FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- FUNCIÒN SENO
- FUNCIÒN COSENO
- FUNCIÒN TANGENTE

FUNCIÒN COSECANTE

FUNCIÒN SECANTE

FUNCIÒN COTANGENTE

¿cómo medimos la abertura del ángulo?

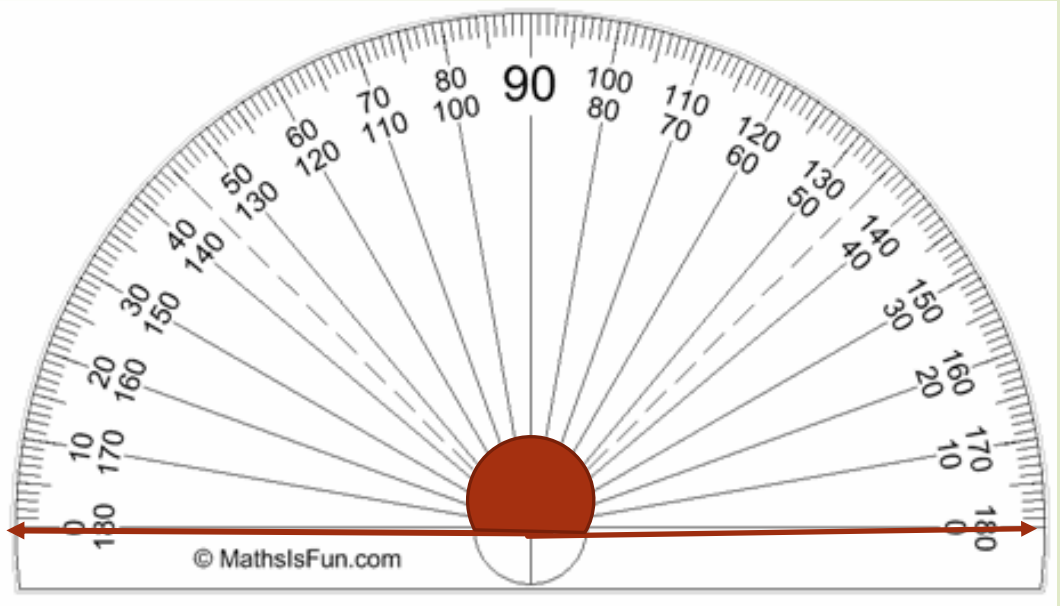
SISTEMA SEXAGESIMAL

$$\frac{\text{ángulo llano}}{180} = 1°$$ ➡ ángulo llano = 180. 1°= 180°

$$\frac{1°}{60} = 1' \Rightarrow 1° = 60.1' = 60'$$

$$\frac{1'}{60} = 1''$$

$$1' = 60.1'' = 60''$$

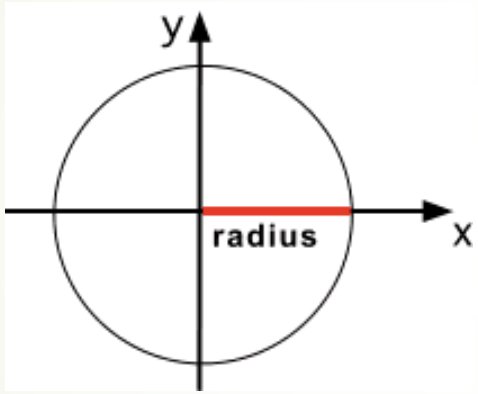


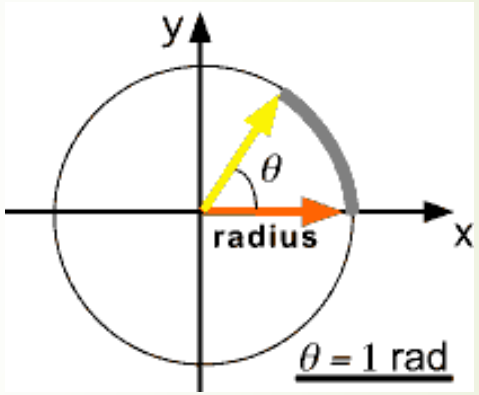
En la calculadora aparece con modo DEG

$\beta = 35° 40'50''$ $\alpha = -210° 30'45''$

SISTEMA RADIAL O CIRCULAR

Se denomina radian al ángulo que se forma cuando la longitud del arco barrido es igual al radio de la circunferencia.





- ✓ Si r=1, resulta que la longitud de la circunferencia expresadas en radianes es igual a 2 π radianes.

- ✓ El ángulo central total de 360° en el sistema sexagesimal, es igual a 2 π radianes. **180° es igual a π radianes**.

Sistema sexagesimal (grados)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Sistema circular (radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Grados a radianes

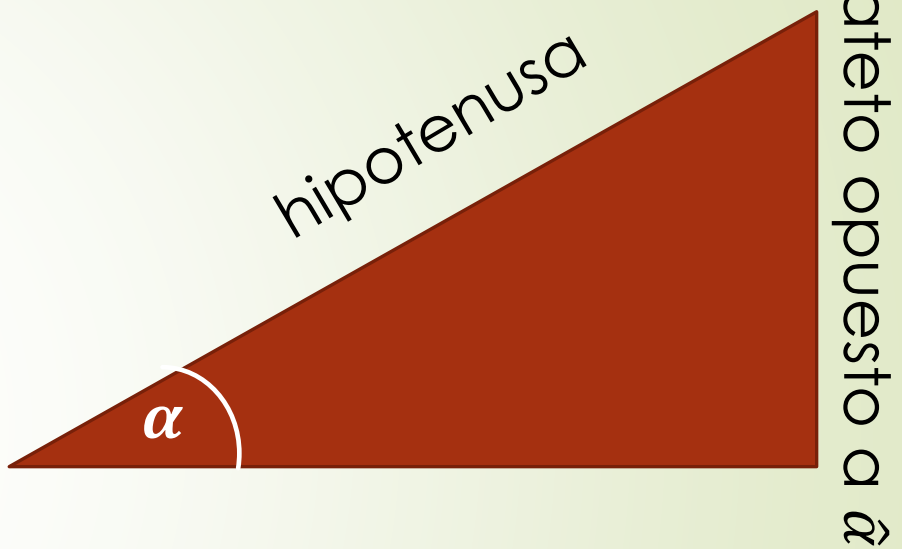
$$\frac{30°}{180°} = \frac{x}{\pi} \rightarrow x = \frac{30°}{180°}.\pi = \frac{\pi}{6}$$

Radianes a grados

$$\frac{x}{180°} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 180° = 30°$$

Definición de seno de un ángulo agudo

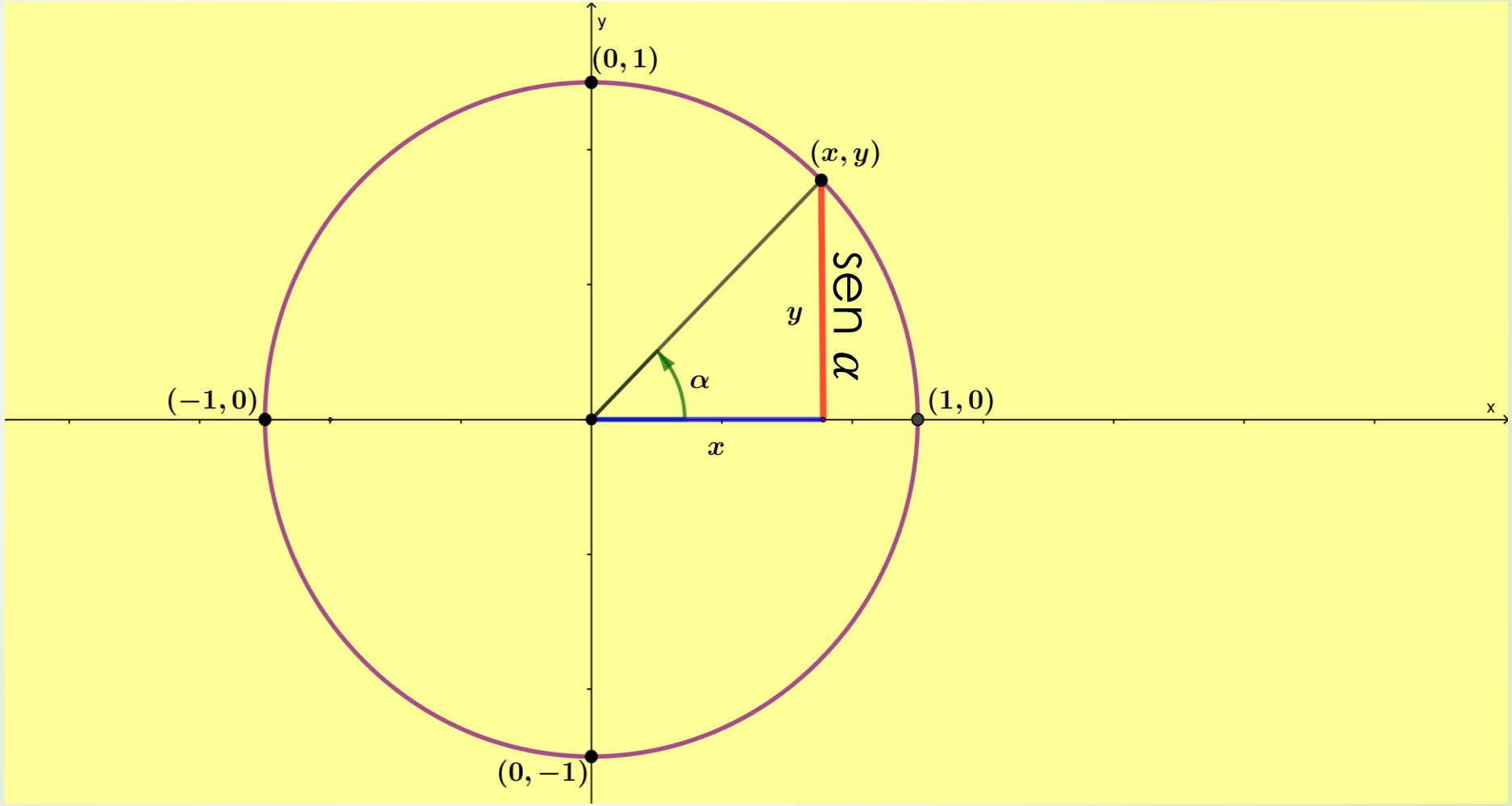
$$seno\ del\ ángulo\ \alpha = sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$



El valor del seno de un ángulo no depende de la longitud de los lados del triángulo rectángulo.

