\right] dx \, dy$

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{out} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{in} = 0$$

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz$$

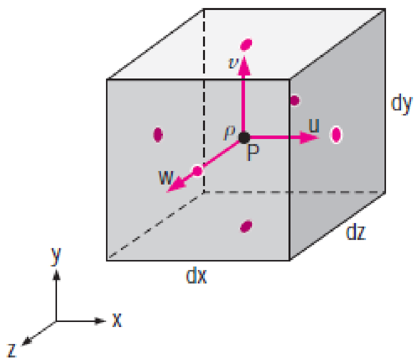
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \, dx \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \, dx \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas Eulerianas

Ecuación de Continuidad



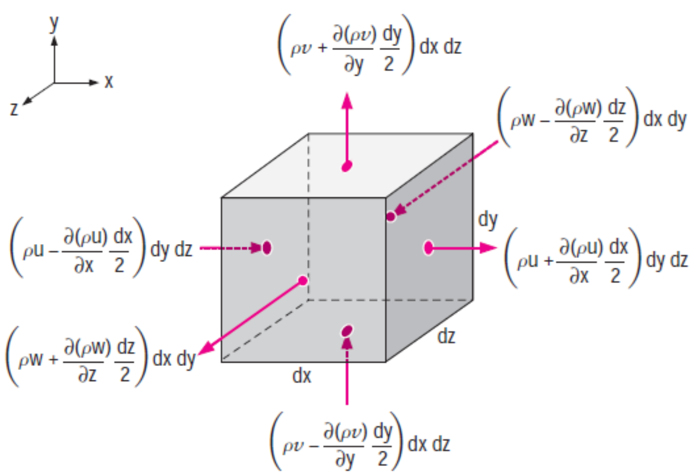
Nota: En el centro del elemento cubico asumo que el punto P tienen la densidad **ρ**. Para determinar cuanto vale la densidad en el centro de la cara izquierda y derecha usamos una expansión en **serie de Taylor**.

$$(\rho u)_{\text{center of right face}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots$$

$$\int_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV = \sum_{\text{in}}\dot{m} - \sum_{\text{out}}\dot{m}$$

$$\sum_{\text{in}}\dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz}_{\text{left face}} + \underbrace{\left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz}_{\text{bottom face}} + \underbrace{\left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy}_{\text{rear face}}$$

$$\sum_{\text{out}}\dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz}_{\text{right face}} + \underbrace{\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz}_{\text{top face}} + \underbrace{\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy}_{\text{front face}}$$



$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy\,dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dy\,dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dx\,dy\,dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas Eulerianas

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas Eulerianas

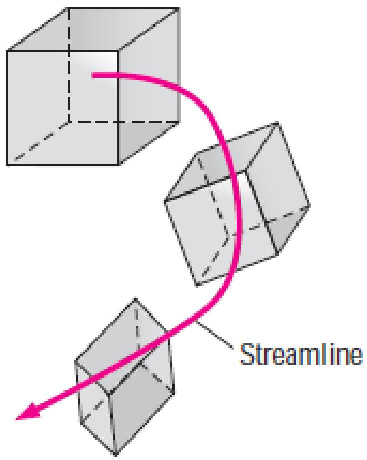
Se observa que si $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ el flujo es incompresible ya que esto implica que el caudal másico entrante es igual al saliente, y la densidad no varia con respecto del tiempo dentro del volumen de control.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho}_{\text{Material derivative of } \rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

Sea el operador $\dfrac{D()}{Dt} = \dfrac{\partial ()}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla ()$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas Lagrangeanas

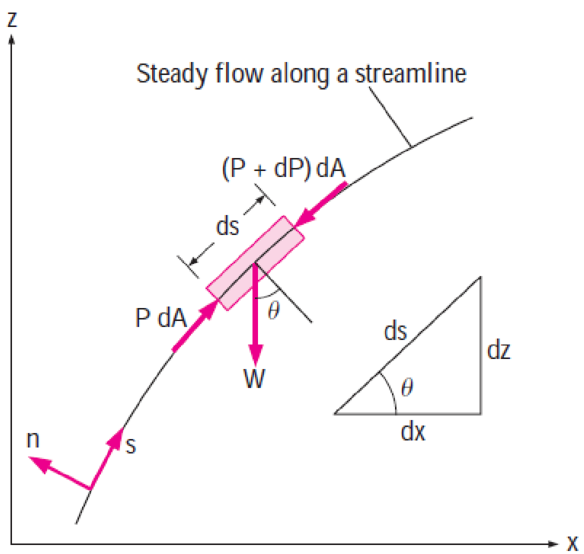


Elemento material moviéndose a través de una campo fluido. Su densidad cambia de acuerdo a la ecuación de continuidad.

Principio de Conservación de la Energía

Fuerza que actúa sobre una partícula de fluido a lo largo de una línea de corriente

$$\sum F = ma_s$$



Considerando el flujo estacionario, y las fuerzas actuantes sobre la partícula.

P dA – (P + dP) dA – W sin θ $= m \frac{DV}{Dt}$

P dA – (P + dP) dA – W sin θ = $m \frac{\partial V}{\partial t} + m\, V \cdot \nabla\, V$

P dA – (P + dP) dA – W sin θ = $m\, V \cdot \frac{dV}{dS}$

P dA – (P + dP) dA – W sin θ = ρ dA ds $V \cdot \frac{dV}{dS}$

-dP – $\frac{W \sin\theta}{\mathrm{dA}}$= ρ $V \cdot dv$

Siendo sin θ = $\frac{dz}{ds}$ y w = ρ g dA ds

-dP – $\frac{\rho\, g\, dA\, ds}{dA}\frac{dz}{ds}$= ρ $V\ dv$

-dP – ρ g dz= ρ $V\ dv$

- $\frac{dP}{\rho}$ – g dz= $\frac{d\,(V^2)}{2}$

$$\boxed{\frac{dP}{\rho} + \mathrm{g\ dz} + \frac{d\,(V^2)}{2} = 0}$$

Ecuación diferencial de Euler

Principio de Conservación de la Energía

$$\frac{dP}{\rho} + g\,dz + \frac{d\,(V^2)}{2} = 0$$ Ecuación diferencial de Euler

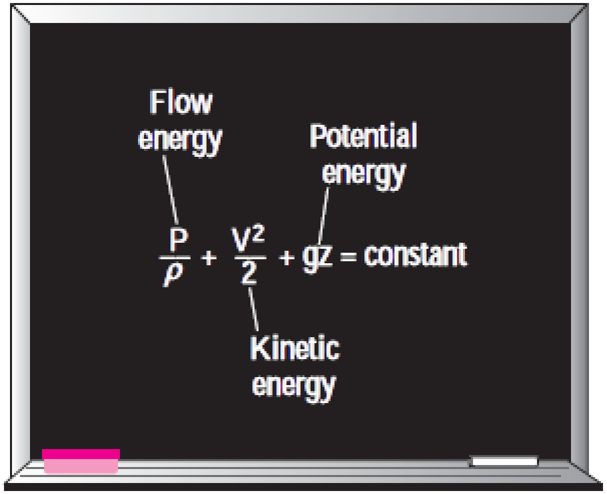
Integrando los diferenciales exactos

$$\int \frac{dP}{\rho} + g\,z + \frac{V^2}{2} = \text{Constante a lo largo de una línea de corriente”}$$

Resolviendo la integral $\int \frac{dP}{\rho}$ para flujo estacionario incompresible

$$\boxed{\frac{P}{\rho} + g\,z + \frac{V^2}{2} = \text{Constante a lo largo de una línea de corriente”}}$$

