

DETERMINANTES

La **función determinante** es una “función con valores reales de una variable matricial”. A cada **matriz cuadrada** X le hace corresponder un número real $f(X) = \det(X)$

$$\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Conocemos que: $\det(A)$ para el caso de $n=2$: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Definición

La *función determinante* ($\det$) es la función que a cada matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ le hace corresponder el número real $\det(A)$

$$\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

siendo: $\det(A)$ la suma de *todos los productos elementales con signo de A*.

➤ **Productos elementales de A:**

Producto de n elementos de A de los cuales ningún par de factores pertenecen a la misma fila o a la misma columna de A .

Observaciones:

* Para las matrices de orden tres, como cada producto elemental tiene 3 factores, cada uno de ellos de distintas filas, todos se pueden expresar como: $a_{1-} \cdot a_{2-} \cdot a_{3-}$ (El conjunto ordenado de las i será en todos los p.e.: (1,2,3))

* Como ningún par de factores puede pertenecer a la misma columna, entonces los números j de columnas no tienen repeticiones y serán una *permutación* del conjunto $\{1,2,3\}$. Las $3!=6$ permutaciones dan lugar a los seis p.e. descriptos.

➤ **Productos elementales con signo de A**

Para designar una permutación general del conjunto de los subíndice j se escribe $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$.

En una permutación hay una **inversión** cuando un número mayor precede a uno menor.

Para contar el *número total de inversiones* de una permutación $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ se puede:

- Hallar el número de elementos que son menores que j_1 y que están *después* de j_1 en la permutación.
- Hallar el número de elementos que son menores que j_2 y que están después de j_2 en la permutación.
- Continuar el proceso con $j_3, j_4 \dots$ hasta j_{n-1} . La suma de estos números es el *número total de inversiones que hay en la permutación*.

Producto elemental con signo es el producto elemental

$(a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, a_{3,j_3}, a_{4,j_4}, \dots, a_{n,j_n})$ multiplicado por:

- $+1$ si el número total de inversiones de $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es par
- -1 si el número total de inversiones de $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es impar.

Cálculo del determinante de orden tres, utilizando la definición:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = + b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} - b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32} - b_{12} \cdot b_{21} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + \\ + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31}$$

Propiedades de los determinantes

$A = (a_{ij})$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz cuadrada)

1.- Si A tiene:

- a) una fila (o columna) de ceros
- b) dos filas (o dos columnas) iguales.
- c) dos filas (o dos columnas) proporcionales

$\det(A) = 0$

Observación: si $A = O \rightarrow \det(O) = 0$

2.- Si A es una matriz:

- a) triangular superior o
- b) triangular inferior o
- c) diagonal (o escalar)

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

Observación: si $A = I \rightarrow \det(I) = 1$

3.- Si B es la matriz que se obtiene:

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 54$

a) cuando una sola fila (o columna) de A se multiplica por el escalar h:

$\det(B) = h \cdot \det(A)$

Si: B, se obtiene multiplicando la segunda columna de la matriz A por: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} C_2 \right)$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \frac{1}{2} \det(A) \rightarrow 2 \det(B) = \det(A)$$

b) cuando se intercambian dos filas (o dos columnas) de A:

$\det(B) = -\det(A)$

Si: B, se obtiene intercambiando las filas uno y tres de la matriz A ($F_1 \leftrightarrow F_3$)

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = -\det(A) \rightarrow -\det(B) = \det(A)$$

c) cuando una fila (o columna) de A se le suma otra paralela multiplicada por un escalar, el valor del determinante no varia:

$\det(B) = \det(A)$

Si: B, se obtiene restándole a la primera fila de la matriz A, el triple de la segunda fila de la matriz A ($F_1 - 3 F_2$) y a la tercera fila de la matriz A la sumamos el doble de la segunda fila de A ($F_3 + 2 F_2$)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -14 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 16 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \det(A)$$

4.- Si elegimos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

a) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\det(k.A) = k^n \cdot \det(A)$

Para: $k = -3 \rightarrow -3A = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(-3A) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$

$= (-3)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-27) \cdot (-5) = 135$

b) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \wedge \quad \det(A) + \det(B) = (-5) + (-4) = -9$

c) $\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 1 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A.B) = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 1 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 20$