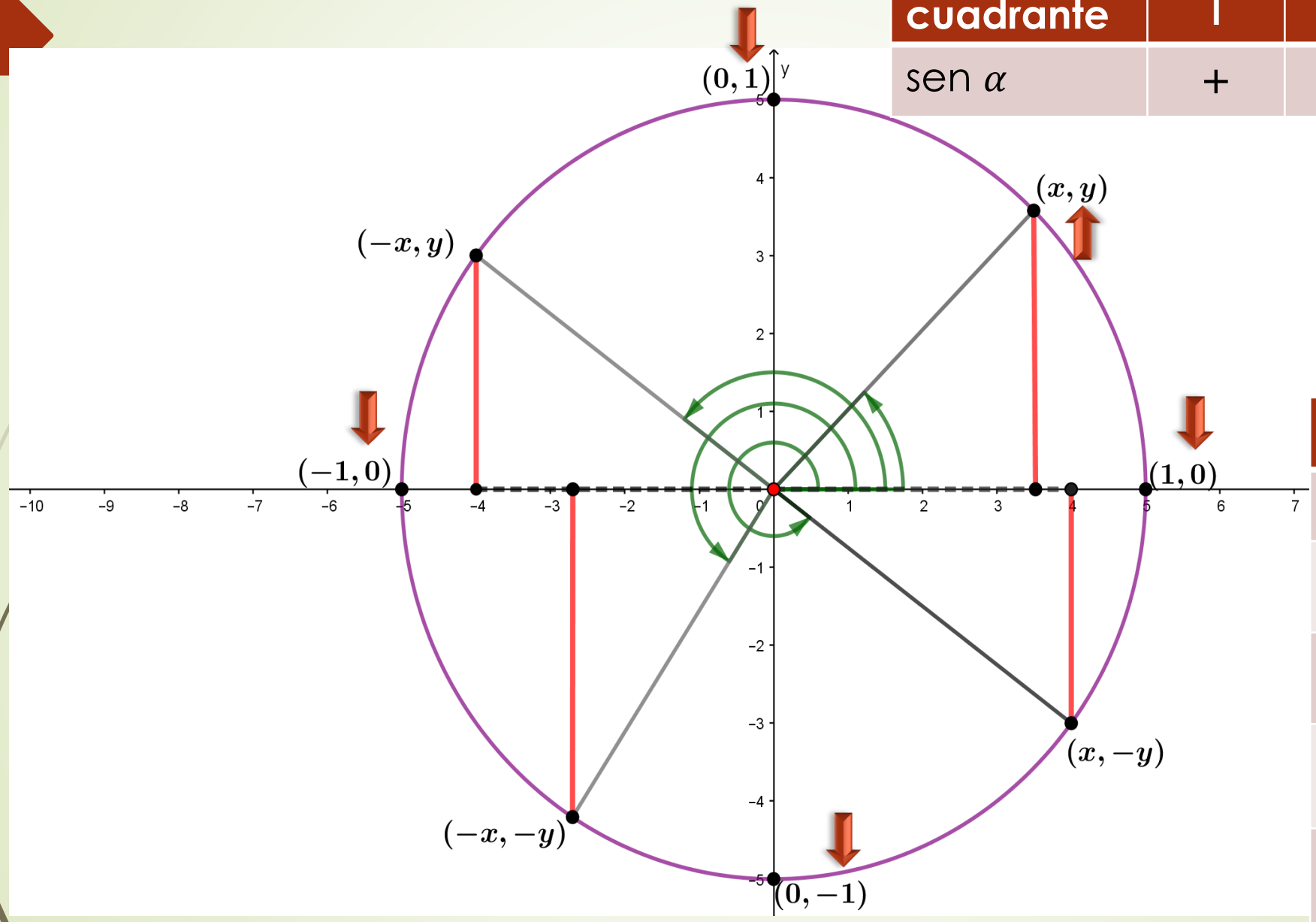
Circunferencia unitaria

Seno de un ángulo cualquiera



El seno es el valor correspondiente a la ***ordenada del punto***

cuadrante	I	II	III	IV
sen α	+	+	–	–

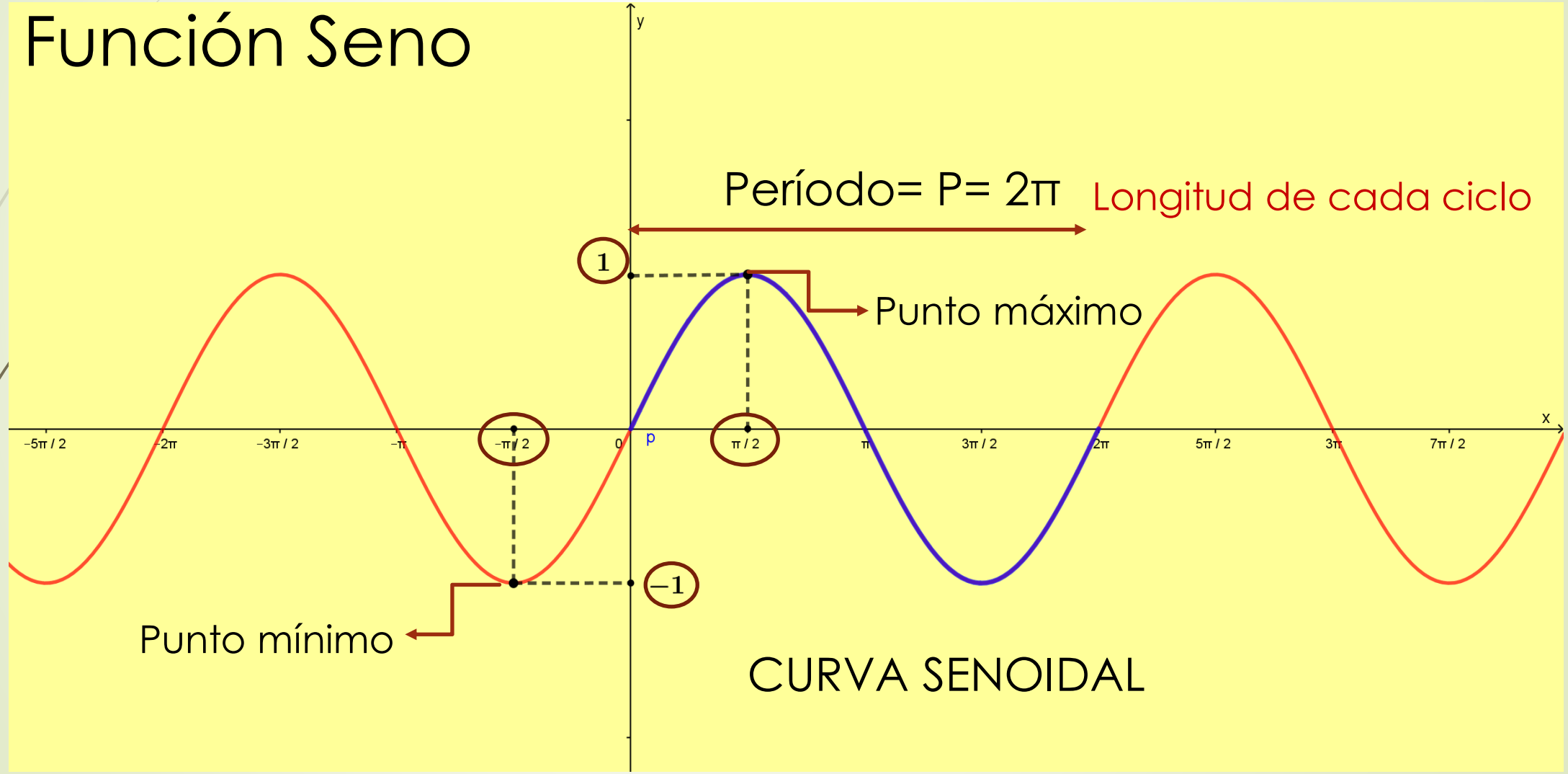


α	sen α
0°=0	0
$90° = \frac{\pi}{2}$	1
$180° = \pi$	0
$270° = \frac{3}{2}\pi$	−1
$360° = 2\pi$	0

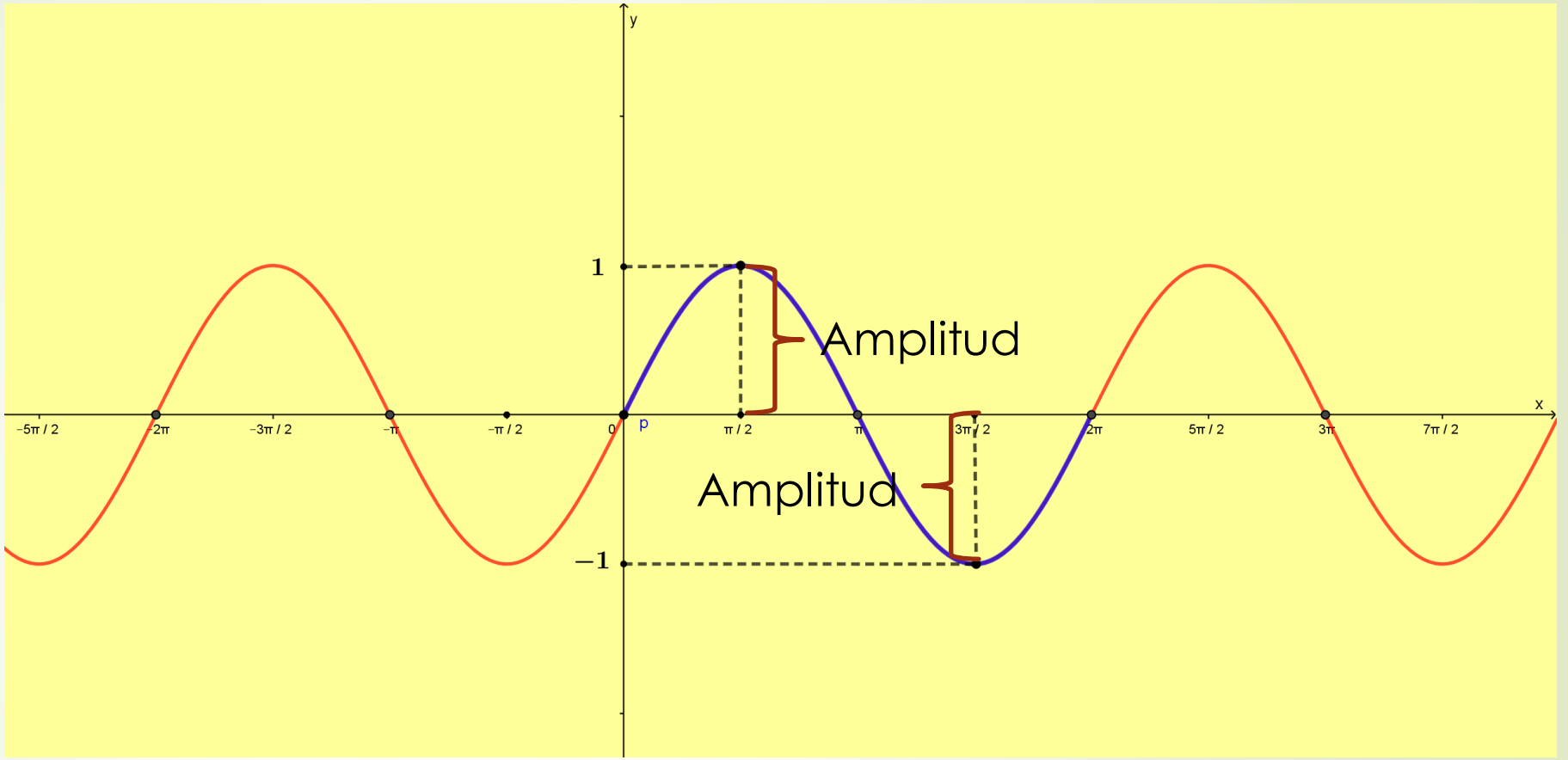
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad y = 1$$

x	0	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π
sen x	0	1	0	-1	0
sen (x+2π)	0	1	0	-1	0

Función Seno



Características de la función seno



Período = 2π

Dominio = $\mathbb{R}$

Amplitud= $|1| = |-1| = 1$

Imagen = [-1,1]

Ceros = $\{x \in \mathbb{R} / x = k\pi\}$

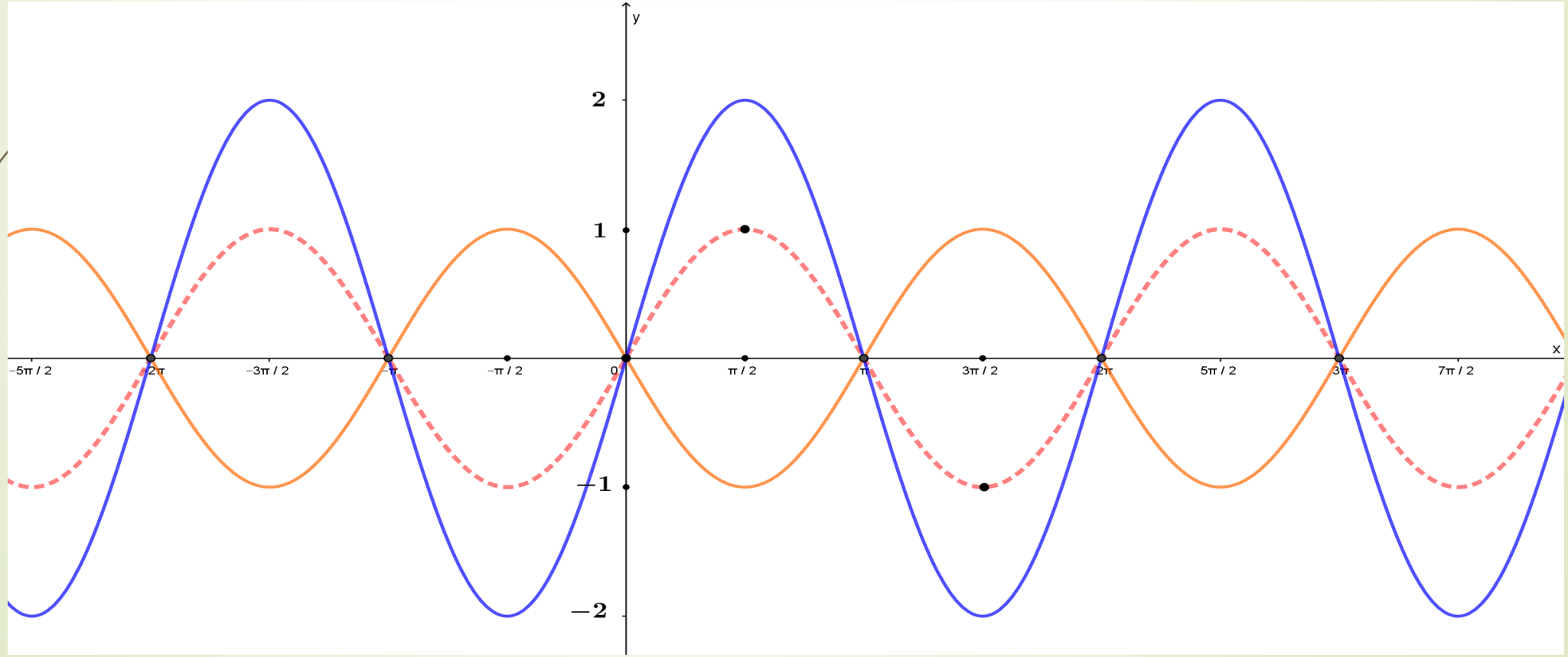
Ordenada al origen = sen 0 = 0

TRANSFORMACIONES DE LA FUNCIÓN SENO

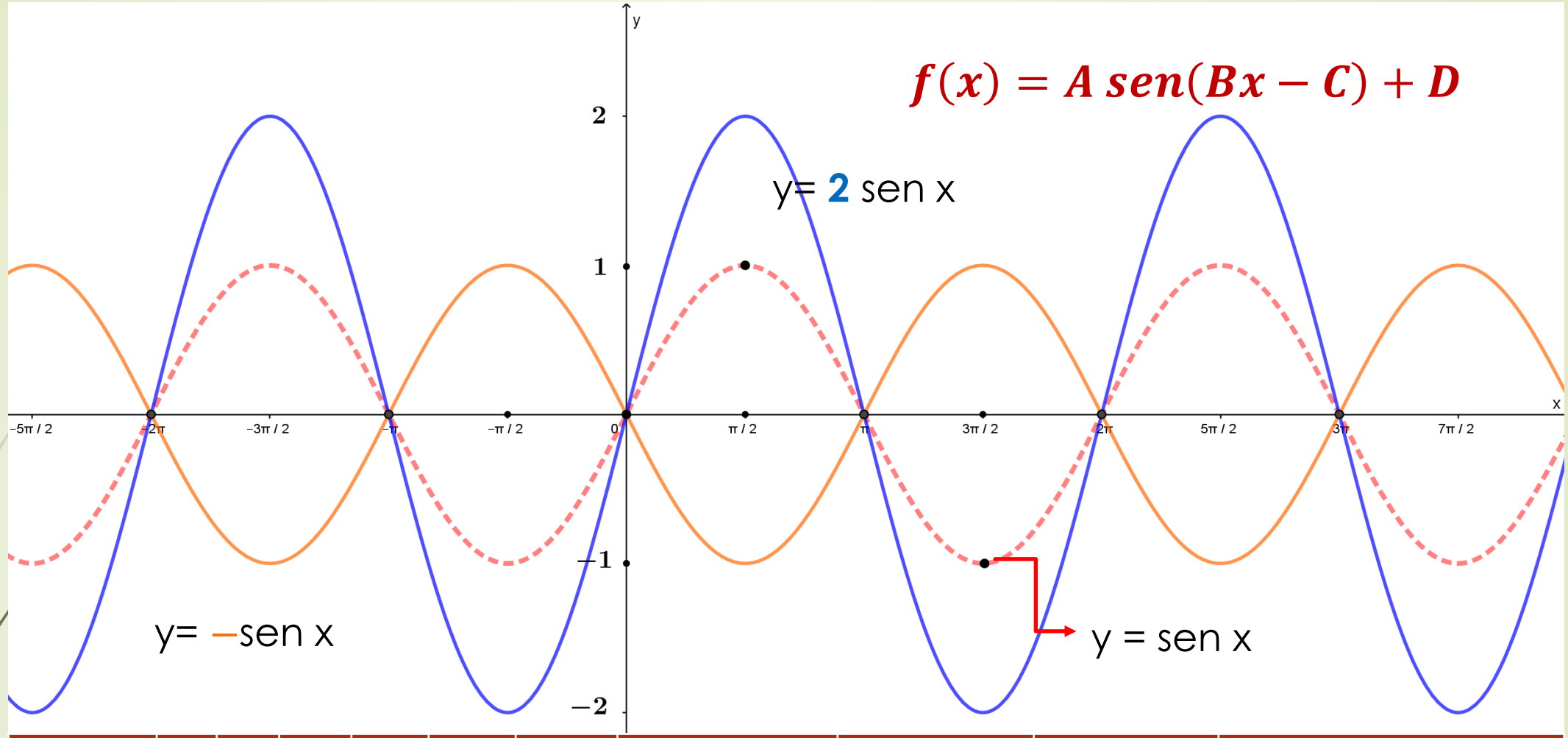
$$f(x) = A\ sen(Bx - C) + D$$

A: Amplitud **B: Pulsación** **C: Desplazamiento horizontal** **D: Desplazamiento vertical**