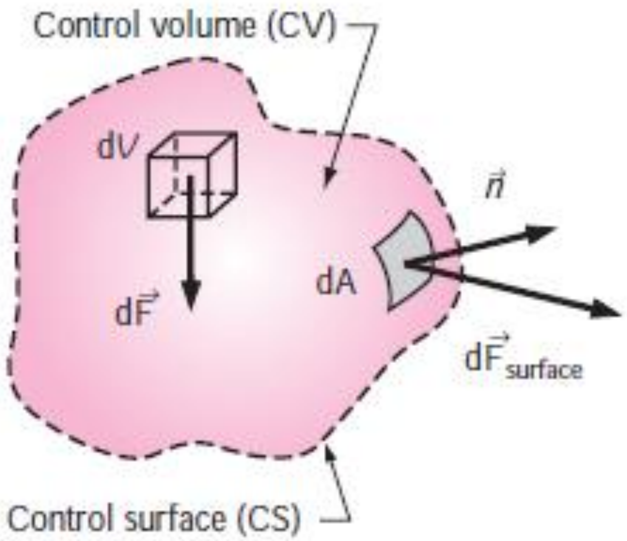
Ecuación de Bernoulli



$$\frac{P_1}{\rho} + g\,Z_1 + V_1^2 = \frac{P_2}{\rho} + g\,Z_2 + V_2^2 = Constante$$

”La suma de la energía de flujo, cinética y potencial de una partícula de fluido a lo largo de una línea de corriente es CONSTANTE, cuando el flujo es estacionario, incompresible y los efectos de fricción son despreciables”

Equilibrio de fuerzas en traslación



Las fuerzas que actúan sobre un volumen de control se dividen de la siguiente forma:

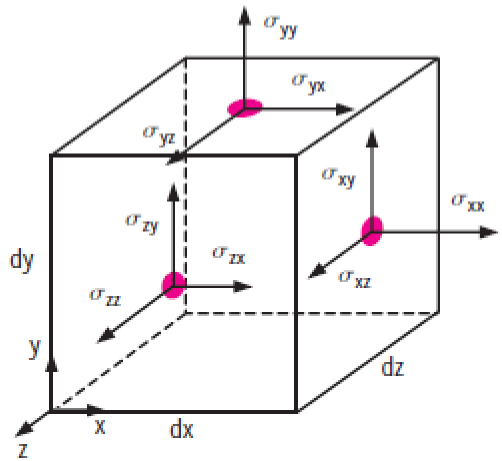
- Fuerzas Másicas (Fbody)
- Fuerzas Superficiales
  - Normales
  - Viscosas

Equilibrio de fuerzas en traslación

$$d\vec{F}_{surface} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

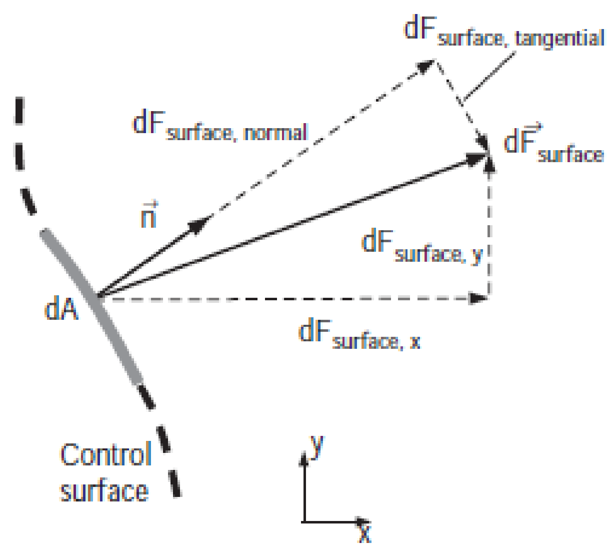
$$\sum \vec{F}_{surface} = \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



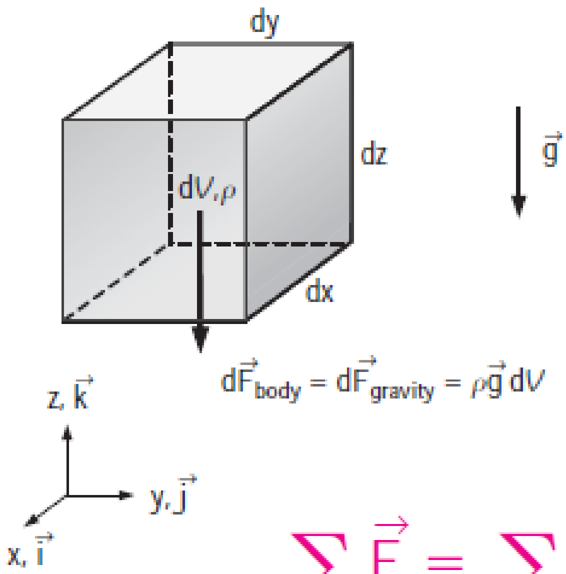
Las Fuerzas Superficiales Normales y Viscosas surgen a partir de **integrar en el área al tensor de tensiones**. Este tensor tiene como componentes en su diagonal a las **tensiones normales (Presiones) + las tensiones viscosas**. Fuera de su diagonal se encuentran las **tensiones de corte**.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \overbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}}^{\text{Fluido en Reposo}} + \overbrace{\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}^{\text{Tensor Viscoso (Desviador)}}}^{\text{Fluido en Movimiento}}$$



(a)

Equilibrio de fuerzas en traslación



$$\sum \vec{F}_{body} = \int_{CV} \rho\vec{g}\,dV = m_{CV}\vec{g}$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface} = \int_{CV} \rho\vec{g}\,dV + \int_{CS} \sigma_{ij}\cdot\vec{n}\,dA$$

Total force: $$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{total force}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{gravity}}_{\text{body force}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{pressure} + \sum \vec{F}_{viscous} + \sum \vec{F}_{other}}_{\text{surface forces}}$$

Teorema de conservación de Cantidad de Movimiento.

$$\sum \vec{F}^{(ext)} = m\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Tomando un volumen diferencial

$$\sum d\vec{F}^{(ext)} = \sum \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dx\, dy\, dz$$

$$d\vec{F}^{(ext)} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \mathrm{dx\ dy\ dz}$$

Tomando la componente x

$$dF_x = \rho \frac{Du}{Dt} \mathrm{dx\ dy\ dz}$$

Teorema de conservación de Cantidad de Movimiento.

$$\mathrm{dF}_x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{dxdydz}$$

Descomponiendo cada término

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \mathrm{u})}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rho \mathrm{u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\rho \mathrm{u}^2)}{\partial x} - u\frac{\partial(\rho \mathrm{u})}{\partial x}$$

$$\rho \mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\rho \mathrm{uv})}{\partial y} - u\frac{\partial(\rho \mathrm{v})}{\partial y}$$

$$\rho \mathrm{w}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\rho \mathrm{uw})}{\partial z} - u\frac{\partial(\rho \mathrm{w})}{\partial z}$$

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\mathrm{dF}_x = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} - u\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} - u\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} - u\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)\mathrm{dxdydz}$$

$$\mathrm{dF}_x = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} - u\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)\right)\mathrm{dxdydz}$$

$$\mathrm{dF}_x = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\right)\mathrm{dxdydz}$$

$$\mathrm{dF}_x = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u\bar{V}\right)\right)\mathrm{dxdydz}$$

$$F_x = \int\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u\bar{V}\right)\right)\mathrm{dvol} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\mathrm{dvol} + \int_{\mathrm{vol}} \nabla.\left(\rho u\bar{V}\right)\mathrm{dvol}$$

Teorema de conservación de Cantidad de Movimiento.