$\det(A) \cdot \det(B) = (-5) \cdot (-4) = 20$

d) $\det(A^T) = \det(A)$

e) Si A, C y D son matrices cuadradas iguales excepto en la fila h, donde la fila h de A es igual a la fila h de C, más la fila h de D, entonces:

$\det(A) = \det(C) + \det(D)$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+2 & -2+3 & 3+(-4) \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\det(C)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\det(D)} = 4 + (-9) = -5$

f) $\det(A^h) = [\det(A)]^h ; \quad \forall h \in \mathbb{N}$

$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A^2) = \begin{vmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 25 = (-5)^2 = [\det(A)]^2$

5.- **Cofactor** de un elemento de la matriz cuadrada A.

Se llama *cofactor* del elemento a_{ij} de la matriz A al número: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(m_{ij})$, siendo m_{ij} la submatriz de A que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j . ($m_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$)

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1 \quad ; \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

La matriz cuyos elementos son los cofactores de los elementos de A se llama matriz de cofactores de A

$$\text{cof}(A) = (C_{ij})$$

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz transpuesta de $\text{Cof}(A)$ se llama **matriz adjunta** de A : $\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T = \text{cof}(A^T)$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

6.- Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila (o columna). **Regla de Laplace**

a) Desarrollo de $\det(A)$ por los elementos de la **fila i** de A :

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + a_{i3} \cdot C_{i3} + \dots + a_{in} \cdot C_{in}$$

Si desarrollamos al $\det(A)$ aplicando la regla de Laplace, por los elementos de la segunda fila, cuyos cofactores hallamos cuando definimos “cofactor”, el cálculo del determinante resulta:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{2}_{a_{21}} C_{21} + \underbrace{(-1)}_{a_{22}} C_{22} + \underbrace{1}_{a_{23}} C_{23} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 = \\ &= -2 - 4 + 1 = -5 \end{aligned}$$

Pero si observamos por ejemplo la tercer fila, como la posición: $a_{32} = 0$, sería mas conveniente, dado que uno de los términos se anula y el cálculo resulta presentado como:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1}_{a_{31}} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{0}_{a_{32}} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{1}_{a_{33}} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 0 + 0 + 1 \cdot (-6) = -5 \end{aligned}$$

b) Desarrollo de $\det(A)$ por los elementos de la **columna j** de A :

$$\det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot C_{nj}$$

Con la observación que efectuamos en desarrollo del determinante, eligiendo la segunda fila, por la misma razón nos conviene desarrollar el determinante aplicando la regla de Laplace, por la segunda columna, es decir:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1}_{a_{12}} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)}_{a_{22}} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{0}_{a_{32}} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \cdot 5 = -1 - 4 + 0 = -5 \end{aligned}$$

Ejercicios Complementarios sobre: DETERMINANTES

1.- Sabiendo que $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$ hallar:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} a & b & -c \\ 2d & 2e & -2f \\ g & h & -i \end{vmatrix} & \text{b)} & \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} & \text{c)} & \begin{vmatrix} b & a-4c & c \\ e & d-4f & f \\ h & g-4i & i \end{vmatrix} & \text{d)} & \begin{vmatrix} 2b-4c & b & c \\ 2e-4f & e & f \\ 2h-4i & h & i \end{vmatrix} & \text{e)} & \begin{vmatrix} c & -b & a \\ f & -e & d \\ i & -h & g \end{vmatrix} & \text{f)} & \begin{vmatrix} 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \\ 4a & 4b & 4c \end{vmatrix} \\ \text{g)} & \begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} & \text{h)} & \begin{vmatrix} a & a & b & c \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ e & g & h & i \\ i & d & e & f \end{vmatrix} & \text{i)} & \begin{vmatrix} b & a & 0 & c \\ -6 & 4 & -2 & 8 \\ h & g & 0 & i \\ e & d & 0 & f \end{vmatrix} & \text{j)} & \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2d & -2e & -2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.- Sin desarrollar los determinantes, demuestre las siguientes identidades, mencionando las propiedades correspondientes:

$$\begin{vmatrix} x+y & 1 & z \\ x+z & 1 & y \\ y+z & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+c & a \\ b & b & b+d \end{vmatrix} = c.d \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & -a & -a \\ b & 0 & -b \\ c & c & 0 \end{vmatrix} = a.b.c$$