Período= $\frac{2\pi}{B}$ **Fase: (B x-C)** **Ángulos de desfasaje:** $Bx - C = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \frac{C}{B}$



$$f(x) = A\,sen(Bx - C) + D$$



	A	B	C	P	D	Fase	Ángulo de desfasaje	Dominio	Imagen	Simetría con respecto al eje x
2 sen x	2	1	0	2π	0	x	0	$\mathbb{R}$	[-2,2]	no
- sen x	1	1	0	2π	0	x	0	$\mathbb{R}$	[-1,1]	si

y= sen (2x)= **1**sen (**2**x-0)+0

$$f(x) = A\,sen(Bx - C) + D$$

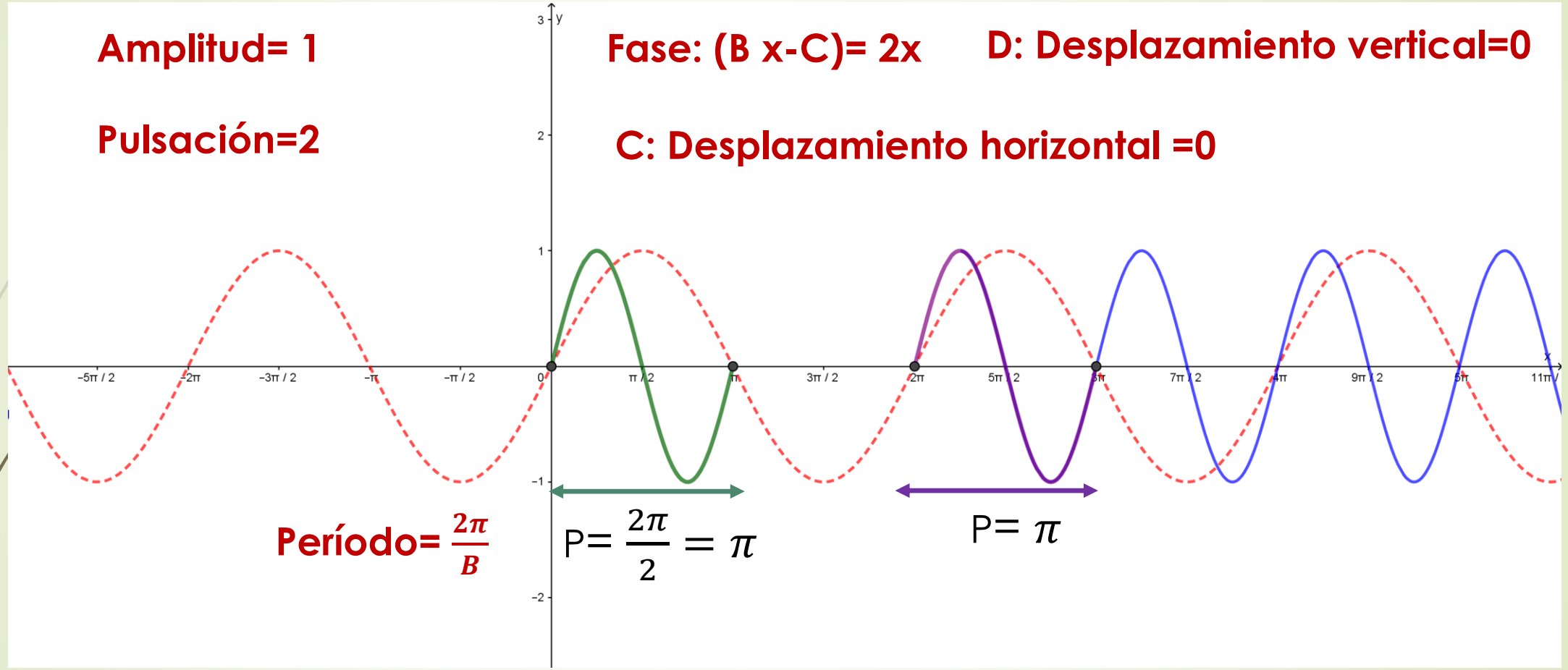
Amplitud= 1

Pulsación=2

Fase: (B x-C)= 2x

D: Desplazamiento vertical=0

C: Desplazamiento horizontal =0



Período= $\frac{2\pi}{B}$

P= $\frac{2\pi}{2} = \pi$

P= π

Ángulo de desfasaje: 2x= 0→ $x = 0 + 2\pi$

Int. con eje x 0= sen (2x) → 0 = sen α

$\pi = 2x$

x= $\pi/2$

Dominio = $\mathbb{R}$

Imagen= [-1,1]

$2\pi = 2x$

x= π

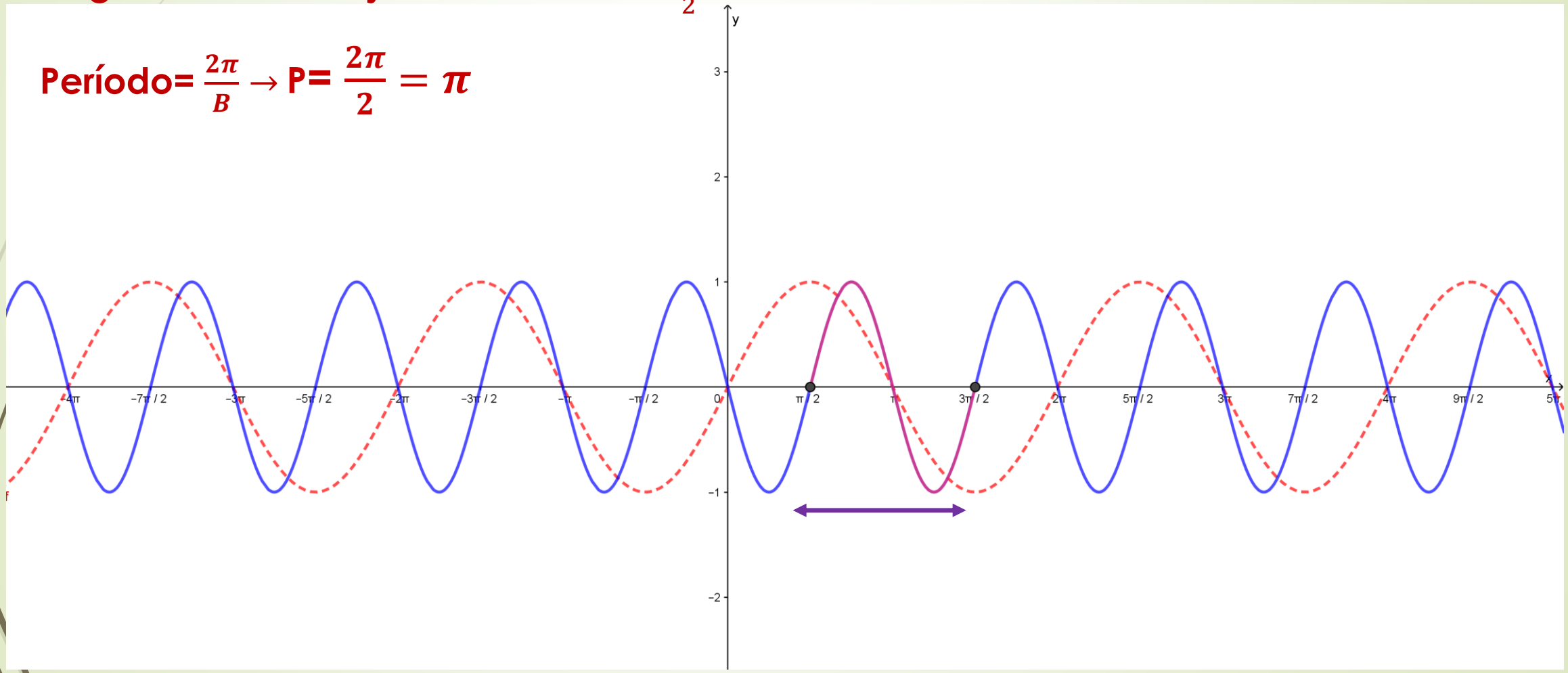
$y=\text{sen}(2x-\pi) = 1\text{sen}(2x-\pi)+0$

$$f(x) = A\,sen(Bx - C) + D$$

Amplitud= 1 **Pulsación=2** **Fase: (B x-C)= $2x-\pi$** **D: Desplazamiento vertical=0**

Ángulo de desfasaje: $2x-\pi = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ **Dominio = $\mathbb{R}$** **Imagen= [-1,1]**

Período= $\frac{2\pi}{B} \rightarrow P = \frac{2\pi}{2} = \pi$



EJERCITAMOS





	y= sen (3x)	y = 2sen $(x+\frac{\pi}{2})$	y= 2sen 2$(x+\frac{\pi}{3})$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Amplitud	1	2	2
Imagen	[-1,1]	[-2,2]	[-2,2]
Pulsación	3	1	2
Período $\frac{2\pi}{B}$	$\frac{2}{3}\pi = 120°$	$2\pi = 360°$	$\frac{2\pi}{2} = \pi = 180°$
Ángulo de desfasaje	3x= 0 →x=0	$x + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$	$2x + \frac{2}{3}\pi = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} = -30°$

Dada la función y = 2 $sen\,(3x-\pi)$, obtener analíticamente elementos característicos y graficar.

Dominio= $\mathcal{R}$ Amplitud = 2 Imagen= [-2,2] Pulsación=3

Período= $\frac{2\pi}{3} = 120°$ Fase= (3x-π)

Ángulo de desfasaje = $(3x-\pi) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 60° = x_0$ (Ángulo de inicio) $\longrightarrow y_0 = 0$

Ángulo donde finaliza un ciclo de la onda= $x_f = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$ =180°

$y_f = 0$

Punto máximo $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

$3x - \pi = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right).\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

Punto mínimo $\left(\frac{5\pi}{6}, -2\right)$

$3x - \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \left(\frac{3\pi}{2} + \pi\right).\frac{1}{3} = \frac{5\pi}{6}$ =150°

Intersección con eje x

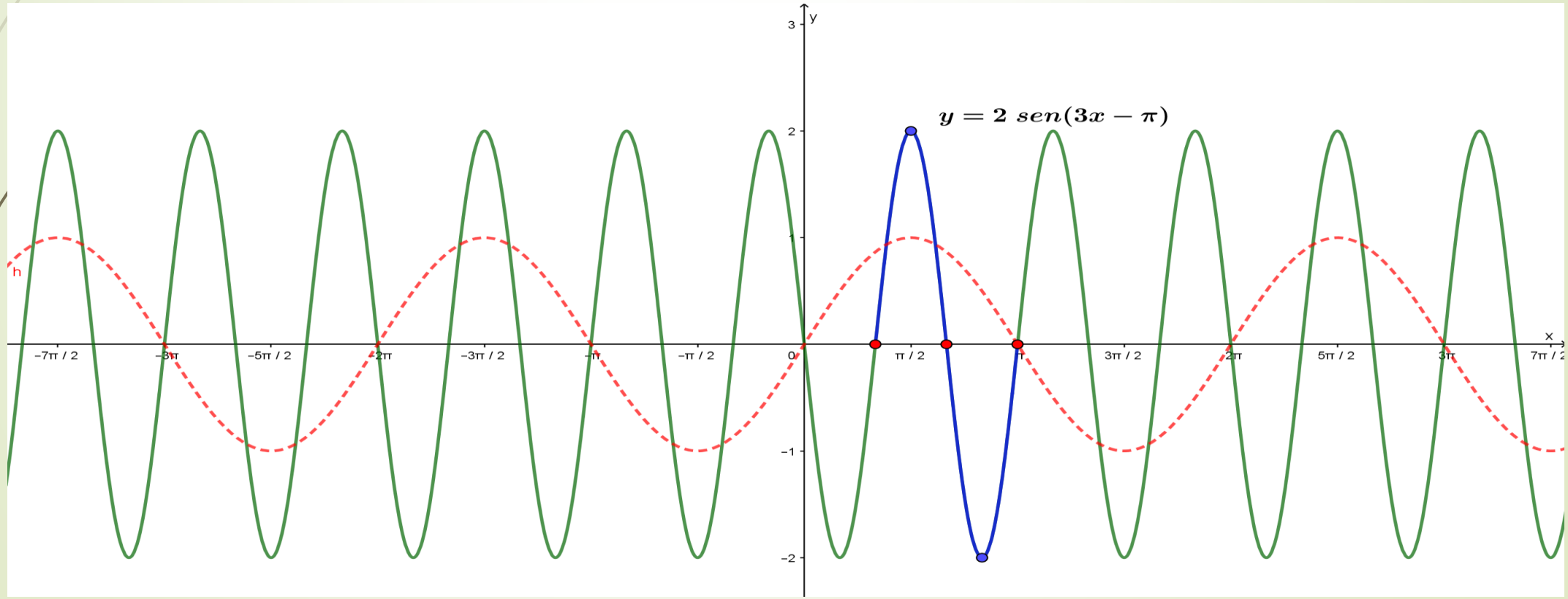
$0 = 2sen(3x - \pi)$ $\quad 0 = sen\ \alpha$

$3x - \pi = \alpha$

$0 = 3x - \pi \rightarrow \frac{\pi}{3} = x$ $\quad \pi = 3x - \pi \rightarrow \frac{2}{3}\pi = x$ $\quad 2\pi = 3x - \pi \rightarrow \pi = x$

	0	π/2	π	3/2π	2π
sen α	0	1	0	-1	0

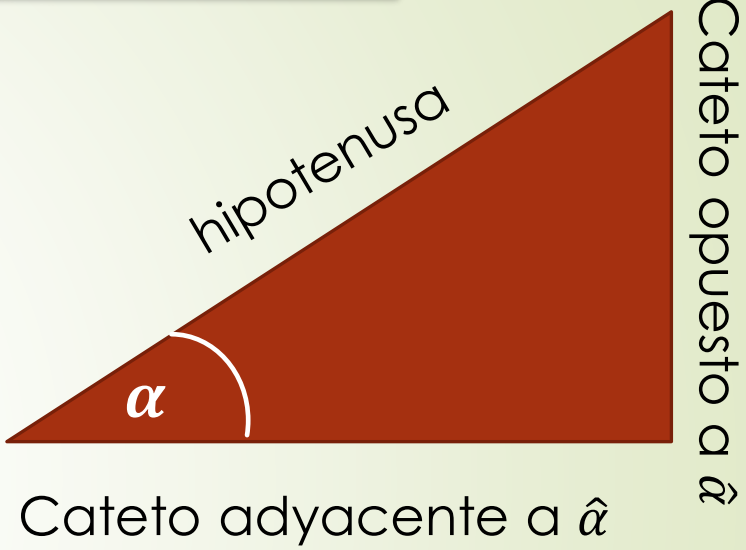
Intersección con eje y $\quad y = 2sen(3.0 - \pi) = 0$



Definición del coseno de un ángulo agudo

$$coseno\ del\ ángulo\ \alpha = cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