Aplicando el Teorema de Gauss (Divergencia)

$$F_x = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\partial(\rho \mathrm{u})}{\partial t} \mathrm{dvol} + \int_{\mathrm{sup}} \mathrm{u}\, \rho(\bar{V}.\bar{n})\, \mathrm{dsup}$$

Generalizando para x, y, z:

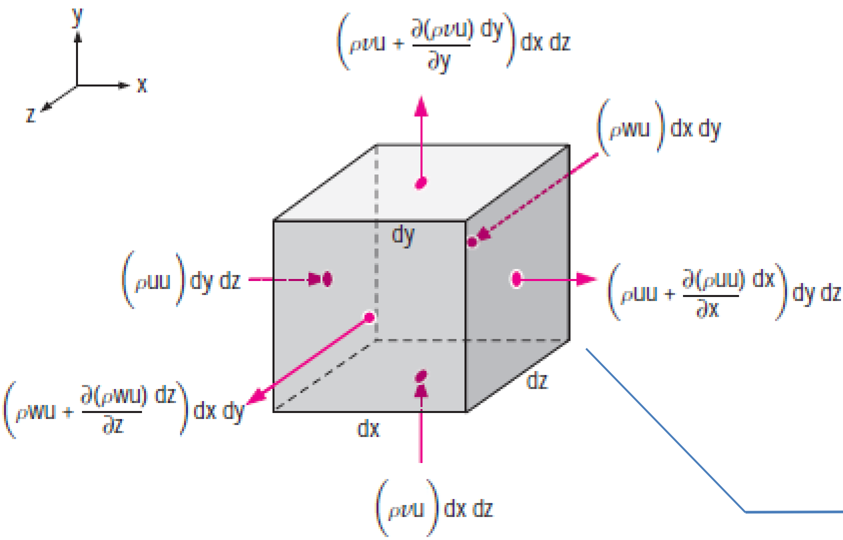
$$\sum \bar{F} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\partial\left(\rho \bar{V}\right)}{\partial t} \mathrm{dvol} + \int_{\mathrm{sup}} \bar{V}\, \rho \bar{V}.\bar{n}\, \mathrm{dsup}$$

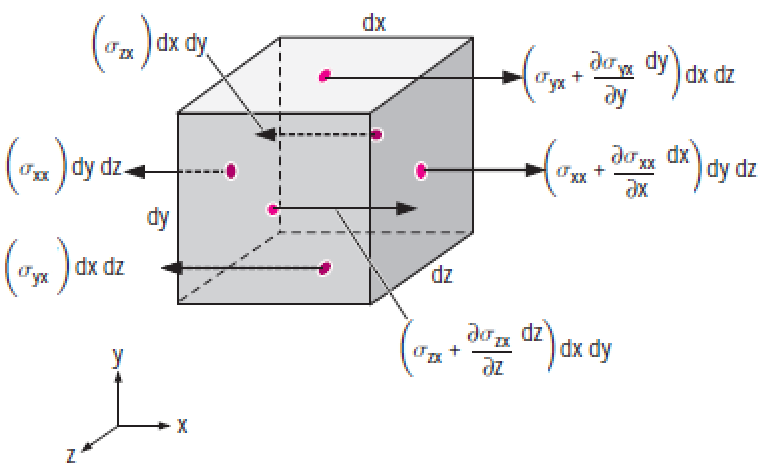
$$\boxed{\sum \bar{F} = \int_{\mathrm{vol}} \frac{\partial\left(\rho \bar{V}\right)}{\partial t} \mathrm{dvol} + \int_{\mathrm{sup}} \bar{V}\ \mathrm{d}C_{\rho}}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{La suma de todas}\\ \text{Las fuerzas externas}\\ \text{que actúan sobre}\\ \text{un VC}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{La razón de cambio}\\ \text{Respecto al tiempo}\\ \text{del momento lineal}\\ \text{del contenido del VC}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{El flujo neto del momento}\\ \text{lineal hacia afuera de la}\\ \text{superficie de control por}\\ \text{el flujo de masa}\end{array}\right)$$

Ecuación de Cauchy

Ecuación de Cauchy a partir de un volumen diferencial





En la cara izquierda del elemento cubico asumo que la momento lineal es m.v., y su flujo m.v.v Para determinar cuanto vale el momento lineal en el centro de la cara de la derecha usamos una expansión en **serie de Taylor**. En las graficas solo se muestra las componente del momento lineal en **X y de la Fsup X** a través del V.C.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\, dV + \sum_{out} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m}\vec{V}$$

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \rho \vec{g}\, dV + \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\, dV + \int_{CS} (\rho \vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zy} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial z}$$

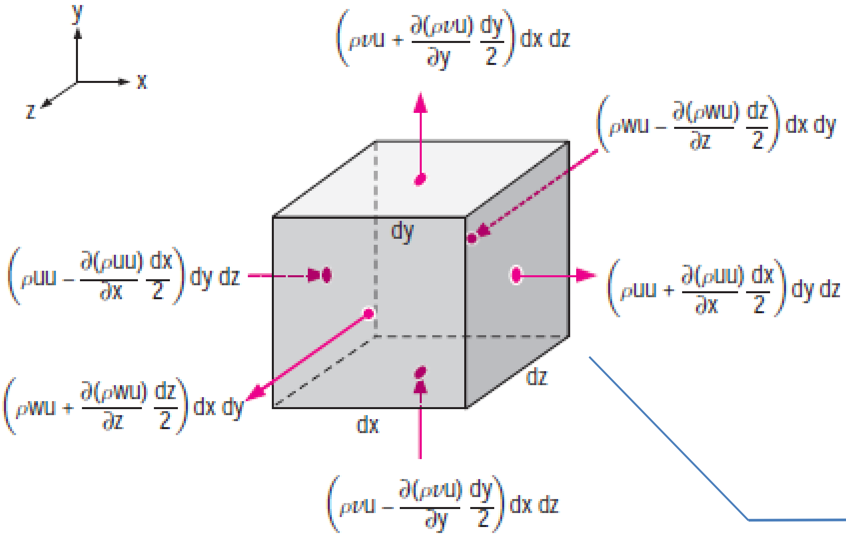
$$\rho g_z + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial z}$$

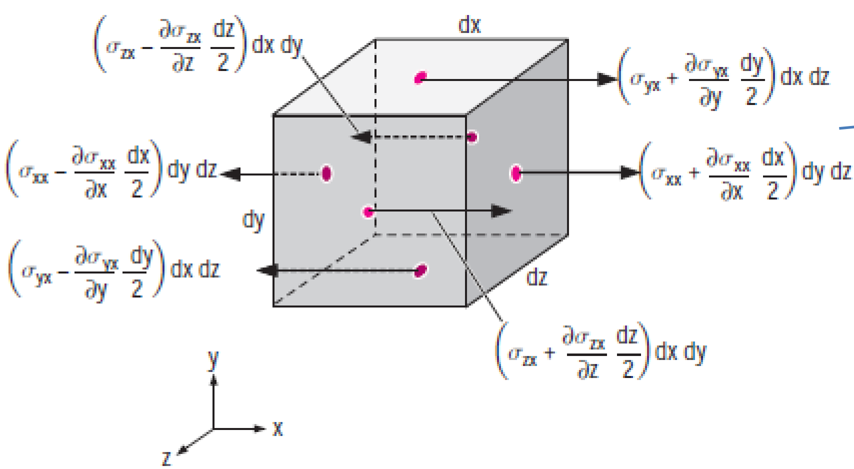
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}\vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy

Ecuación de Cauchy

Ecuación de Cauchy a partir de un volumen diferencial





En el centro del elemento cubico asumo que la momento lineal es m.v., y su flujo m.v.v Para determinar cuanto vale el momento lineal en el centro de la cara izquierda y derecha usamos una expansión en **serie de Taylor**. En las graficas solo se muestra las componente del momento lineal en **X y de la Fsup X** a través del V.C.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{body} + \sum \vec{F}_{surface} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})\, dV + \sum_{out} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \beta\dot{m}\vec{V}$$

