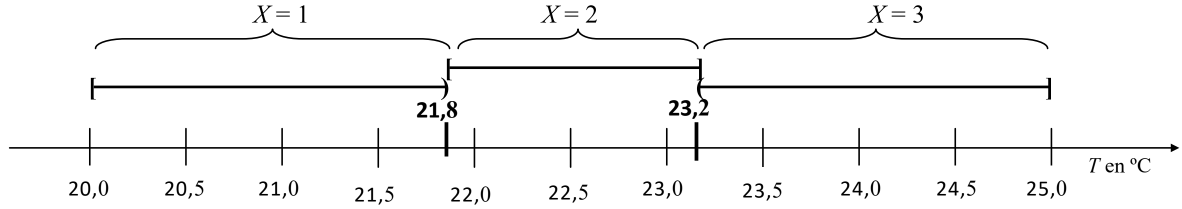
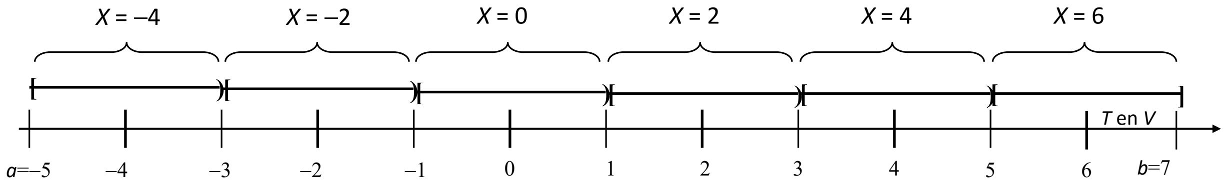
Guía de Ejercitación 3. Variable aleatoria discreta. Respuestas

Ej.1. **a)** $R_X = \{1; 2; 3\}$

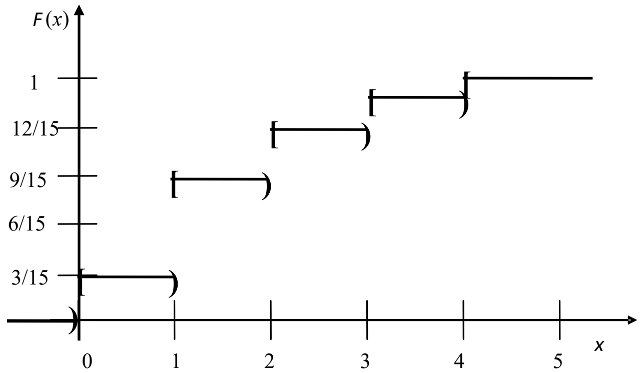


b) $R_X = \{-4; -2; 0; 2; 4; 6\}$



Ej.2. **a)** La verdadera función de probabilidad puntual es la número 2.
b) i. $P(X \leq 2) = 0{,}6$; **ii.** $P(X \leq 1) = 0{,}5$; **iii.** 40%.
c) $c = 1/15$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/3 & 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & 2 \leq x < 3 \\ 14/15 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



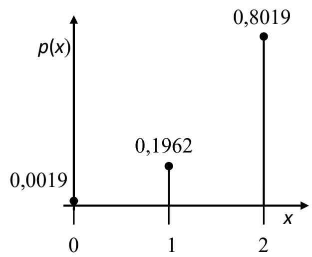
Ej.3. **a)**

x	4	6	8
$p(x)$	0,45	0,40	0,15

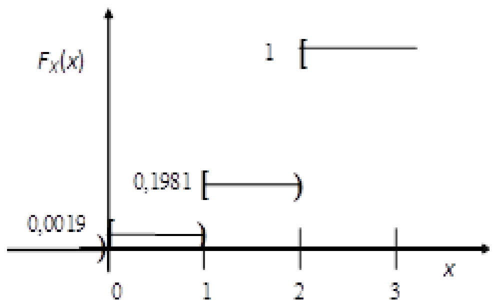
b) $E(X) = 5{,}40;\ V(X) = 2{,}04$

Ej. 4

x	0	1	2
$p(x)$	0,0019	0,1962	0,8019



$E(X) = 1{,}8$ circuitos



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}0019 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}1981 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Ej.5.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,4	0,1	0,3	0,2