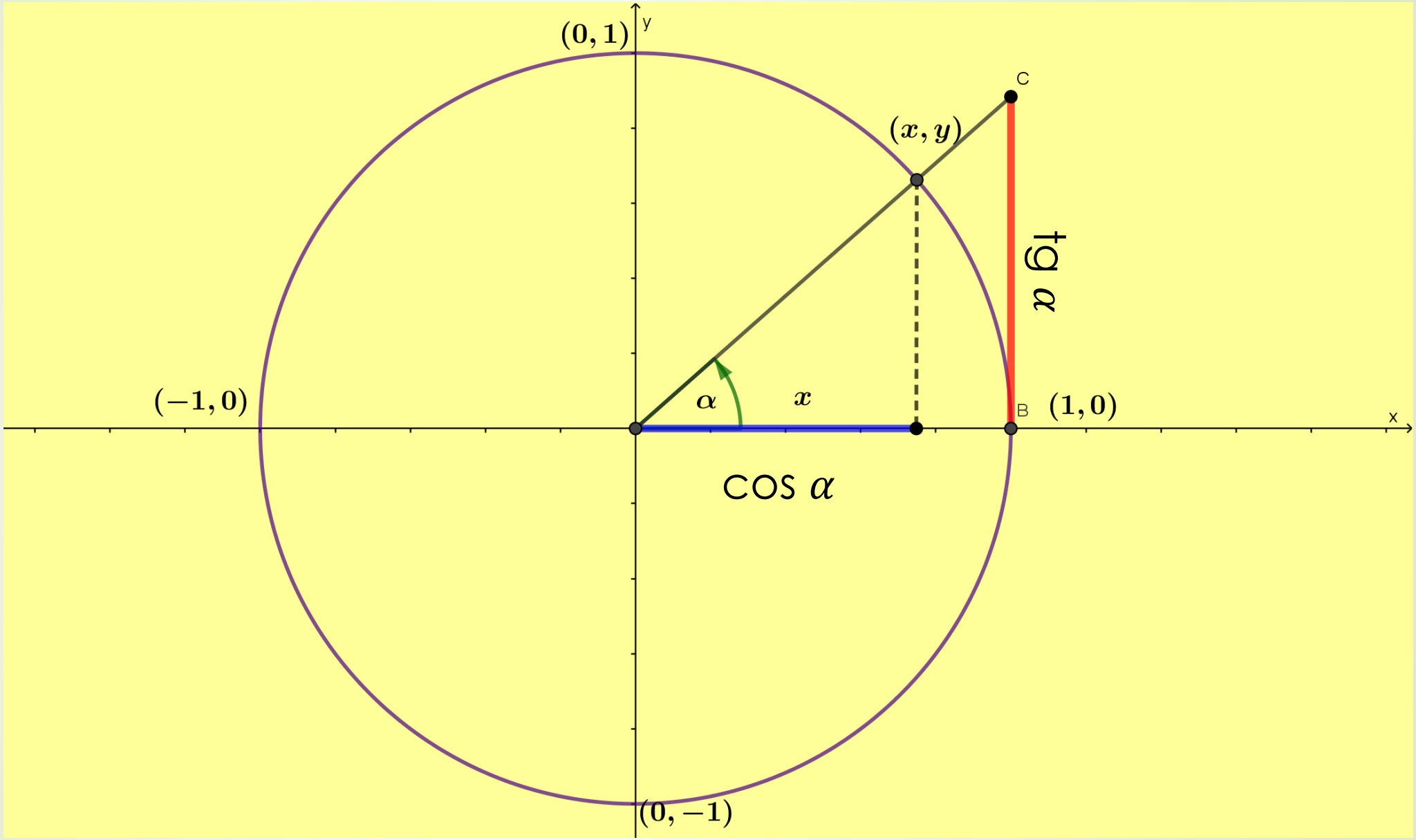
$$Tangente\ del\ ángulo\ \alpha = tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{cateto\ adyacente\ a}$$



$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa} : \frac{cateto\ adyacente\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

El valor del coseno y la tangente de un ángulo no depende de la longitud de los lados del triángulo rectángulo.

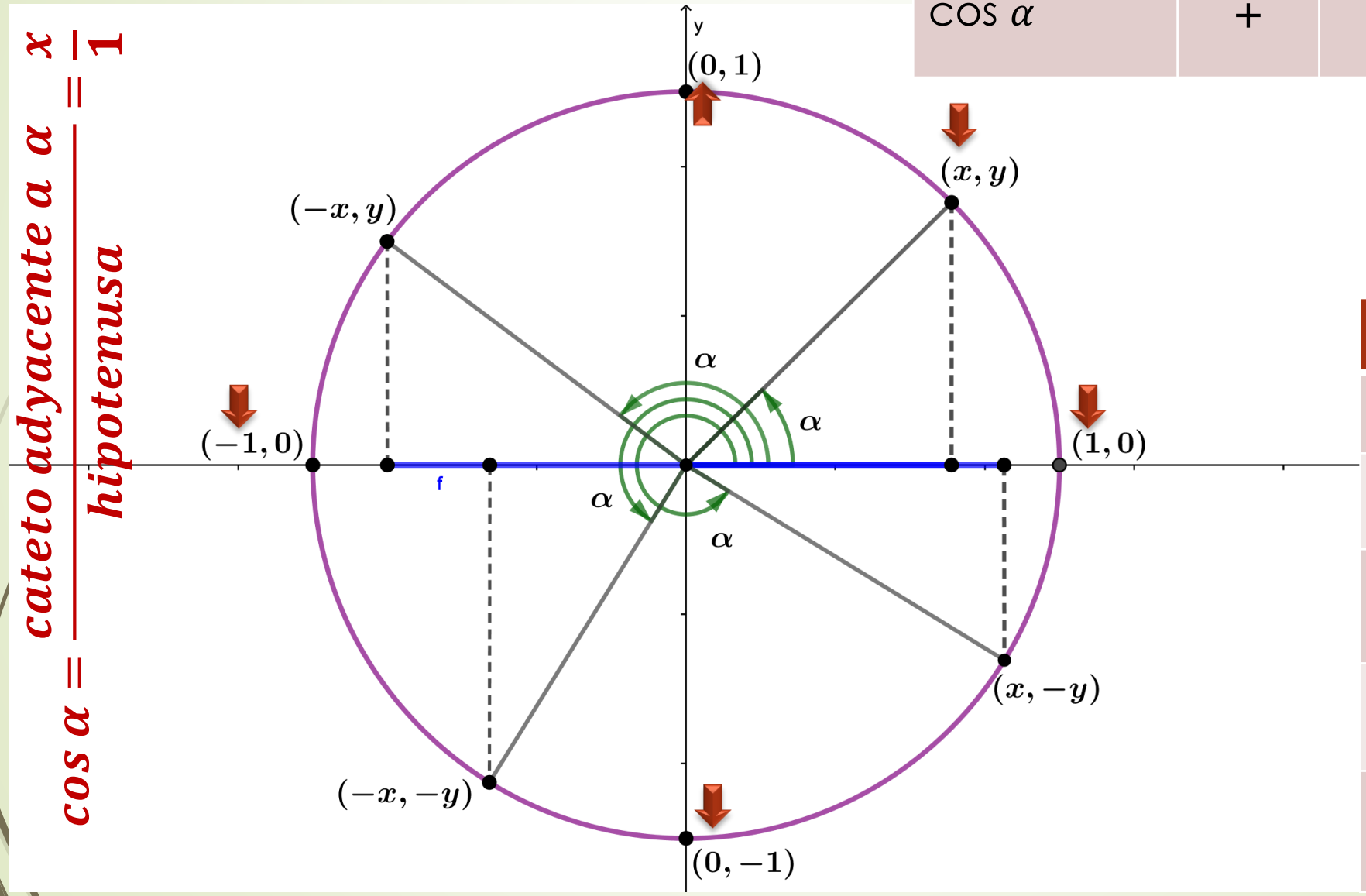
Circunferencia unitaria



El coseno es el valor correspondiente a la ***abscisa del punto***

cuadrante	I	II	III	IV
COS α	+	−	−	+

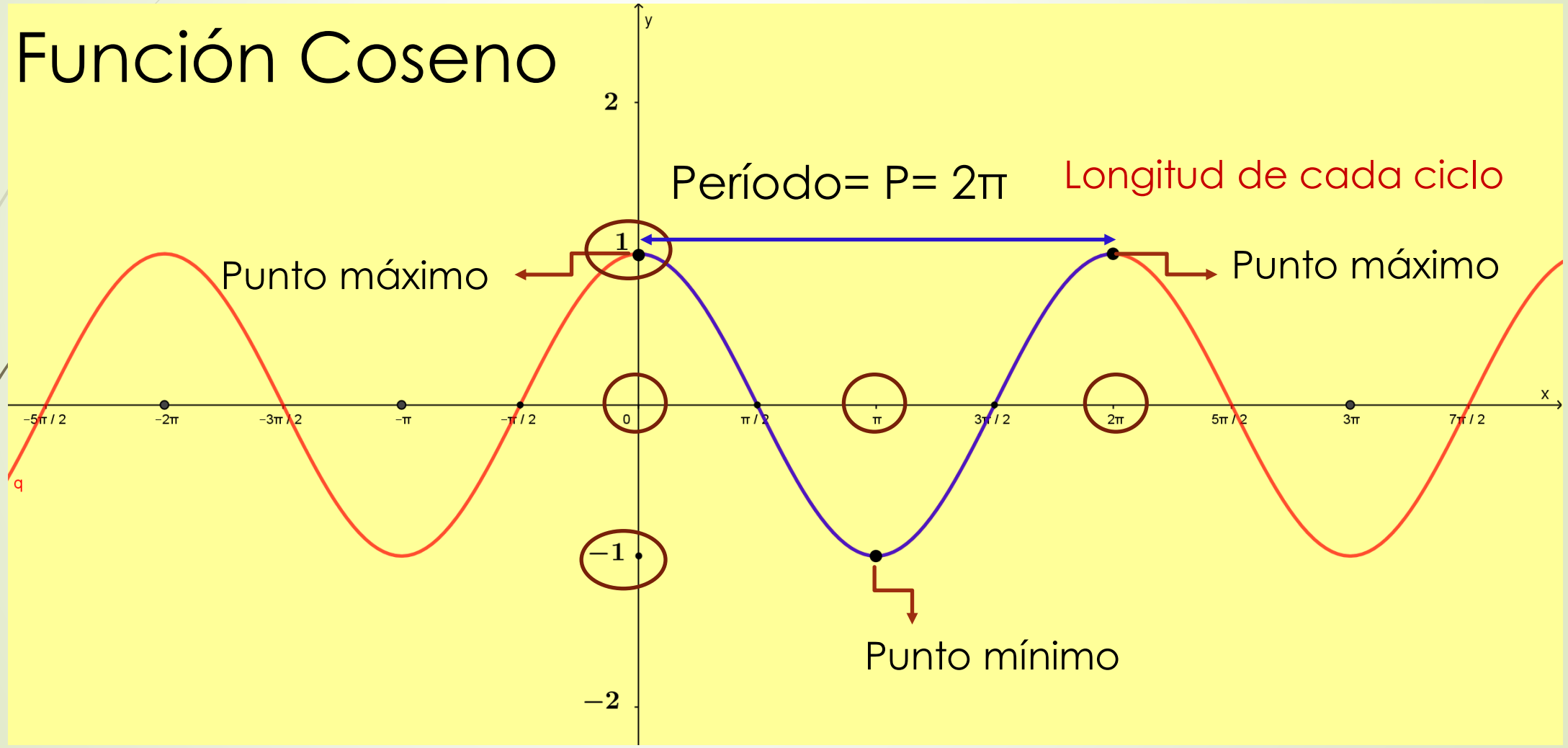
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1}$$

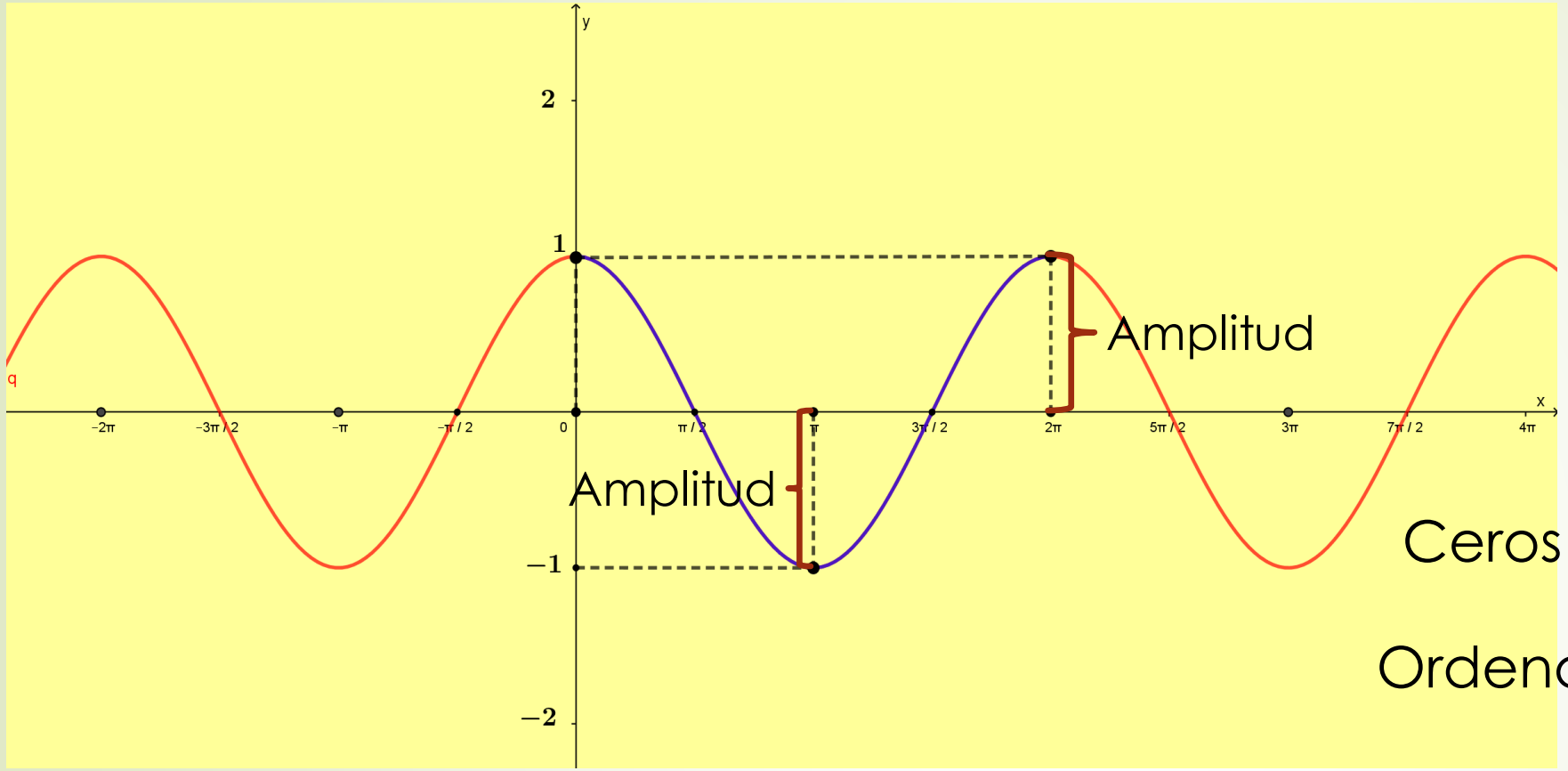


α	COS α
0°=0	1
$90° = \frac{\pi}{2}$	0
$180° = \pi$	−1
$270° = \frac{3}{2}\pi$	0
$360° = 2\pi$	1

x	0	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π
cos x	1	0	-1	0	1
cos (x+2kπ)	1	0	-1	0	1