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \rho\vec{g}\, dV + \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})\, dV + \int_{CS} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zy} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial z}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy

Ecuación Indefinidas de la Dinámica

Aplicando la regla de Producto:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) = \rho\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \end{cases}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right] + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = \boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}}$$

Forma alternativa de la ecuación de Cauchy

Ecuación Indefinidas de la Dinámica

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij}}$$

Ecuación de Cauchy

$$\nabla \cdot \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \right) = \begin{matrix} -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{matrix}$$

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{Dw}{Dt}$$

Se introduce un Nuevo tensor con las tensiones de corte como valores desconocidos

Ecuaciones Indefinidas de la Dinámica de Fluidos

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau = \rho \frac{DV}{Dt}$$

Ecuación de Euler

Considerando zona potencial, se tiene:

Ecuación de Euler

$$\rho g - \nabla p = \rho \frac{DV}{Dt}$$

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Ecuaciones de Euler

Equilibrio de Momentos en Rotación

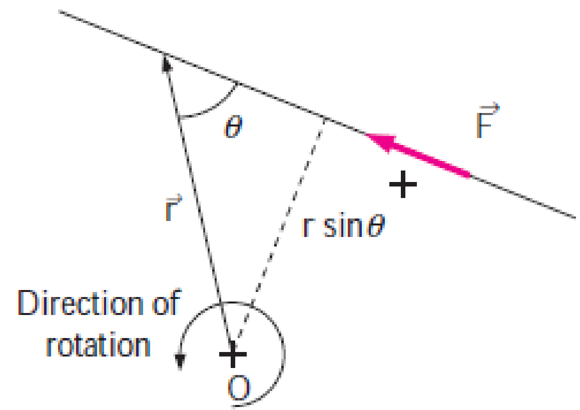
$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

$$dm = \rho \, dV$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{H}_{sys} = \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$

$$d\vec{H} = (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$



$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}_{sys}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{H}_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = Fr\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix}\text{The sum of all}\\ \text{external moments}\\ \text{acting on a CV}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{The time rate of change}\\ \text{of the angular momentum}\\ \text{of the contents of the CV}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{The net flow rate of}\\ \text{angular momentum}\\ \text{out of the control}\\ \text{surface by mass flow}\end{pmatrix}$$

Para Flujo Estacionario:

$$\sum \vec{M} = \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

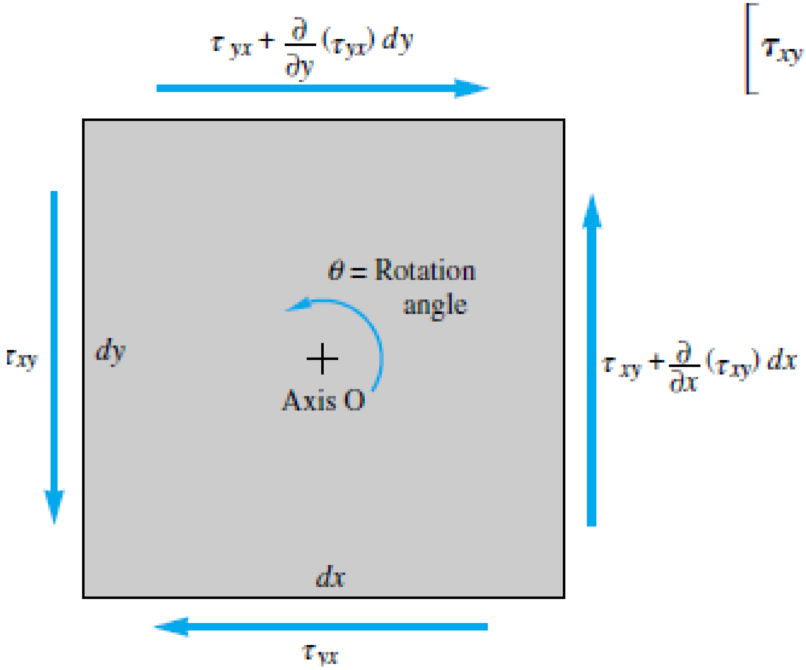
$$\sum \vec{M} = \sum_{out} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V} - \sum_{in} \vec{r} \times \dot{m}\vec{V}$$

Si r y el flujo de momento están en el mismo plano:

$$\sum M = \sum_{out} r\dot{m}V - \sum_{in} r\dot{m}V$$

$$\boxed{T_{shaft} = \rho\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t}) \quad \text{Ecuación de Euler para Turbo máquinas}}$$

Equilibrio de Momentos en Rotación



$$\left[\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy})\,dx - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})\,dy\right] dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{12}\rho(dx\,dy\,dz)(dx^2 + dy^2)\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Despreciando los términos de orden superior,

$$\tau_{xy} \approx \tau_{yx}$$

Análogamente, en los otros planos,

$$\tau_{xz} \approx \tau_{zx} \qquad \tau_{yz} \approx \tau_{zy}$$

NO EXISTE ECUACION DIFERENCIAL DEL MOMENTO CINETICO. La aplicación de la ecuación en forma integral a un volumen de control infinitesimal proporciona el resultado bien conocido de que las tensiones de corte son simétricas.

Ecuaciones de Lamé

Una componente i-j del tensor de tensiones, para un **fluido en movimiento** (caso τ_{ij} contrario seria nula), se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Donde, $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ es una componente del **tensor de tensiones**, ***p*** es la **presión**, $\boldsymbol{\delta_{ij}}$ es una componente de la **matriz identidad** y $\boldsymbol{\tau_{ij}}$ es una componente del **tensor desviador de tensiones** (contiene las tensiones de corte).

El tensor desviador de tensiones puede escribirse como:

$$\tau_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}$$

Donde, K_{ijpq} es una matriz que describe la **relación constitutiva** del material en un fluido newtoniano.
Es la matriz de elasticidad, que originalmente tiene 81 componentes, y que por simetría de los tensores puede reducirse a 36 y considerándose isotrópico (**elásticamente equivalente en todas las direcciones**), puede escribirse hacienda uso de solo **dos constantes** de elasticidad, **las constantes de Lame**.

$$K_{ijpq} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de Lamé

Las constantes $\boldsymbol{\lambda}$ *y* $\boldsymbol{\mu}$ *son coeficientes de viscosidad', análogos a los* ***parámetros de Lamé***. Reformulando la expresión del tensor de tensiones se tiene que:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \lambda^{*}\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^{*}D_{ij}$$

Donde, σ_{ij} es una componente del tensor de tensiones, *p* es la presión, δ_{ij} es una componente de la matriz identidad, D_{kk} es la traza de la matriz D_{pq} y D_{ij} es una componente de la matriz D_{pq}.

La nulidad de la viscosidad volumétrica se conoce como condición de stokes.

$$k^{*} = \frac{1}{3}\left(\lambda^{*} + \frac{2}{3}\mu^{*}\right) = 0 \qquad\qquad \lambda^{*} = \frac{2}{3}\mu^{*}$$

Luego, el tensor de tensiones, para un fluido newtoniano, aceptando la condición de Stokes resulta:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu^{*}\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^{*}D_{ij}$$

Ecuaciones de Lamé

Ecuaciones de Navier Stokes

Insertando la expresión anterior en las ecuaciones indefinidas se tiene que:

$$\rho\left(\vec{g}-\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=\nabla P-\tfrac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\vec{V})-\mu\nabla\cdot\nabla\vec{V}$$

Esta expresión se conoce como Ecuación de Navier – Stokes.

