

GUÍA DE EJERCITACIÓN 4 ESPACIOS VECTORIALES REALES**Espacio Vectorial Real**

Sea V un conjunto no vacío, R el conjunto de los números reales, $' + '$ y $' \cdot '$ dos operaciones llamadas suma y producto respectivamente.

Definición $(V, R, ' + ', ' \cdot ')$ constituye un **espacio vectorial real** si y sólo si se verifican los siguientes axiomas

- A1. Ley de composición interna para la $' + '$**
 $\forall \vec{v}_1 \in V, \forall \vec{v}_2 \in V \Rightarrow (\vec{v}_1 ' + ' \vec{v}_2) \in V$
- A2. Ley conmutativa para la $' + '$**
 $\forall \vec{v}_1 \in V, \forall \vec{v}_2 \in V \Rightarrow (\vec{v}_1 ' + ' \vec{v}_2) = (\vec{v}_2 ' + ' \vec{v}_1)$
- A3. Ley asociativa para la $' + '$**
 $\forall \vec{v}_1 \in V, \forall \vec{v}_2 \in V, \forall \vec{v}_3 \in V \Rightarrow \vec{v}_1 ' + ' (\vec{v}_2 ' + ' \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 ' + ' \vec{v}_2) ' + ' \vec{v}_3$
- A4. Existencia de un elemento neutro para la $' + '$**
 $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{0} \in V / (\vec{v} ' + ' \vec{0}) = (\vec{0} ' + ' \vec{v})$
- A5. Existencia de elemento opuesto**
 $\forall \vec{v} \in V, \exists (-\vec{v}) \in V [\vec{v} ' + ' (-\vec{v})] = \vec{0}$
- A6. Ley de composición externa para el $' \cdot '$**
 $\forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in R \Rightarrow (\alpha ' \cdot ' \vec{v}) \in V$
- A7. Ley asociativa mixta para el $' \cdot '$**
 $\forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in R, \forall \beta \in R \Rightarrow \alpha ' \cdot ' (\beta ' \cdot ' \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) ' \cdot ' \vec{v}$
- A8. Existencia de un elemento neutro para el $' \cdot '$**
 $\forall \vec{v} \in V, \exists 1 \in R \Rightarrow (1 ' \cdot ' \vec{v}) = \vec{v}$
- A9. Propiedad distributiva del $' \cdot '$ con respecto a la suma en R**
 $\forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in R, \forall \beta \in R \Rightarrow (\alpha + \beta) ' \cdot ' \vec{v} = \alpha ' \cdot ' \vec{v} ' + ' \beta ' \cdot ' \vec{v}$
- A10. Propiedad distributiva del $' \cdot '$ con respecto a la $' + '$**
 $\forall \vec{v}_1 \in V, \forall \vec{v}_2 \in V, \forall \alpha \in R \Rightarrow \alpha ' \cdot ' (\vec{v}_1 ' + ' \vec{v}_2) = \alpha ' \cdot ' \vec{v}_1 ' + ' \alpha ' \cdot ' \vec{v}_2$

Los elementos del conjunto V se denominan vectores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots)$; el elemento neutro para la $' + '$ denotado por $\vec{0}$ se denomina vector nulo; los elementos del conjunto R se denominan escalares.

Si en lugar de R , se toman los escalares pertenecientes al conjunto Z de los números enteros, el $(V, Z, ' + ', ' \cdot ')$ se denomina espacio vectorial entero; análogamente, al considerar el conjunto de los números complejos C , $(V, C, ' + ', ' \cdot ')$ se denomina espacio vectorial complejo, ...

Propiedades Si $(V, R, ' + ', ' \cdot ')$ es un espacio vectorial real, entonces:

- P1.** $\forall \vec{v} \in V, 0 \in R \Rightarrow 0 ' \cdot ' \vec{v} = \vec{0}$
- P2.** $\vec{0} \in V, \forall \alpha \in R \Rightarrow (\alpha ' \cdot ' \vec{0}) = \vec{0}$
- P3.** Si $0 ' \cdot ' \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$
- P4.** $\forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in R \Rightarrow (-\alpha) ' \cdot ' \vec{v} = \alpha ' \cdot ' (-\vec{v}) = -(\alpha ' \cdot ' \vec{v})$

Subespacio Vectorial Real

Definición Sea S un subconjunto no vacío de V , se denomina subespacio del espacio vectorial $(V, R, ' + ', ' \cdot ')$ si y sólo si es en sí mismo un espacio vectorial con las operaciones $' + '$ y $' \cdot '$ definidas en V .

Para que S sea subespacio, debe verificar las siguientes condiciones:

- C1. $S \subset V$
 C2. $S \neq \emptyset$
 C3. $\forall \vec{v}_1 \in S, \forall \vec{v}_2 \in S \Rightarrow (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in S$
 C4. $\forall \vec{v} \in S, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow (\alpha \vec{v}) \in S$

Propiedades

- P1. $\vec{0} \in S$
 P2. Si S_1 y S_2 son subespacios de $(V, \mathbf{R}, +, \cdot)$, entonces $(S_1 \cap S_2)$ es un subespacio $(V, \mathbf{R}, +, \cdot)$
 P3. $S = \{\vec{0}\}$ y $S = V$ se denominan subespacio triviales

Notación: En los siguientes párrafos se identificará al espacio vectorial $(V, \mathbf{R}, +, \cdot)$ con el conjunto V . Por una cuestión de practicidad un símbolo $+$ simple reemplazará a $+$, y un símbolo \cdot a \cdot .

Combinación lineal de vectores

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_r\} \subset V$, se dice que $\vec{v} \in V$ es una combinación lineal de los elementos del conjunto si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbf{R}$ tales que verifiquen

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_r \vec{v}_r.$$

Dependencia e Independencia Lineal

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\} \subset V$, se dice que es linealmente dependiente si para la combinación lineal entre los elementos del conjunto que da por resultado el vector nulo, no todos los escalares son simultáneamente nulos, es decir

$$\text{Si } \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow \exists \text{ algún } \alpha_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

El conjunto se denomina linealmente independiente, si la única solución posible es que todos los escalares sean simultáneamente cero (solución trivial), es decir

$$\text{Si } \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Sistema de generadores

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\} \subset V$ se denomina sistema de generadores de V si $\forall \vec{v} \in V, \exists \alpha_i \in \mathbf{R}$ con $i = 1, 2, \dots, m$ tal que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{v}$.

es decir que cualquier vector de V se pueda expresar como combinación lineal de los elementos del conjunto.

Base

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\} \subset V$ se denomina base de V si constituye un sistema de generadores linealmente independiente. Cuando la base posee un número finito de elementos, se denomina por dimensión del espacio vectorial V a dicho número.

Observación: estos últimos conceptos se pueden relacionar con un subespacio S , pudiendo establecer la dependencia o independencia lineal, sistema de generadores, base y dimensión para dicho subespacio.