Función Coseno





Dominio = $\mathbb{R}$

Imagen = [-1,1]

Amplitud= $|1| = |-1| = 1$

Período = 2π

Ceros = $\left\{x \in \mathbb{R} / x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

Ordenada al origen = cos 0 = 1

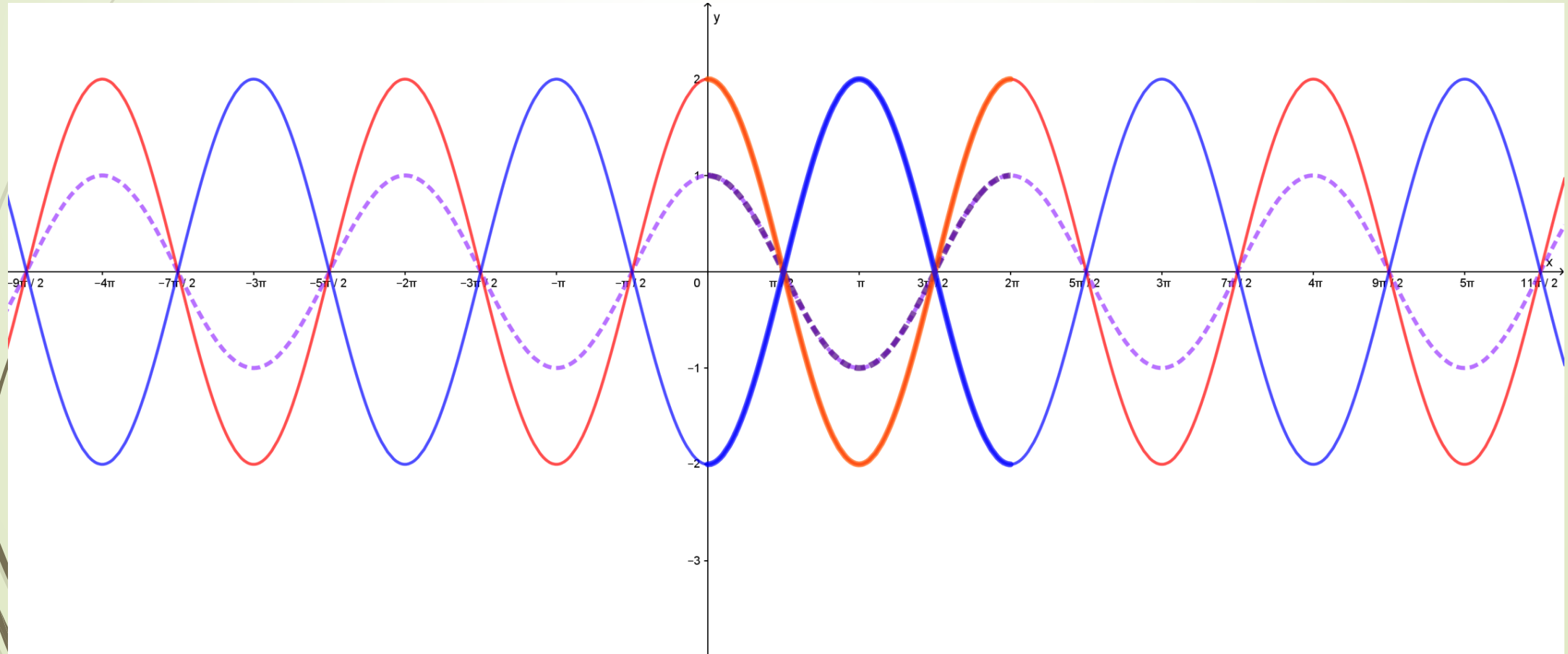
Características de la función coseno

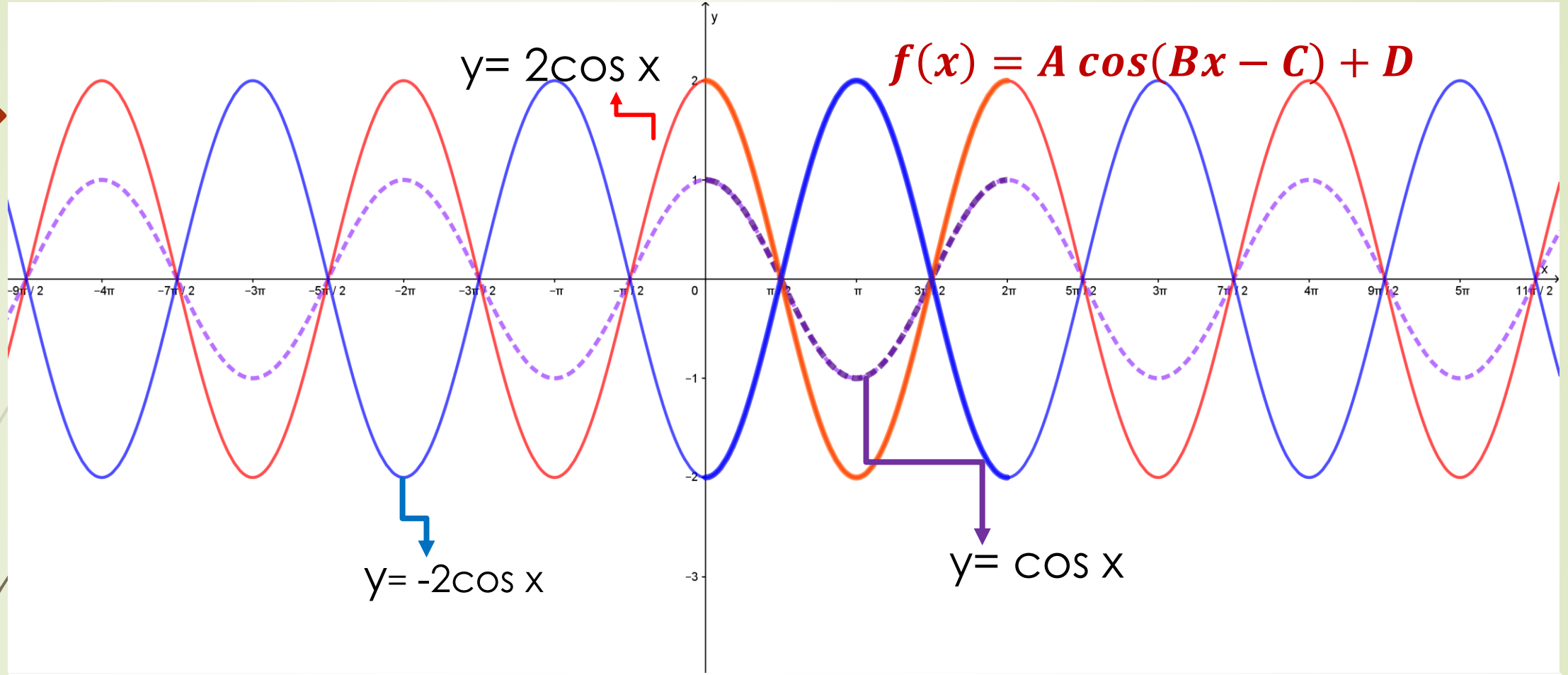
TRANSFORMACIONES DE LA FUNCIÓN COSENO

$$f(x) = A\,COS(Bx - C) + D$$

A: Amplitud **B: Pulsación** **C: Desplazamiento horizontal** **D: Desplazamiento vertical**

Período= $\frac{2\pi}{B}$ **Fase: (B x-C)** **Ángulos de desfasaje:** $Bx - C = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \frac{C}{B}$





	A	B	C	P	D	Fase	Ángulo de desfasaje	Dominio	Imagen	Simetría con respecto al eje x
-2cos x	2	1	0	2π	0	x	0	$\mathbb{R}$	[-2,2]	si
2 cos x	2	1	0	2π	0	x	0	$\mathbb{R}$	[-2,2]	no

y= cos (2x)= 1cos (2x-0)+0

$$f(x) = A\cos(Bx - C) + D$$

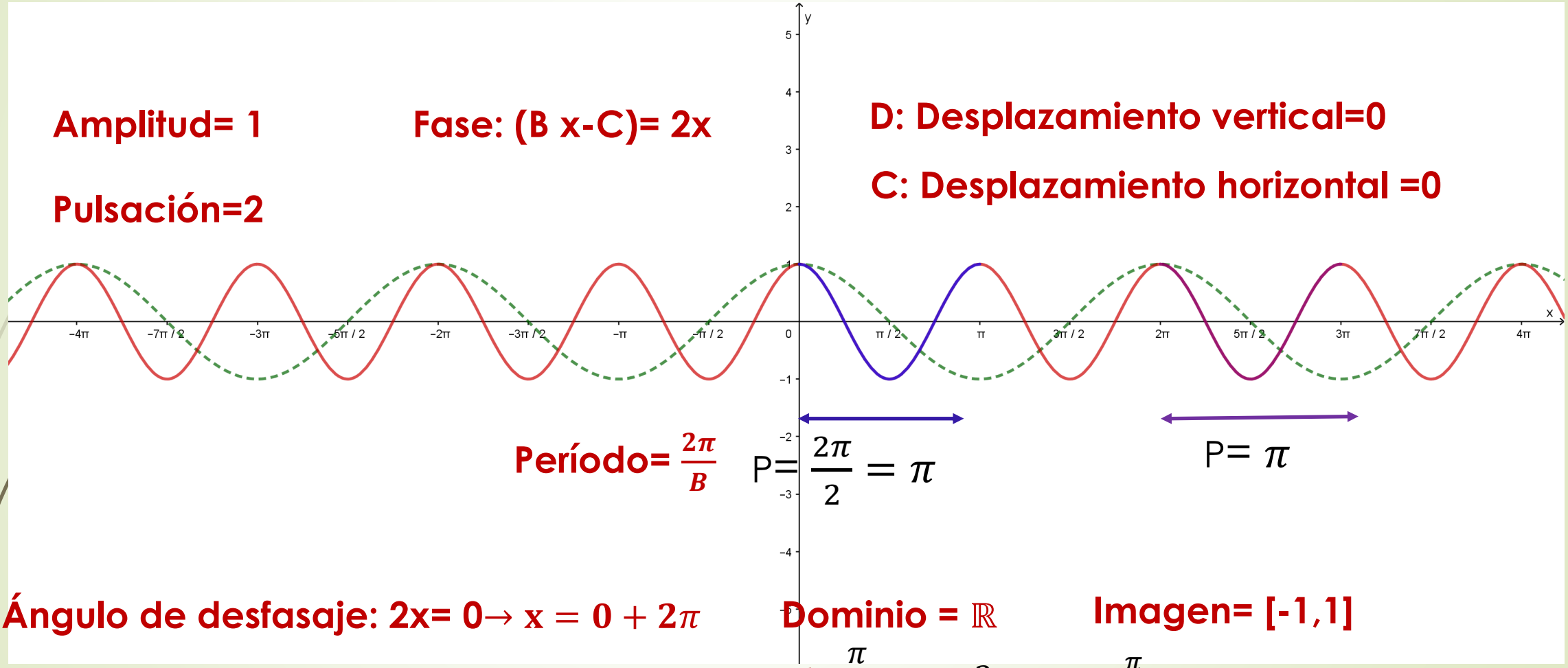
Amplitud= 1

Fase: (B x-C)= 2x

D: Desplazamiento vertical=0

Pulsación=2

C: Desplazamiento horizontal =0



Período= $\frac{2\pi}{B}$

P= $\frac{2\pi}{2} = \pi$

P= π

Ángulo de desfasaje: 2x= 0→ $x = 0 + 2\pi$

Dominio = $\mathbb{R}$

Imagen= [-1,1]

Int. con eje x

0= cos (2x) → 0 = cos α

$\frac{\pi}{2} = \alpha = 2x \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{2} = \alpha = 2x \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

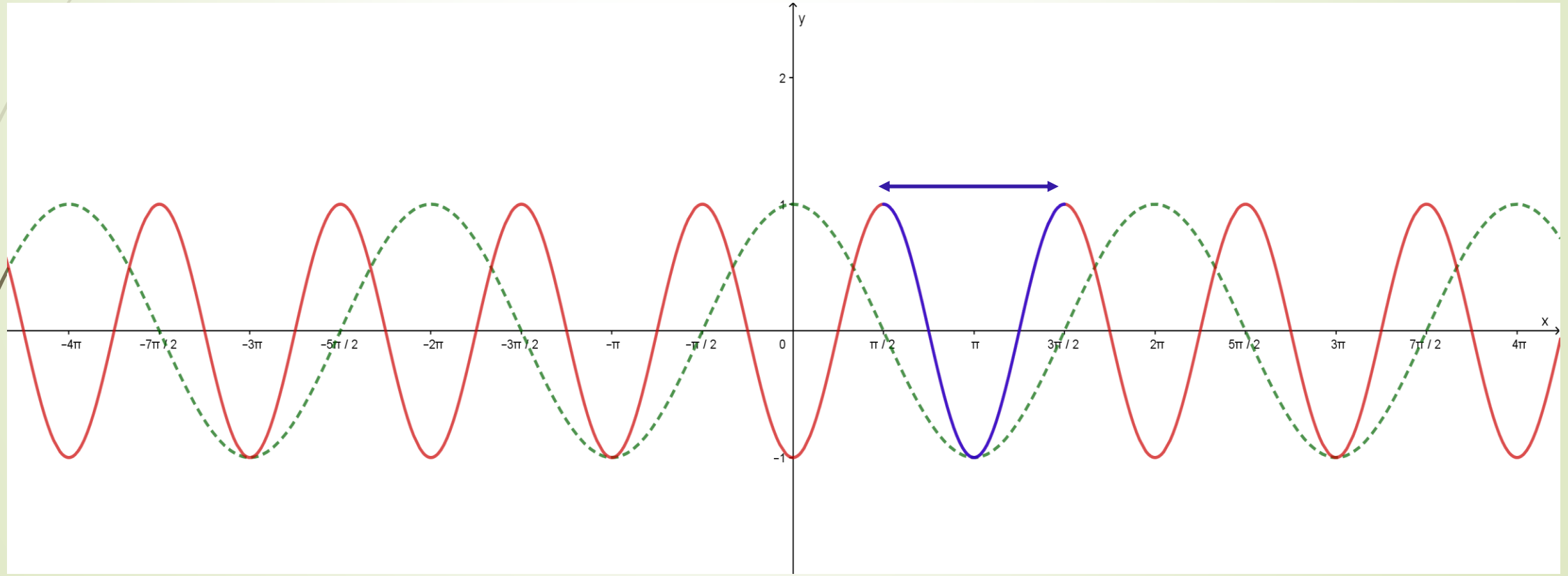
$y=\cos(2x-\pi) = 1\cos(2x-\pi)+0$

$$f(x) = A\cos(Bx - C) + D$$

Amplitud= 1 **Pulsación=2** **Fase: (B x-C)= $2x-\pi$** **D: Desplazamiento vertical=0**

Ángulo de desfasaje: $2x-\pi = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi$ **Dominio = $\mathbb{R}$** **Imagen= [-1,1]**

Período= $\frac{2\pi}{B} \rightarrow P = \frac{2\pi}{2} = \pi$



EJERCITAMOS

	$y= \cos(6x)$	$y = -3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$y= \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Amplitud	1	3	1
Imagen	[-1,1]	[-3,3]	[-1,1]
Pulsación	6	1	1/2
Período $\frac{2\pi}{B}$	$\frac{1}{3}\pi = 60°$	$2\pi = 360°$	$\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi = 720°$
Ángulo de desfasaje	$6x= 0 \rightarrow x=0$	$x - \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}x = 0 \rightarrow x = 0$

Dada la función y = 2 $cos\,(3x - \pi) + 1$, obtener analíticamente elementos característicos y graficar.