En el caso de fluido incompresible ($\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}=0$) la expresión anterior puede escribirse como:

$$\rho\left(\vec{g}-\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=\nabla P-\mu\nabla\cdot\nabla\vec{V}$$

Ecuación de Navier Stokes

$$\overbrace{\hspace{2cm}}^{\text{Fluido en Movimiento}}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}}^{\text{Fluido en Reposo}} + \overbrace{\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}^{\text{Tensor Viscoso (Desviador)}}$$

Se introduce un Nuevo tensor con las tensiones de corte como valores desconocidos

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$$

Se define el tensor de deformación viscoso. Se considera Flujo Incompresible y adiabático (esto implica viscosidad constante)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ecuación de Navier Stokes

Partiendo de la Ecuación de Cauchy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

Consideramos el flujo incompresible

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cancel{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right]} + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right] = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\sigma_{ij}$$

El producto puede escribirse de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Analizamos solo la dirección en X

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\nabla^2 u$$

Ecuación de Navier Stokes

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\nabla^2 u$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\nabla^2 v$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\nabla^2 w$$

Ecuaciones de Navier Stokes

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V}}$$

Ecuación de Navier Stokes

Ecuaciones de Euler y de la estática

Partiendo de la Ecuación de Navier – Stokes, si se considera un fluido ideal:

$$\rho\left(\vec{g} - \frac{D\vec{V}}{Dt}\right) = \nabla P$$

Esta expresión se conoce como ecuación de Navier Sotkes para fluidos ideales.

En el caso de la estática de los fluidos ($\vec{\mathrm{V}} = 0$), puede reducirse a:

$$\rho\vec{g} = \nabla P$$

Esta expresión da lugar a la ecuación diferencial fundamental de la estática, que en un espacio unidimensional puede reducirse a:

$$\mathrm{d}P = \rho\, g\, \mathrm{d}h$$

Ecuación General de la Estatica

Principio de Conservación de la Energía

Partiendo de la ecuación de Navier Stokes para fluidos ideales :

$$\rho\left(\vec{g}-\frac{D\vec{V}}{Dt}\right)=\nabla P$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros por el vector $\overrightarrow{\mathrm{ds}}=\mathrm{dx}\,\check{\imath}+\mathrm{dy}\,\check{\jmath}+\ \mathrm{dz}\,\check{\mathrm{k}}$ y pasando la densidad al término de la derecha:

$$\underbrace{\vec{g}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\mathrm{I}}-\underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\mathrm{II}}=\underbrace{\frac{\nabla P}{\rho}\cdot\overrightarrow{ds}}_{\mathrm{III}}$$

Se analiza cada miembro por separado.

I $$\vec{g}\cdot\overrightarrow{ds}=(\mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{Z})\cdot(dx,dy,dz)=(\mathbb{X}\,dx+\mathbb{Y}\,dy+\mathbb{Z}\,dz)$$

Principio de Conservación de la Energía

Dado que el campo vectorial $\vec{g}$ deviene del potencial gravitatorio es posible expresarlo como el gradiente de una función potencial U_m:

$$\vec{g} = (\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x}, \frac{\partial U_m}{\partial y}, \frac{\partial U_m}{\partial z}\right) = \nabla U_m$$

Aplicando el producto escalar por un diferencial de línea $\overrightarrow{ds}$:

$$\vec{g} \cdot \overrightarrow{ds} = \nabla U_m \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\partial U_m}{\partial x} dx + \frac{\partial U_m}{\partial y} dy + \frac{\partial U_m}{\partial z} dz = dU_m$$

II

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \overrightarrow{ds} = \left(\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}, \frac{Dw}{Dt}\right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{Du}{Dt} dx + \frac{Dv}{Dt} dy + \frac{Dw}{Dt} dz = du \frac{dx}{dt} + dv \frac{dy}{dt} + dw \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \overrightarrow{ds} = du \frac{dx}{dt} + dv \frac{dy}{dt} + dw \frac{dz}{dt} = u\, du + v\, dv + w\, dw$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{d(u^2)}{2} + \frac{d(v^2)}{2} + \frac{d(w^2)}{2} = \frac{d(V^2)}{2}$$

Principio de Conservación de la Energía

III

$$\frac{\nabla P}{\rho}\cdot\overrightarrow{ds}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cdot(dx,dy,dz)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)$$

$$\frac{\nabla P}{\rho}\cdot\overrightarrow{ds}=\frac{dP}{\rho}$$

Finalmente, sumando los tres términos se tiene la ecuación diferencial de Euler:

$$\vec{g}\cdot\overrightarrow{ds}-\frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot\overrightarrow{ds}=\frac{\nabla P}{\rho}\cdot\overrightarrow{ds} \longrightarrow \boxed{\frac{dP}{\rho}+\frac{d(V^2)}{2}-dU_m=0}$$

Ecuación diferencial de Euler

Principio de Conservación de la Energía
Integración y Sistema de Bernoulli

Integrando la expresión anterior se tiene:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{d(V^2)}{2} - \int dU_m = \mathbb{C}$$

$$\boxed{\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U_m = \mathbb{C}}$$

Integral Generalizada de Bernoulli

La integral que involucra dP y ρ requiere un análisis adicional.

Casos particulares del sistema de Bernoulli

Los casos de interes para la integración del sistema de Bernoulli son los siguientes:

1. Isopínica (Incompresible, ρ es constante).
2. Politrópica. Simplificación adiabática, expresión the Saint Venant - Wenczel.

$$\int \frac{dP}{\rho} \qquad\qquad \frac{P}{\rho^n} = \mathbb{C}$$

1. Incompresible:

$$\rho = \mathbb{C} \longrightarrow \int \frac{dP}{\rho} = \frac{1}{\rho}\int dP = \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U_m = \mathbb{C}$$ *Ecuación de Bernoulli para fluidos incompresibles*

2.Poli trópica: dada la complejidad de la poli trópica, se toma un caso particular de la misma que es la adiabática:

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \mathbb{C}$$

$$\rho = \left(\frac{P}{\mathbb{C}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \quad \int \left(\frac{P}{\mathbb{C}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dp \rightarrow \quad \mathbb{C}^{1/\gamma} \int P^{-1/\gamma} dP \rightarrow \quad \mathbb{C}^{1/\gamma} \frac{P^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} \rightarrow \quad \mathbb{C}^{1/\gamma} \frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho} P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U_m = \mathbb{C} \qquad \textit{Ecuación de Bernoulli para flujo adiabático.}}$$

Casos particulares del sistema de Bernoulli . Ecuación de Saint Venant - Wenczel

Partiendo de la *Ecuación de Bernoulli para flujo adiabático y recordando que para gases ideales* $P = \rho RT$, $R = C_p - C_v$ *y* $\gamma = C_p/C_v$ *se tiene*:

$$\frac{C_p/C_v}{C_p/C_v - 1}\frac{\rho RT}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U_m = \frac{C_p}{C_p - C_v}RT + \frac{V^2}{2} - U_m = \mathbb{C}$$

$$\frac{C_p}{R}RT + \frac{V^2}{2} - U_m = \mathbb{C}$$

Si se considera despreciable el termino geodésico (U_m)

$$\boxed{C_pT + \frac{V^2}{2} - U_m = \mathbb{C}}$$

Ecuación de Saint Venant - Wenczel.