3.- En cada determinante explicar por qué las sustituciones $x = 0$ y $x = 2$ hacen que los determinantes sean iguales a 0

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ x & 1 & 2 \\ 2x & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 8 & 8 & x^3 \\ 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4.- Calcular

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \text{b)} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{c)} & \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 9 & 0 \end{vmatrix} & \text{d)} & \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} & \text{e)} & \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\ \text{f)} & \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \text{g)} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \text{h)} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5.- Verificar:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a) & \text{b)} & \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = a.b.(b-a).(a-1).(b-1) \\ \text{c)} & \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ ax & a & -1 & 0 \\ ax^2 & ax & a & -1 \\ ax^3 & ax^2 & ax & a \end{vmatrix} = a.(x+a)^3 & \text{d)} & \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 - y^4 \end{aligned}$$

6.- Hallar los valores reales de x que anulan el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} & \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \\ \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} & \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} & \text{f) } \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \end{array}$$

7) Demostrar que el determinante asociado a toda matriz ortogonal siempre es 1 o -1.

8) Sabiendo que $B = \begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & b & c \\ d & d & e \\ a+f & a & e \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & f \\ b & d & a \\ c & e & e \end{vmatrix} = -3$, hallar: $\det(B)$.

9) Sabiendo que: $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ $\det(A) = 1/3$ y $\det(B) = -3$, hallar:

$$\text{a) } \det(2 \cdot A \cdot B^2) \quad \text{b) } \det(-3 \cdot A^2 \cdot B^T) \quad \text{c) } \det[2 \cdot A^T \cdot B^2]^2 \quad \text{d) } [\det(-1/3 \cdot A \cdot B)^T]^{-2}$$

10) Si: A es una matriz de orden 10, cuyo determinante asociado es: 3, ¿cuánto vale: $\det(k \cdot A)$, cuando: $k = -2$?

11) ¿Cuánto vale k, si: $\det(k \cdot A) = 1250$, siendo $\det(A) = 2$ y A es matriz de orden cuatro?

12) Resolver la ecuación: $\det(A - x \cdot I) = 0$ siendo:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4,5 \end{pmatrix}$$

13) Sea la sucesión de matrices: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- Defina la ley de formación de los elementos a_{ij} de $A_n = (a_{ij})$, con $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, en función de las coordenadas: i, j del elemento.
- Calcular, utilizando propiedades, los siguientes valores: $\det(A_2)$, $\det(A_3)$, $\det(A_4)$. Generalice, para: $\det(A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
- ¿Es posible escribir a A_2 , como el producto de una matriz simétrica S y una matriz antisimétrica M? En caso afirmativo encuentre S y M; en caso negativo justifique la respuesta.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

- La resolución es una propuesta, pero pueden resolverse utilizando otras propiedades y/o aplicación de las mismas en otro orden.

$$a) \begin{vmatrix} a & b & -c \\ 2d & 2e & -2f \\ g & h & -i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} (-1) \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = -3$$

- 1) 3) a) tercer columna
- 2) 3) a) segunda fila
- 3) Valor del determinante.

$$b) \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \frac{3}{2}$$

- 1) 3) b) intercambio de la primera y tercer fila. ($F_1 \leftrightarrow F_3$)

$$c) \begin{vmatrix} b & a-4c & c \\ e & d-ef & f \\ h & g-4i & i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \frac{3}{2}$$

- 1) $C_2' : C_2 + 4 C_3$
- 2) $C_1 \leftrightarrow C_2$

$$d) \begin{vmatrix} 2b-4c & b & c \\ 2e-4f & e & f \\ 2h-4i & h & i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} \begin{vmatrix} 2b & b & c \\ 2e & e & f \\ 2h & h & i \end{vmatrix} \stackrel{\omega}{=} 0$$

- 1) $C_1' : C_1 + 4 C_3$
- 2) C_1 y C_2 proporcionales.

e)