Dominio= $\mathcal{R}$ Amplitud = 2 Imagen=[-1.2+1,1.2+1]=[-1,3]

Pulsación = 3

Período= $\frac{2\pi}{3} = 120°$ Fase= (3x-π)

Ángulo de desfasaje = $(3x - \pi) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 60° = x_0$ (Ángulo de inicio) $\longrightarrow$ y_0 =3

Ángulo donde finaliza un ciclo de la onda= $x_f = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$ =180°

y_f =3

Punto máximo $\left(\frac{\pi}{3}, 3\right)$ y $(\pi, 3)$ Punto mínimo $\left(\frac{2\pi}{3}, -1\right)$

$3x - \pi = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 60°$ $3x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi.\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$ =120°

$3x - \pi = 2\pi \rightarrow x = \pi = 180°$

Intersección con eje x

cuadrante	I	II	III	IV
cos α	+	−	−	+

$0 = 2cos(3x - \pi)+1$

$\frac{-1}{2} = cos\ \alpha$ Con calculadora Shift cos (-0,5) = 120°

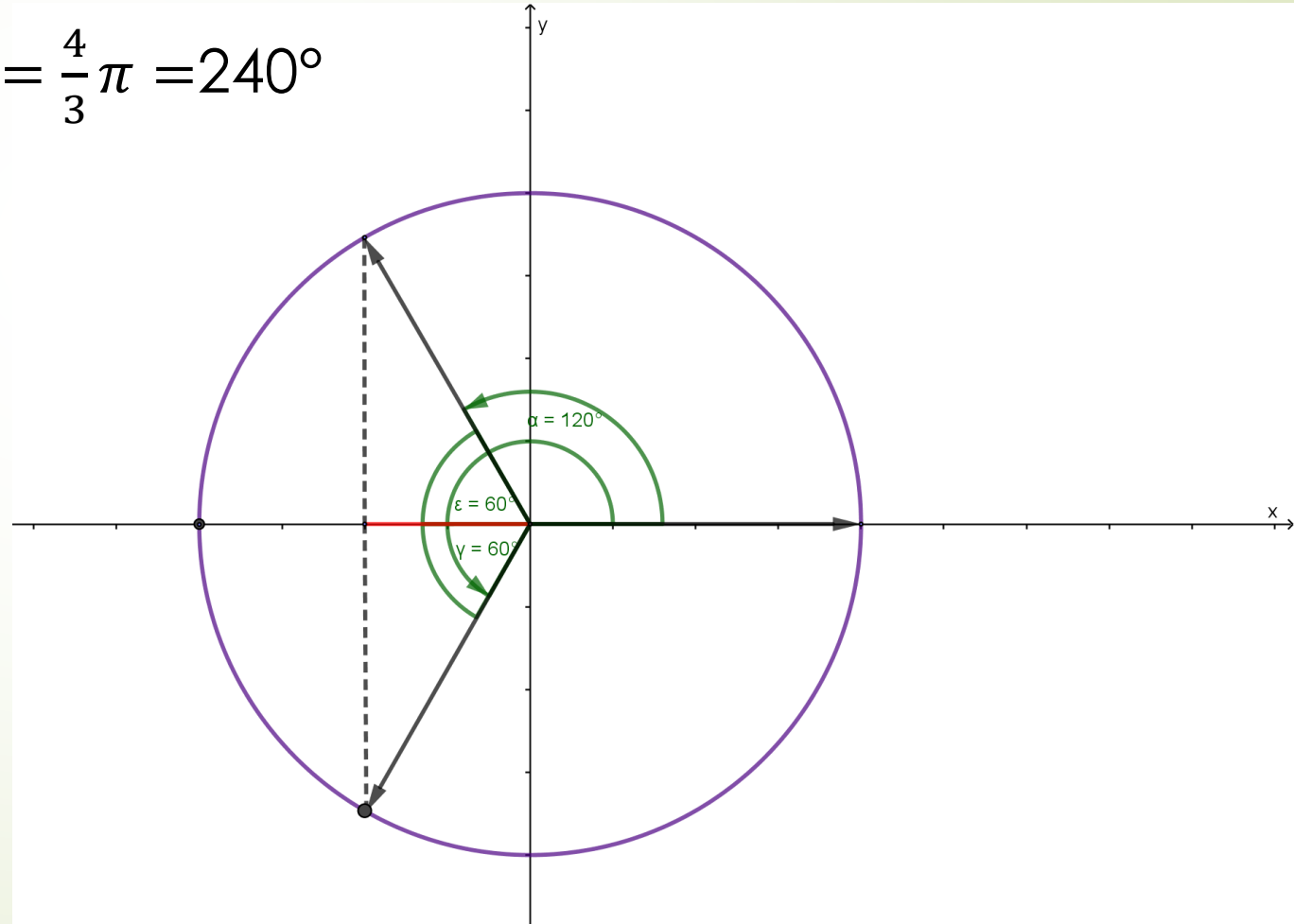
$\alpha = \frac{2}{3}\pi$ $\frac{240°}{180°} = \frac{x}{\pi} \rightarrow x = \frac{4}{3}\pi = 240°$

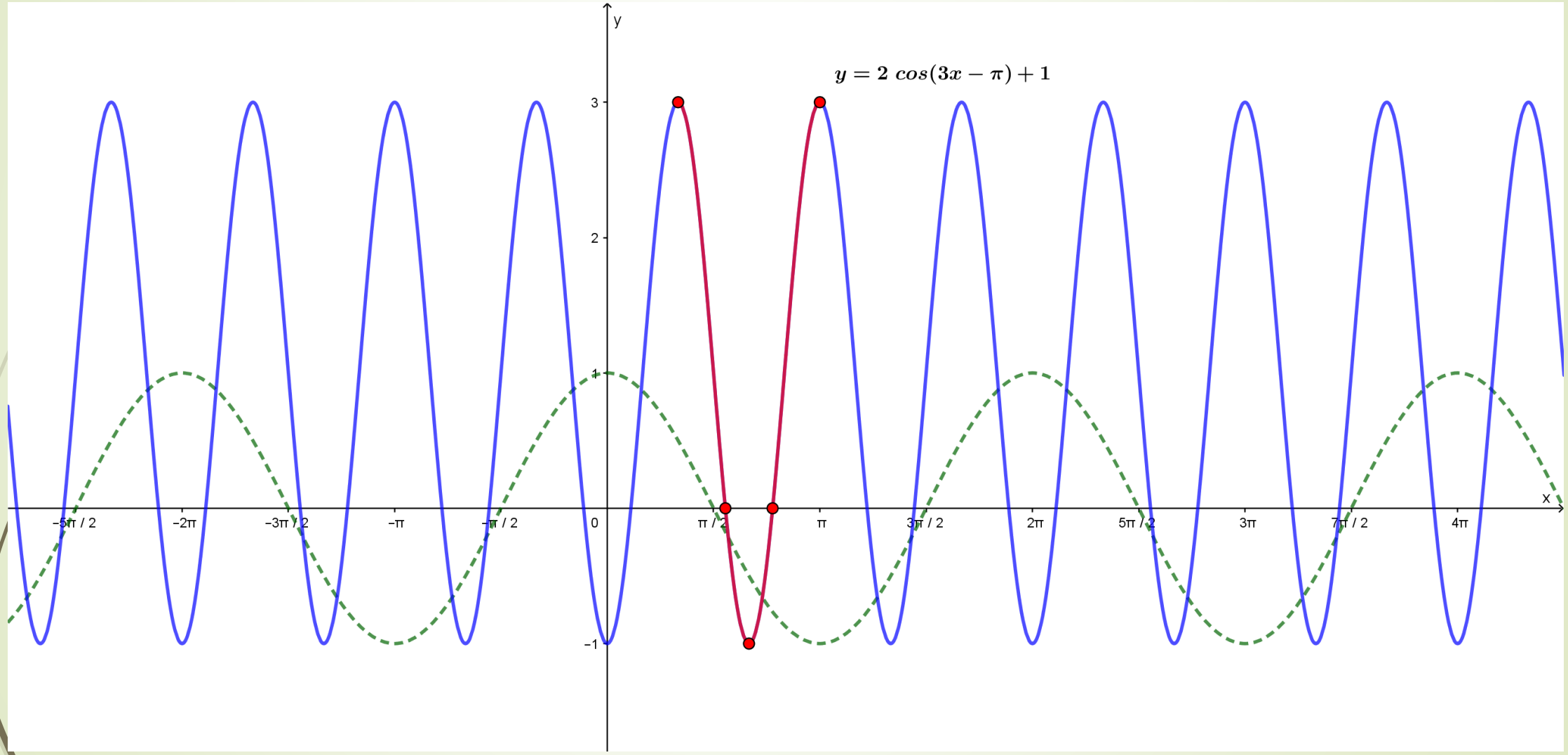
- $3x - \pi = \frac{2}{3}\pi$

$x = \left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right).\frac{1}{3} = \frac{5}{9}\pi = 100°$

- $3x - \pi = \frac{4}{3}\pi$

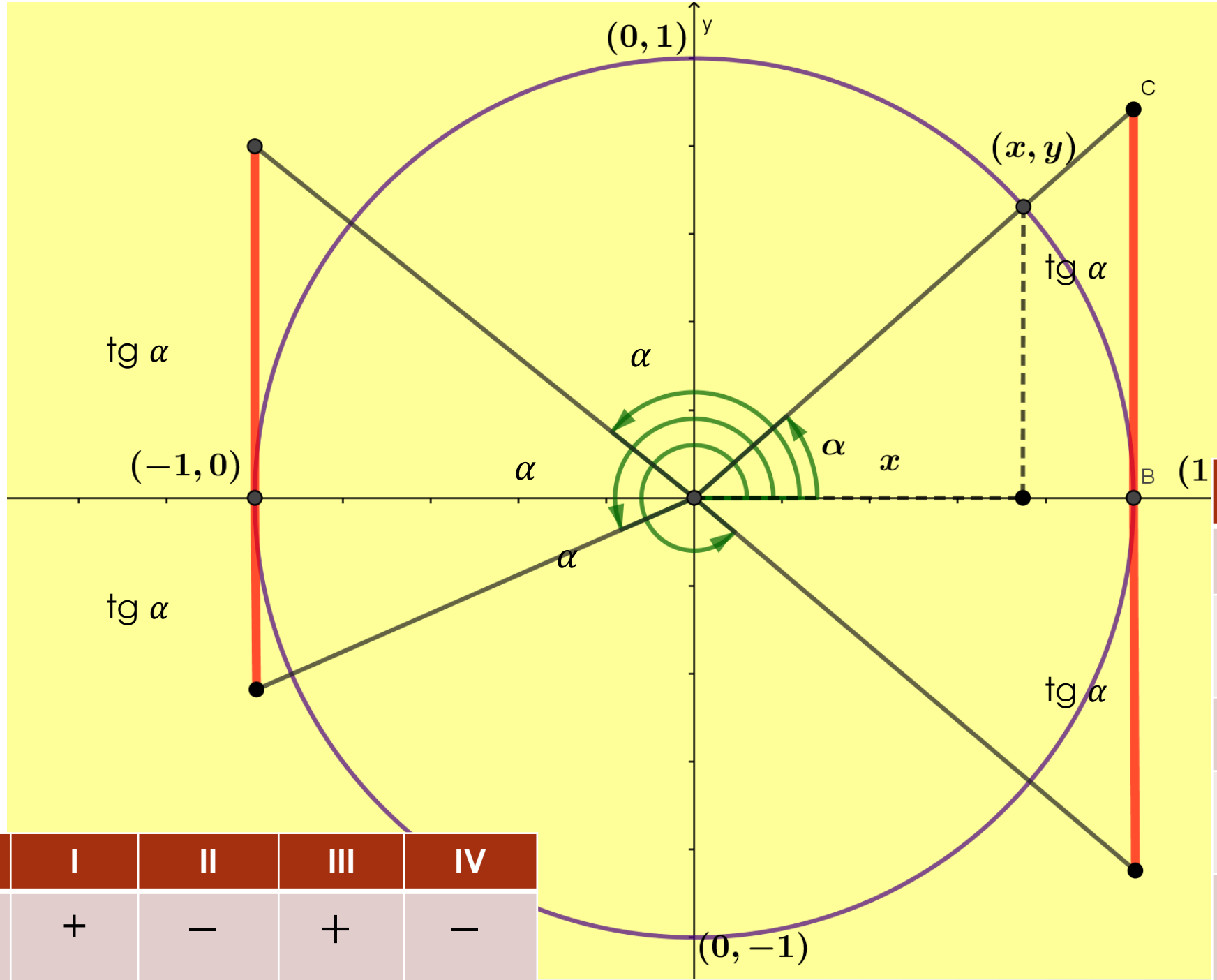
$x = \left(\frac{4}{3}\pi + \pi\right).\frac{1}{3} = \frac{7}{9}\pi = 140°$




$y = 2\ cos(3x - \pi) + 1$
y
x
3
2
1
−1
−5π / 2
−2π
−3π / 2
−π
−π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
3π
7π / 2
4π