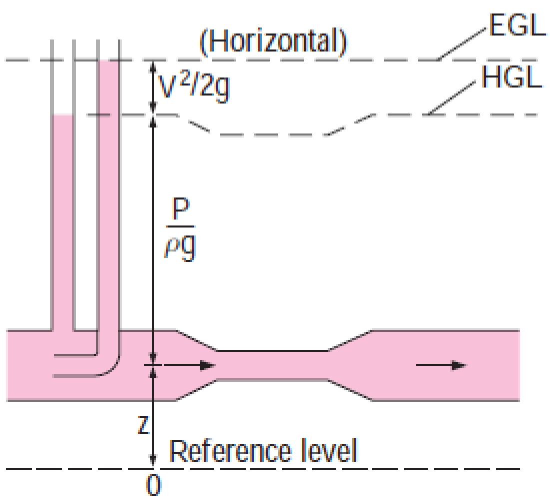
Diagrama Piezómetro

Dividiendo la ecuación de Bernoulli para fluidos incompresibles por la gravedad se tiene que:

$$\frac{1}{g}\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}-U_m\right)=\left(\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}-\frac{U_m}{g}\right)=\mathbb{C}$$

Donde: $\gamma=\rho g$ es el peso específico y $U_m=-\mathrm{g}\,\mathrm{z}$, con lo se tiene:

$$\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=\mathbb{C}$$



EGL: Línea de energía $(\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z)$

HGL: Línea Hidráulica $(\frac{P}{\rho g}+z)$

$\frac{\mathrm{P}}{\rho\mathrm{g}}=$ Carga de Presion (columna de presion Estatica)

$\frac{\mathrm{V}^2}{2\mathrm{g}}$ = Carga de Velocidad (columna necesaria para lograr V)

z = Carga de altura (Energía Potencial del fluido)

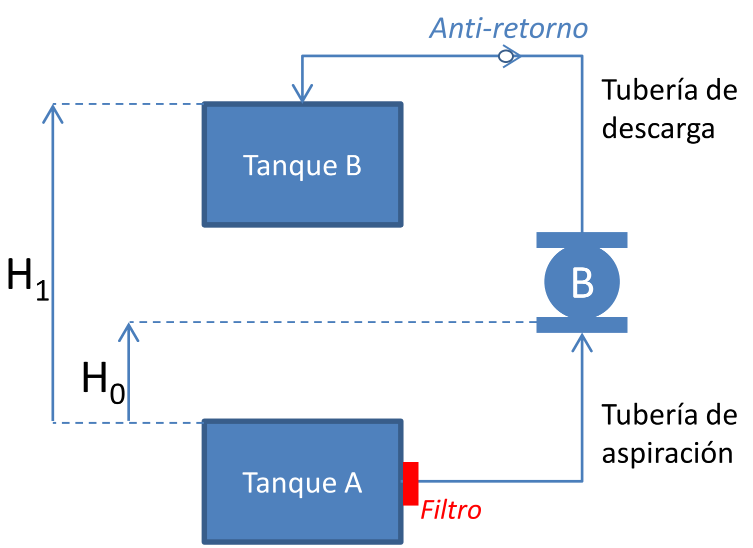
Corrientes relativas. Bomba centrífuga.

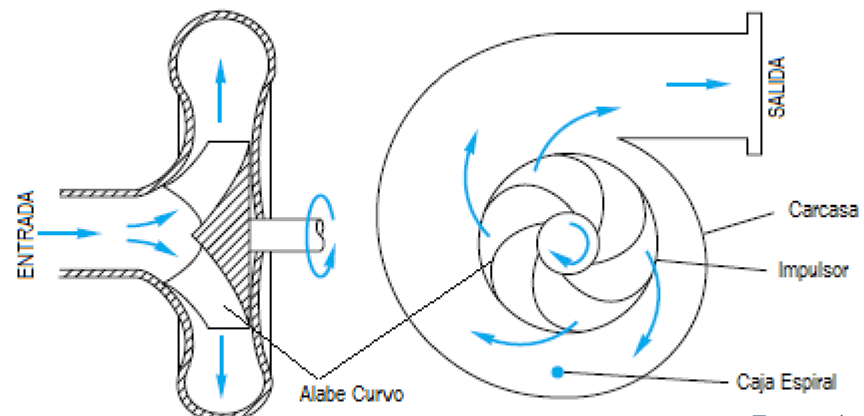
Objetivo: aumentar la presión total de un líquido.
La bomba es una turbo máquina que entrega energía al fluido.

$\Delta P = P_B - P_A$

Energía B > Energía A

$H_1 > H_0$

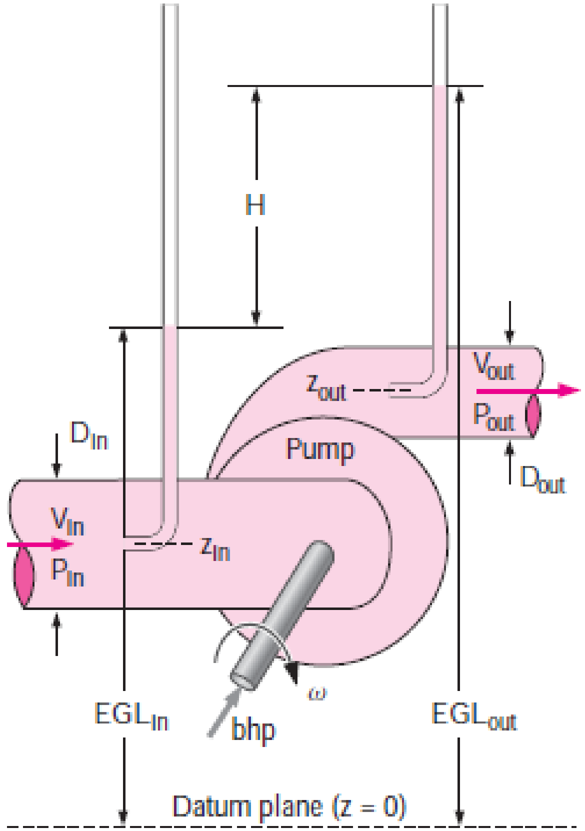




V↓ P↑

- Funcionamiento
- Cavitación

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.



$$H = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{out} - \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{in}$$

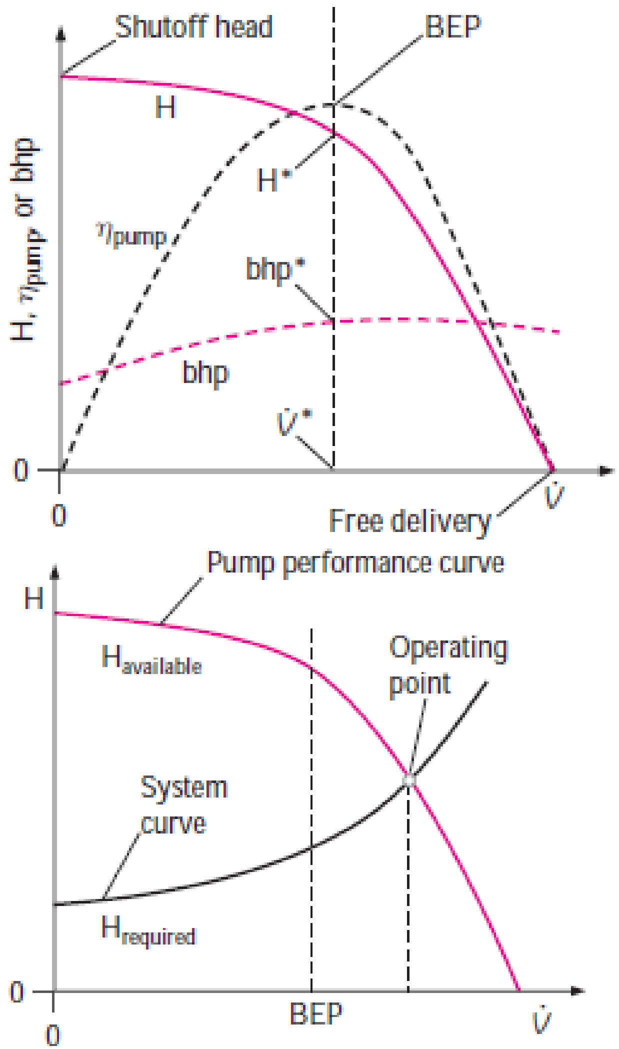
H (carga de la Bomba) = h_{out} - h_{in}, energía aportada, despreciando efectos viscosos y térmicos.

Water horsepower: $\dot{W}_{\text{water horsepower}} = \dot{m}gH = \rho g\dot{V}H$

Brake horsepower: $\text{bhp} = \dot{W}_{\text{shaft}} = \omega T_{\text{shaft}}$

Pump efficiency: $\eta_{\text{pump}} = \frac{\dot{W}_{\text{water horsepower}}}{\dot{W}_{\text{shaft}}} = \frac{\dot{W}_{\text{water horsepower}}}{\text{bhp}} = \frac{\rho g\dot{V}H}{\omega T_{\text{shaft}}}$

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.

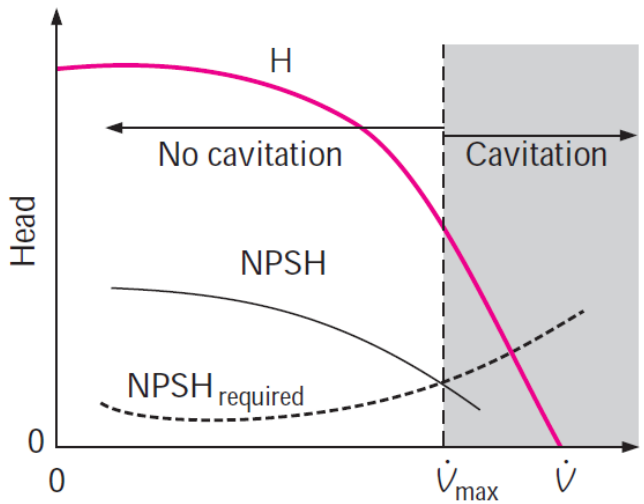


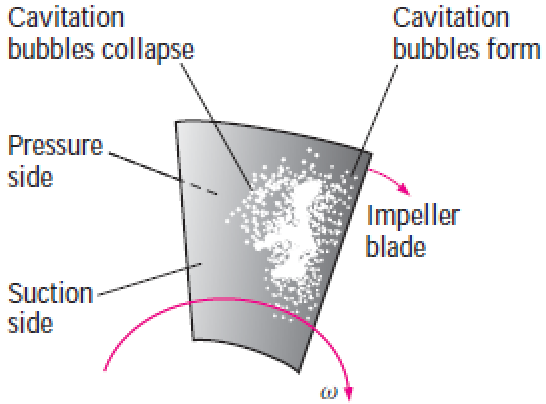
El BEP es el punto de mayor eficiencia.

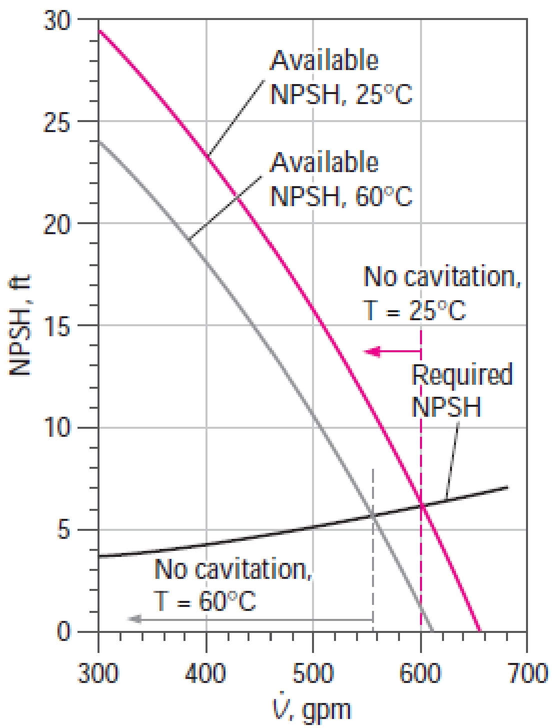
El punto de operación se corresponde cuando el H disponible es igual al H requerido por el sistema.

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.

Bomba centrífuga. Cavitación







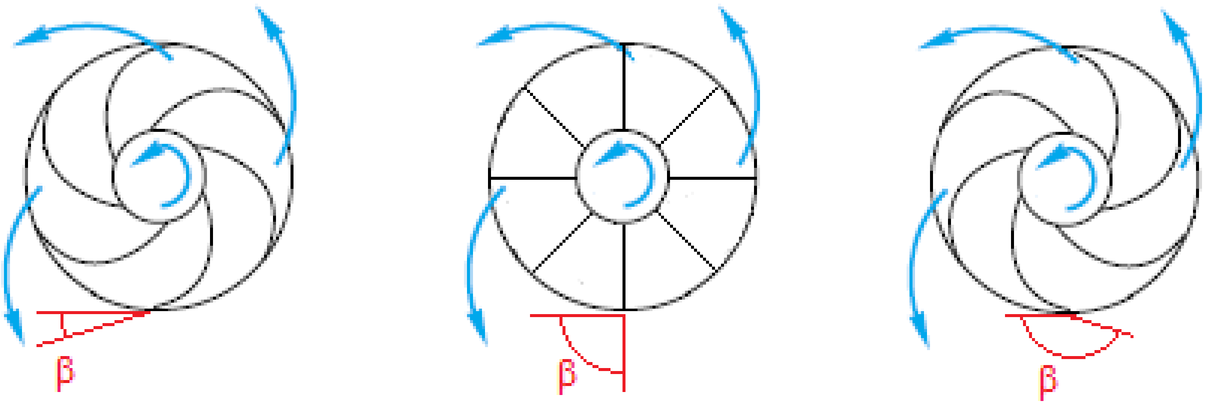
Para evitar la cavitación es necesario evitar que el fluido este por debajo de su presión de vapor en cualquier punto dentro de la bomba.

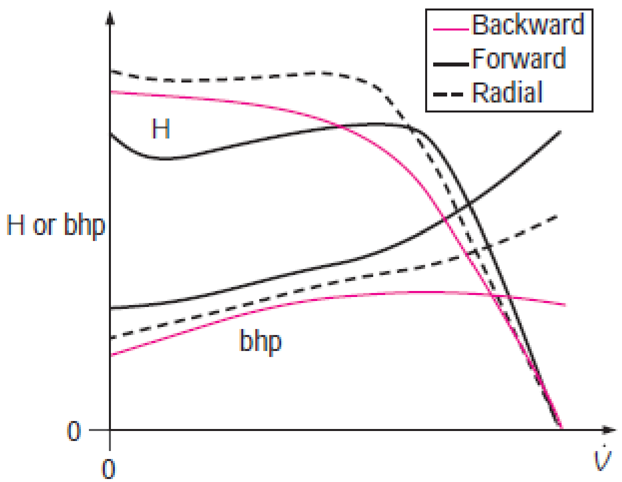
El criterio de cavitación suele especificarse a la entrada de la bomba.

$$NPSH = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}\right)_{\text{pump inlet}} - \frac{P_v}{\rho g}$$

“ Si la carga neta de aspiración positiva NPSH requerida es mayor que la NPSH disponible, existe cavitación.”

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.