FUNCIÓN TANGENTE

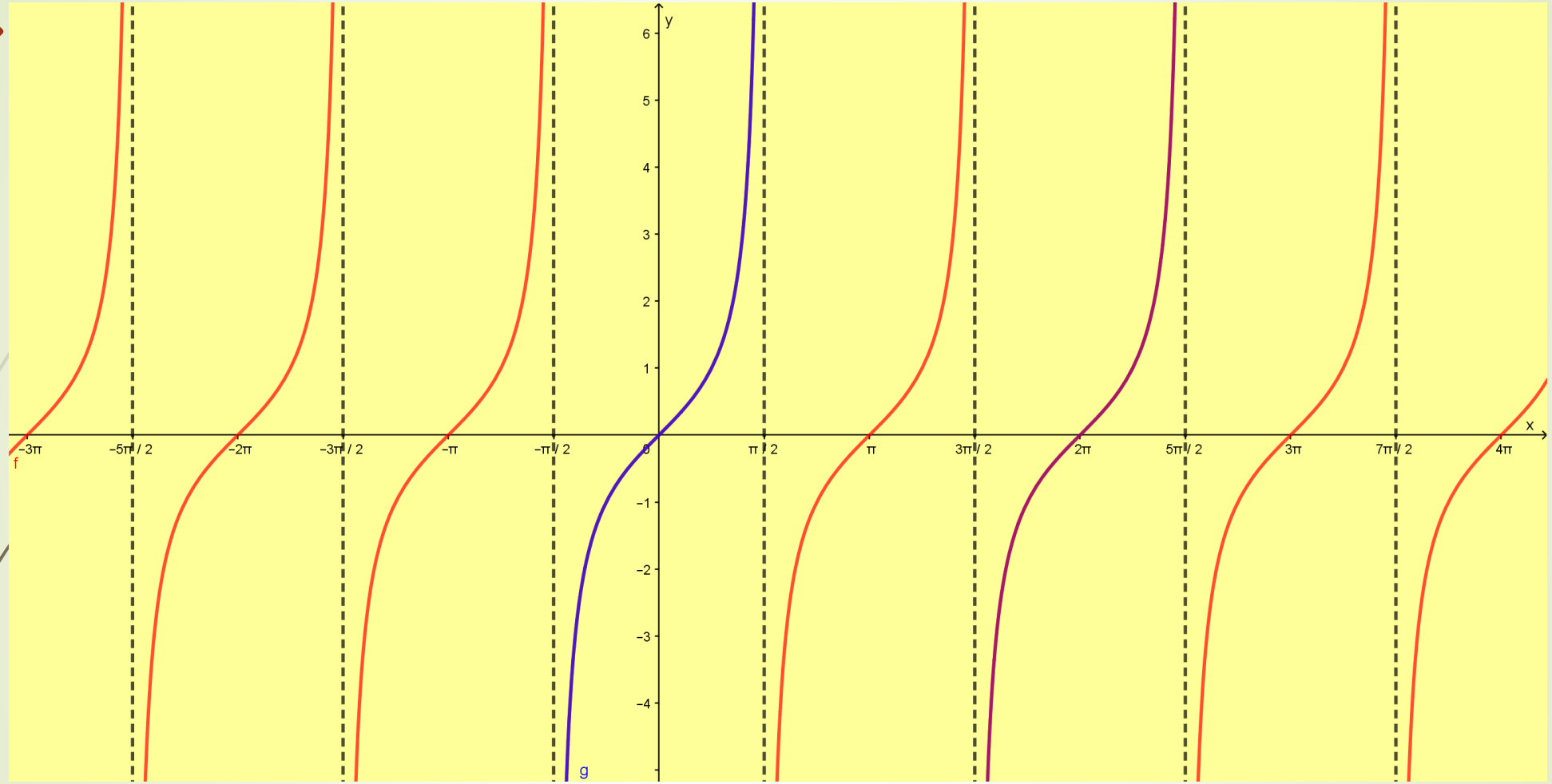
- CONSIDERACIONES PREVIAS
- DEFINICIÓN, GRÁFICA, TRANSFORMACIONES



cuadrante	I	II	III	IV
$\frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\,\alpha$	+	−	+	−

α	tg α
0°=0	0
90°= $\frac{\pi}{2}$	No existe
180°= π	0
270° = $\frac{3}{2}\pi$	No existe
360° = 2π	0

CARACTERISTICAS DE LA FUNCIÓN TANGENTE



Dominio $= \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

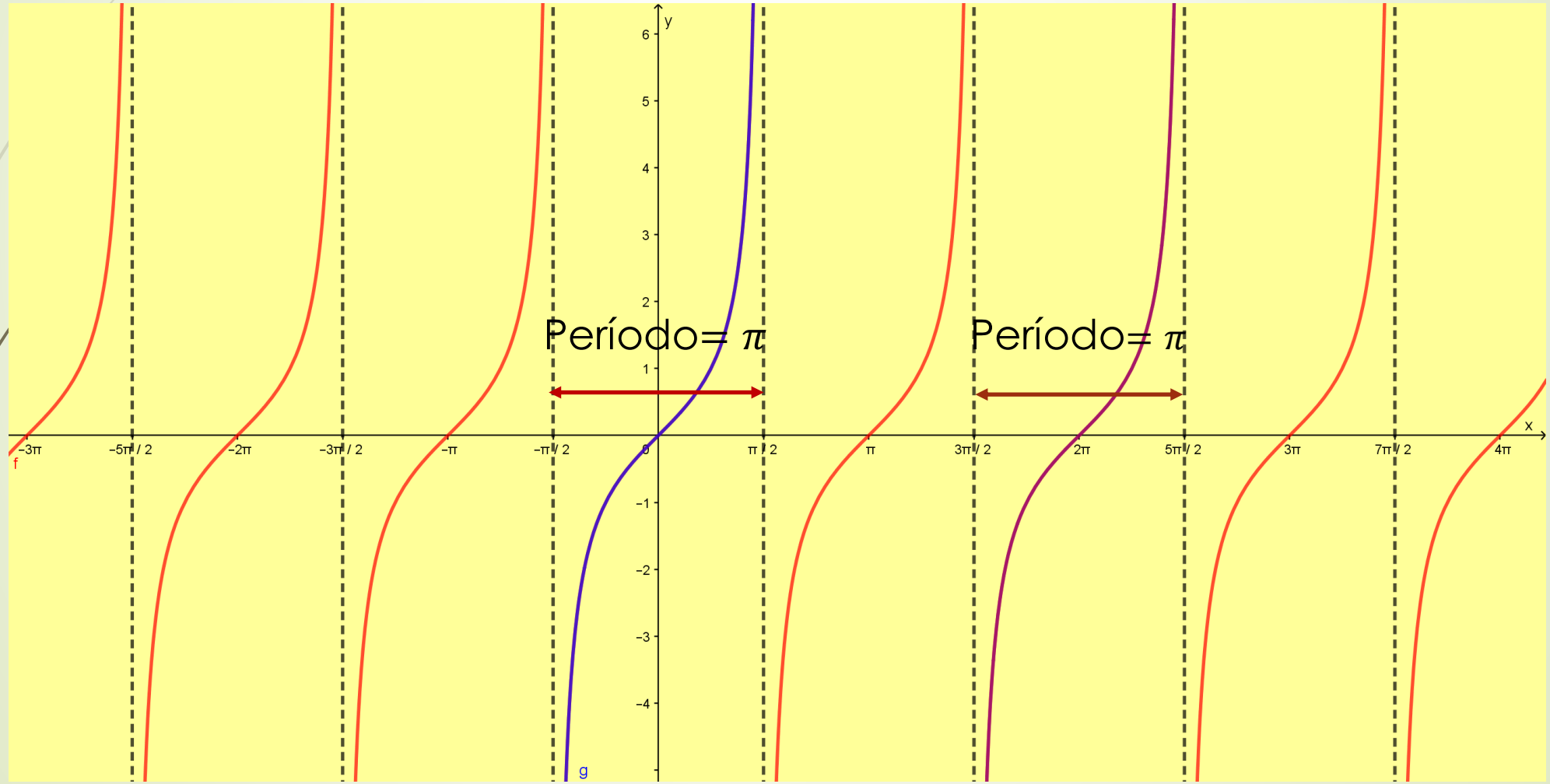
Imagen $= \mathbb{R}$

Período $= \pi$

Ceros $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = k\pi\}$

Ordenada al origen = sen 0 = 0

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3/4\pi$	π	$3/2\pi$	2π
tg x= $\frac{sen\ x}{\cos x}$	0	1	No existe	−1	0	No existe	0
tg (x+kπ)	0	1	No existe	−1	0	No existe	0



TRANSFORMACIONES DE LA FUNCIÓN TANGENTE

$$f(x) = a\, tg(Bx - C) + D$$

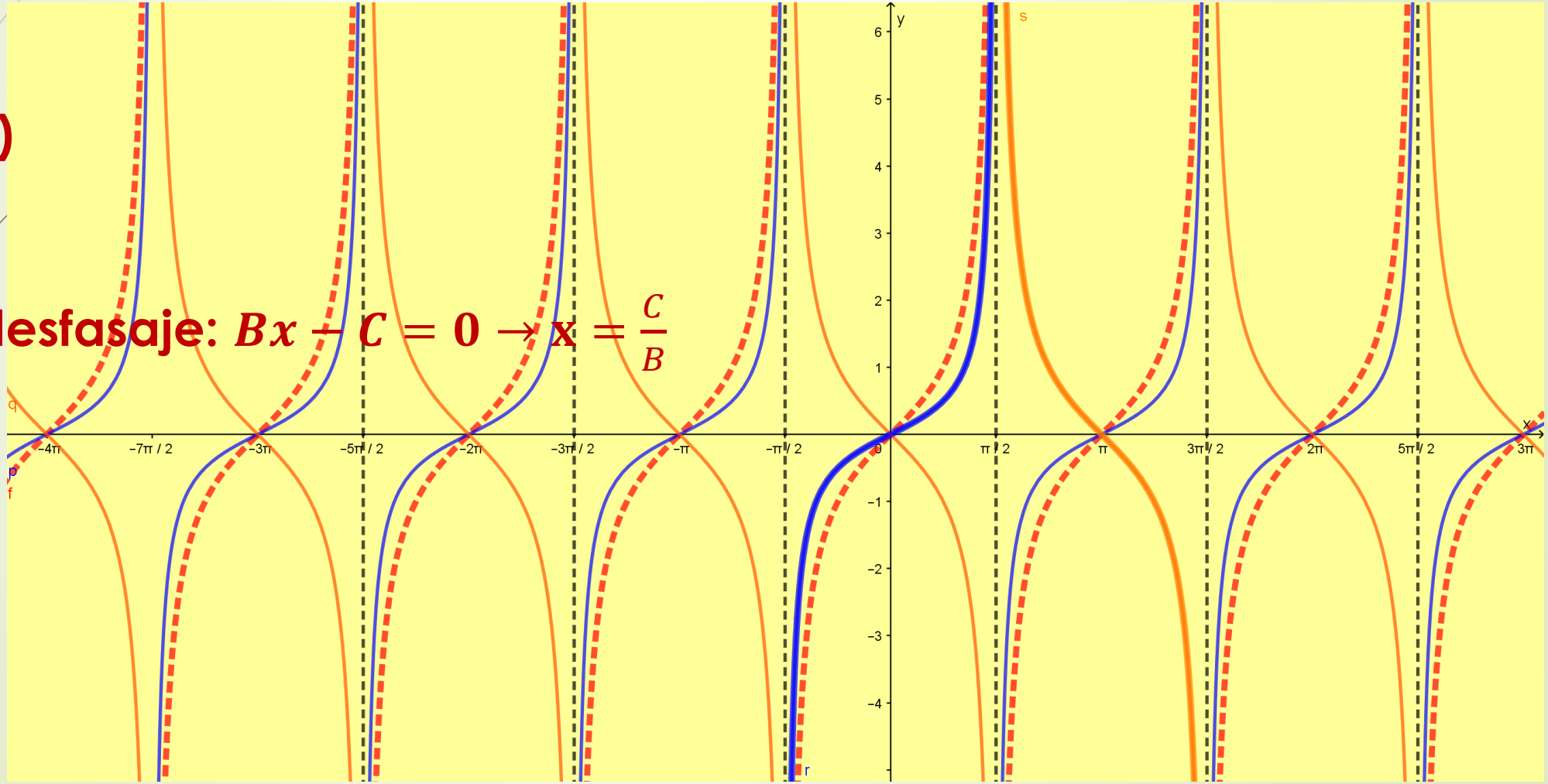
C: Desplazamiento horizontal **D: Desplazamiento vertical**

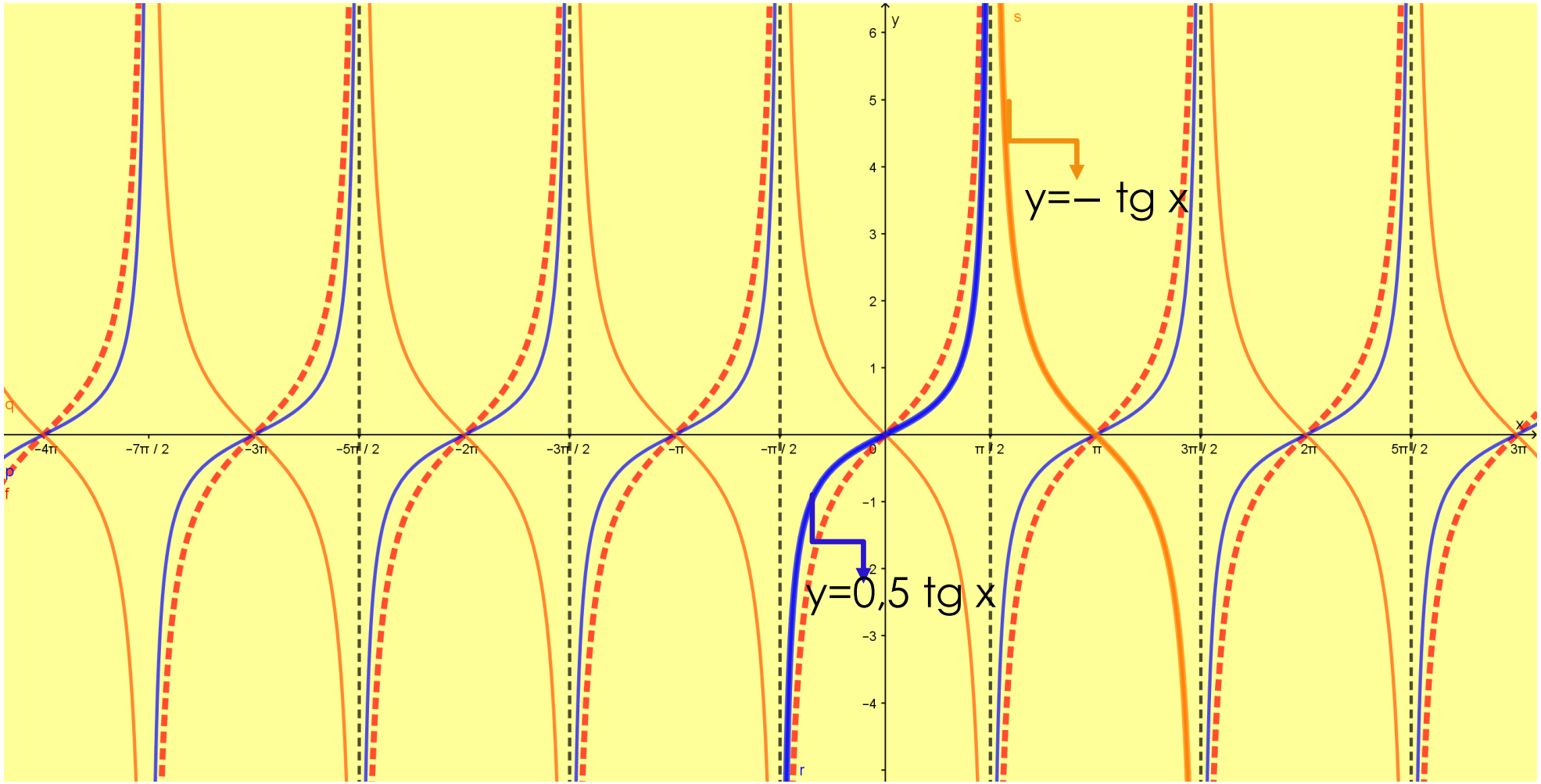
Período= $\frac{\pi}{B}$

Fase: (B x-C)