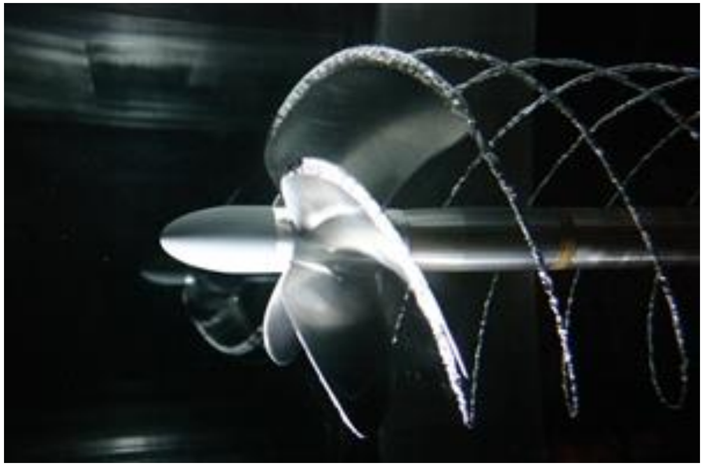




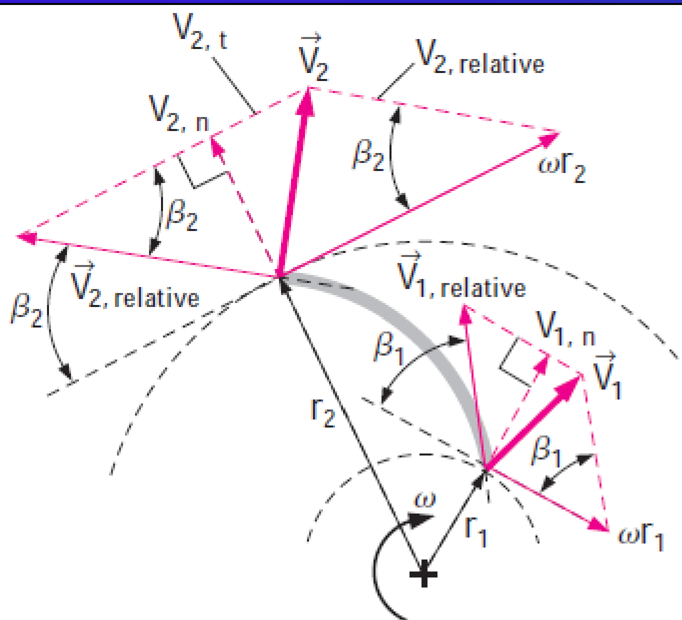
Curvatura del álabe:

- β < 90°, curvatura hacia atrás. El ensanchamiento es gradual. Se recomienda valor de curvatura de 25° < β < 60°.
- β = 90°, sin curvatura o álabe radial.
- β > 90°, curvatura hacia adelante. Mayor rozamiento por la distancia recorrida por el fluido. Puede haber Cavitación.

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.



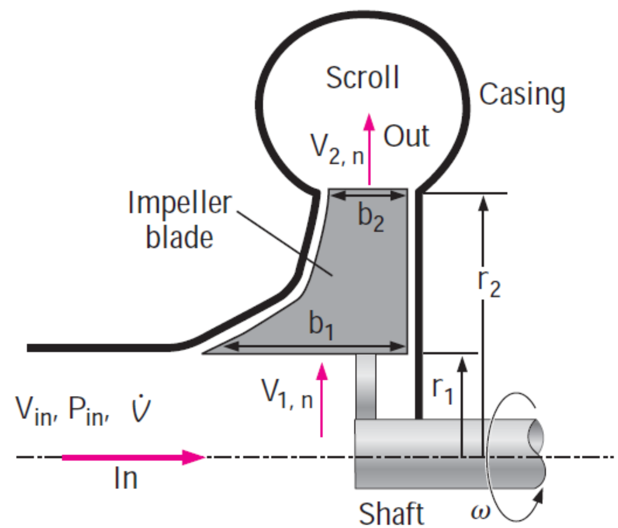

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.



Teóría de hilo de corriente.

Hipótesis:

- Los álabes son infinitos.
- Los álabes tienen espesor diferencial.



El torque en el eje es equivalente al cambio de cantidad de momento entre la salida 2 y la entrada 1. Aplicando la ecuación de Euler para turbo maquinas.

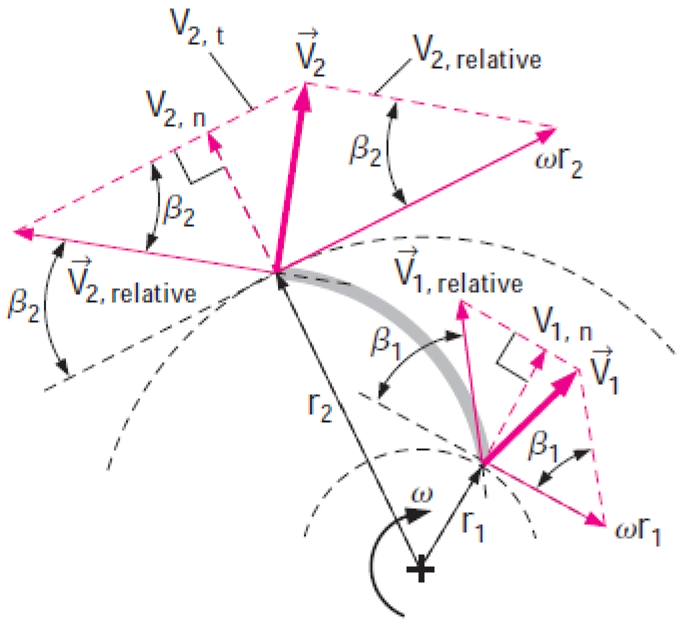
$$T_{shaft} = \rho\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t})$$

Considerando un rendimiento de la bomba = 1

$$bhp = \omega T_{shaft} = \rho\omega\dot{V}(r_2V_{2,t} - r_1V_{1,t}) = \dot{W}_{\text{water horsepower}} = \rho g\dot{V}H$$

$$H = \frac{1}{g}(\omega r_2V_{2,t} - \omega r_1V_{1,t})$$

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.



Aplicando Teorema de Coseno

$$V_2^2 = V_{2,\text{relative}}^2 + \omega^2 r_2^2 - 2\omega r_2 V_{2,\text{relative}} \cos\beta_2 \quad (1)$$

Según diagrama vectorial

$$V_{2,\text{relative}} \cos\beta_2 = \omega r_2 - V_{2,t} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\omega r_2 V_{2,t} = \frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_{2,\text{relative}}^2 + \omega^2 r_2^2\right) \quad (3)$$

Aplicando Euler y considerando un rendimiento = 1

$$H = \frac{1}{g}\left(\omega r_2 V_{2,t} - \omega r_1 V_{1,t}\right) \quad (4)$$

Sustituyendo (3) (para sub índice 2 y 1) en (4)

$$H = \frac{1}{2g}\left[\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \left(\omega^2 r_2^2 - \omega^2 r_1^2\right) - \left(V_{2,\text{relative}}^2 - V_{1,\text{relative}}^2\right)\right] \quad (5)$$

La carga neta es igual al cambio de energía cinética absoluta mas el cambio de la energía cinética de la puntera del rotor menos la energía cinética relativa entre la entrada y salida.

Corrientes relativas. Bomba centrífuga.

$$H = \frac{1}{2g}\left[(V_2^2 - V_1^2) + (\omega^2 r_2^2 - \omega^2 r_1^2) - (V_{2,\text{ relative}}^2 - V_{1,\text{ relative}}^2)\right] \quad (5)$$

$$H = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{out} - \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_{in} \quad (6)$$

Igualando (5) con (6)

$$\left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V_{\text{relative}}^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z\right)_{out} = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V_{\text{relative}}^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z\right)_{in}$$

Ecuación de Bernoulli para en un marco rotacional

$$\boxed{\Delta P = P_2 - P_1 = \rho\left[\frac{\omega^2(r_2^2 - r_1^2)}{2} + \frac{\left(V_{1relative}^2 - V_{2relative}^2\right)}{2}\right]}$$

Nótese que incrementar ω y $V_{relative}$ aumentará el salto de presión de la bomba. Pero existen límites:

- Cavitación – Erosión.
- La velocidad relativa ($V_{relative}$) limita el ángulo β del álabe.
- Agrandar el rotor (>r_2) incrementa las pérdidas por rozamiento.
- Elevados valores de ω comprometen estructuralmente la bomba.