B: Pulsación

Ángulos de desfasaje: $Bx - C = 0 \rightarrow x = \frac{C}{B}$





	a	B	C	P	D	Fase	Ángulo de desfasaje	Dominio	Imagen	Simetría con respecto al eje x
0,5 tg x	0.5	1	0	π	0	x	0	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	no
–tg x	2	1	0	π	0	x	0	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	si

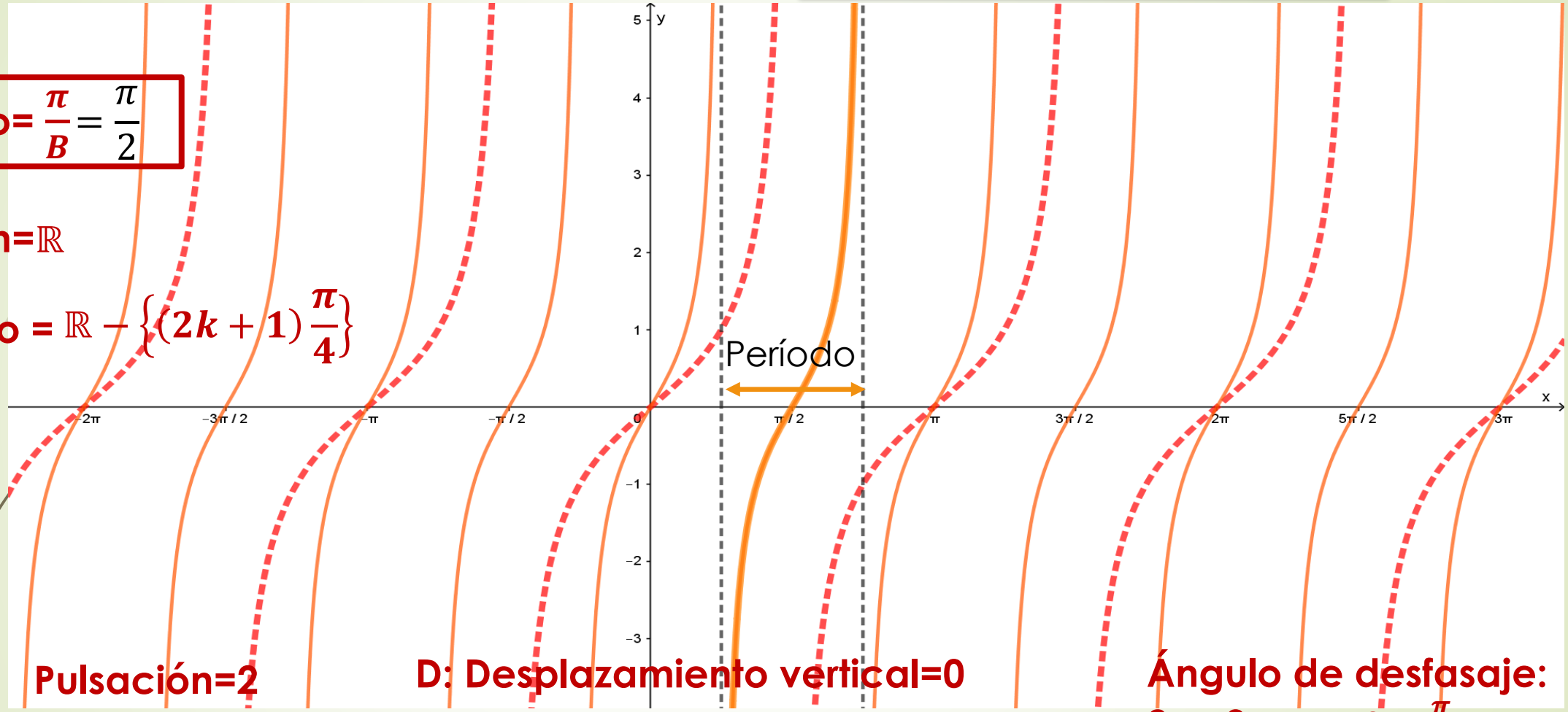
y= tg (2x)= tg (**2**x-0)+0

$$f(x) = a\,TG\,(Bx - C) + D$$

Período= $\frac{\pi}{B} = \frac{\pi}{2}$

Imagen=$\mathbb{R}$

Dominio = $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$



Pulsación=2

D: Desplazamiento vertical=0

Ángulo de desfasaje:

2x= 0→ $x = 0 + \frac{\pi}{4}$

Fase: (B x-C)= 2x

C: Desplazamiento horizontal =0

Int. con eje x

$$0 = \text{tg}\,(2x) = \frac{sen\,(2x)}{\cos(2x)} \rightarrow 0 = \text{sen}\,\alpha \rightarrow \pi = \alpha = 2x \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow 2\pi = \alpha = 2x \rightarrow x = \pi + k\frac{\pi}{2}$$

EJERCITAMOS

$\text{tg}\,(5x) = \dfrac{sen\,(5x)}{\cos(5x)} \neq 0$

$0 = \cos\alpha$

$\dfrac{\pi}{2} = \alpha = 5x$

$x = \dfrac{\pi}{10}$

$\dfrac{\pi}{2} = \alpha = 0.5x$

$x = \pi$

$\text{tg}\,(\frac{1}{2}x) = \dfrac{sen\,(0.5x)}{\cos(0.5x)} \neq 0$

	y = tg (5x)	y = -2 tg $(x-\frac{\pi}{4})$	y = tg $(\frac{1}{2}x)$
Dominio	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{10}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{3\pi}{4}\right\}$	$\mathbb{R} - \{(2k+1)\pi\}$
Imagen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Pulsación	5	1	1/2
Período $\frac{\pi}{B}$	$\dfrac{1}{5}\pi = 36°$	$\pi = 180°$	$\dfrac{\pi}{1/2} = 2\pi = 360°$
Ángulo de desfasaje	5x= 0 →x=0	$x - \dfrac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{1}{2}x = 0 \rightarrow x = 0$

Dada la función y = 2 tg $(3x - \pi) + 1$, obtener analíticamente elementos característicos y graficar.

Dominio= $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$$\text{tg}(3x-1) = \frac{sen\,(3x-\pi)}{\cos(3x-\pi)} \neq 0$$

$\cos \alpha = 0$

$$\frac{\pi}{2} = \alpha = (3x - \pi)$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \cdot \frac{1}{3} = x$$

$$\frac{\pi}{2} = x$$

Imagen= $\mathbb{R}$ Pulsación = 3

Período= $\frac{\pi}{3} = 60°$

Fase= (3x-π)

Ángulo de desfasaje =$(3x - \pi) = 0$

$x = \frac{\pi}{3} = 60° = x_0$ Ángulo de inicio ⟶ y_f=1

Ángulo donde finaliza un ciclo de la onda= x_f

$x_f = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ =120° ⟶ y_f=1

Intersección con eje x

0 = 2 $tg(3x - \pi)$+1

$$\frac{-1}{2} = tg\ \alpha$$

cuadrante	I	II	III	IV
tg α	+	−	+	−

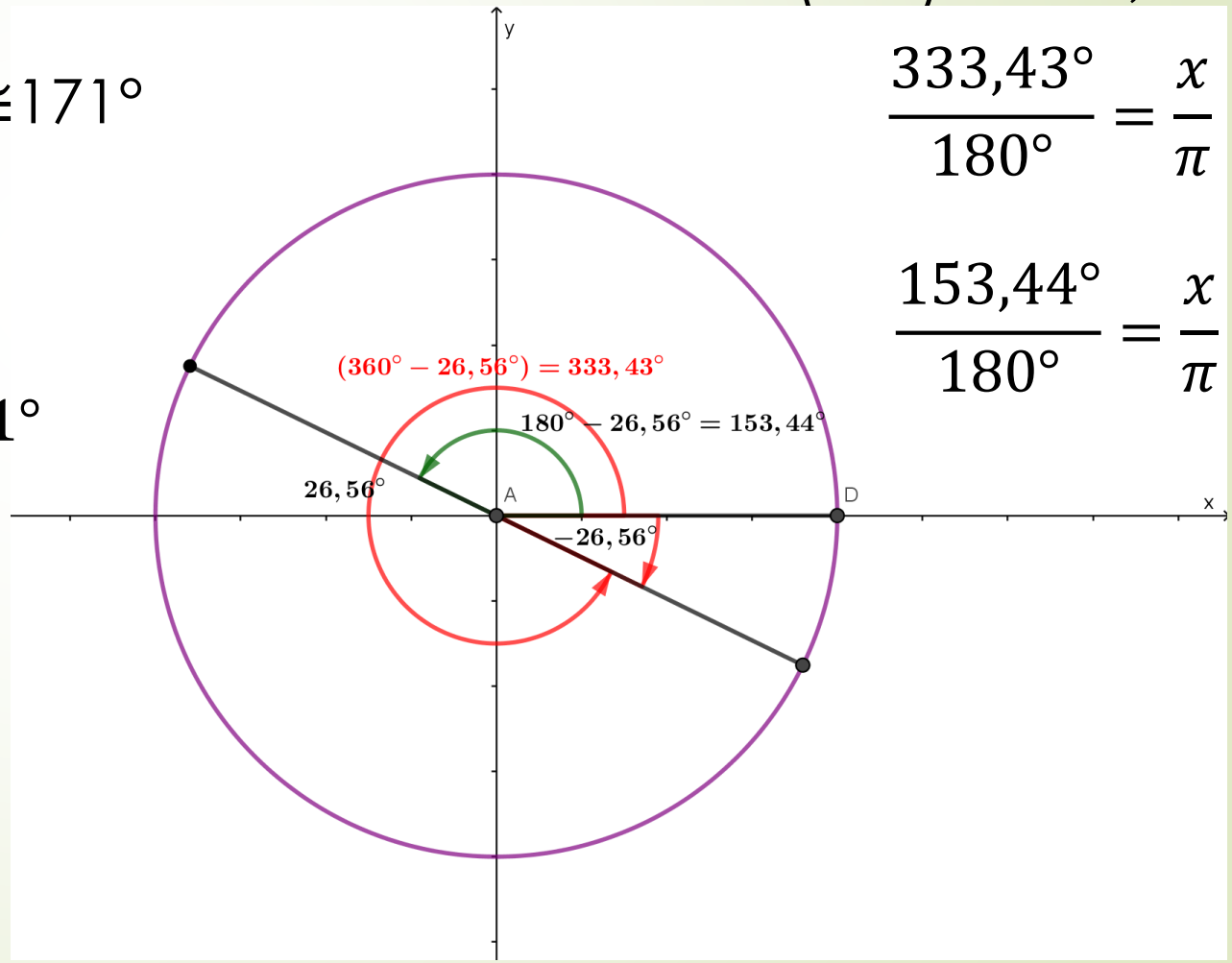
- $3x - \pi = 1.85\ \pi$

$$x = (1{,}85\pi + \pi).\frac{1}{3} = 0{,}95\pi \cong 171°$$

- $3x - \pi = 0{,}85\pi$

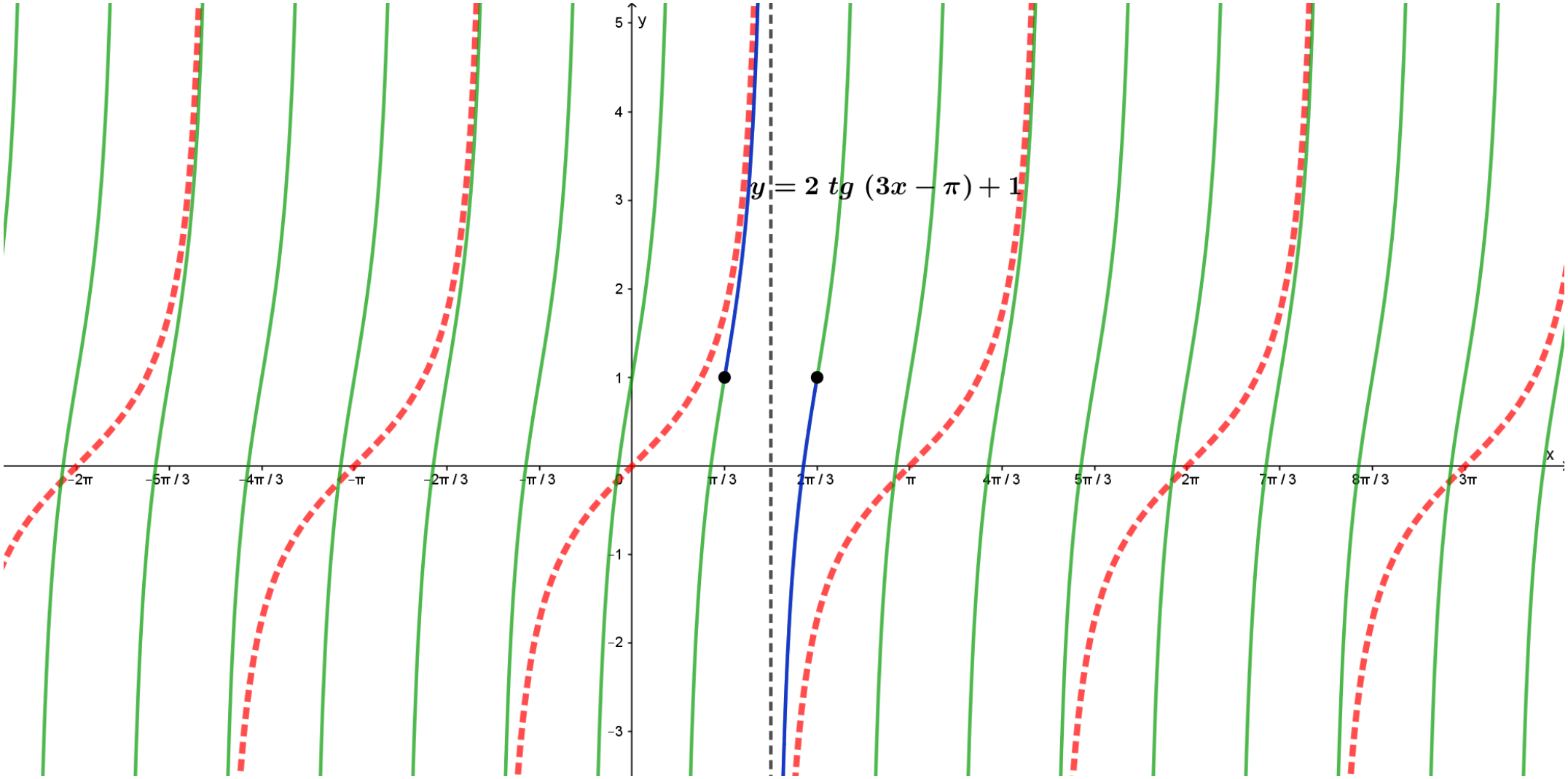
$$x = (0{,}85\ \pi + \pi).\frac{1}{3} = 0{,}61\pi \cong 111°$$

Con calculadora Shift cos (-0,5) = $-26{,}56°$



$$\frac{333{,}43°}{180°} = \frac{x}{\pi}$$

$$\frac{153{,}44°}{180°} = \frac{x}{\pi}$$


y = 2 tg (3x − π) + 1
y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2π
−5π / 3
−4π / 3
−π
−2π / 3
−π / 3
0
π / 3
2π / 3
π
4π / 3
5π / 3
2π
7π / 3
8π / 3
3π