Ej.6. **a)** $p(2) = P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-) = 0{,}20$; $P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0{,}33$
$P(2 \leq X \leq 5) = F_X(5) – F_X(2^-) = 0{,}78$; $P(2 < X < 5) = F_X(5^-) - F_X(2) = 0{,}53$

b)

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0,06	0,13	0,20	0,28	0,25	0,05	0,03

c) $E(X) = 2{,}8$

Ej. 7 $R_X = \{0; 1; 2\}$

x	0	1	2
$p(x)$	0,84	0,12	0,04

i) $E(X) = 0{,}2$ reprocesamientos; **ii)** en promedio se tiene un reprocesamiento cada 5 discos rígidos inspeccionados; **iii)** 0,4% de los discos rígidos se desarman.

Ej.8. **a)** $X \sim Bin(n = 5; p = 0{,}02)$

b) $P(X = 2) \cong 0{,}00376$; $P(X < 2) \cong 0{,}99616$; $P(X > 2) \cong 0{,}00008$; $P(X \geq 1) \cong 0{,}09608$

c) Los resultados anteriores seguirían siendo aproximadamente válidos si el número de artículos extraídos $n = 5$ es menor que el 5% del número de artículos de la producción de la cual son extraídos.

Ej.9. Como la probabilidad de que 3 o más de las 6 naves aterricen en la zona establecida es 0,98304, el programa resulta satisfactorio.

Ej.11. $P(X = k) = (1 - p)^k p \quad k \in \mathbf{N_0}$; distribución geométrica; $E(X) = \frac{1}{p}$; $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Ej.14. **a)** 0,0003; **b)** 0,9084; **c)** 0,1048

Ej.15. **a)** 0,1428; **b)** 4 buques como máximo

Ej.18 0,8644

Ej.20. **a)** 0,0298; **b)** i. 0,5460; ii. 0,1186

Ej.21. 1,65

Ej.25. **a)** 0,0079; **b)** 0,5991

Ej.27.

$$P(X = x) = \frac{\binom{6}{x} \cdot \binom{4}{3 - x}}{\binom{10}{3}} \quad x = 0; 1; 2; 3$$

x	0	1	2	3
$p(x)$	$4/120 \cong 0{,}0333$	$36/120 = 0{,}3000$	$60/120 = 0{,}5000$	$20/120 \cong 0{,}1667$

Ej.I. **a)** $E = [(X - c)^2] = V(X) + [E(X)]^2 - 2cE(X) + c^2$; minimiza: $c = E(X)$; **c)** Ajuste: $0{,}8X + 20$;

c) $$E[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} h(x_i)p(x_i)\ ; V[h(X)] = \sum_{i=1}^{n} [h(x_i)]^2 p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} h(x_i)p(x_i)\right]^2$$

Ej.II. **a)** $c = 1/6$

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/3	1/3	2/9	1/9

b) $E(X) = 19/9 \cong 2{,}111$; $V(X) = 80/81 \cong 0{,}987$; $\sigma_X \cong 0{,}994$

c)

Si $k = 1$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1, 2, 3, 4	1	$5a$	1

$E(G) = \mathbf{5a}$

Si $k = 2$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5a - 3a$	1/3
2	2, 3, 4	2/3	$10a$	2/3

$E(G) = 2a\ 1/3 + 10a\ 2/3 = \mathbf{22/3\ a}$

Si $k = 3$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5a - 6a$	1/3
2	2	1/3	$10a - 3a$	1/3
3	3, 4	1/3	$15a$	1/3

$E(G) = -a\ 1/3 + 7a\ 1/3 + 15a\ 1/3 = \mathbf{21/3\ a}$

Si $k = 4$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5a - 9a$	1/3
2	2	1/3	$10a - 6a$	1/3
3	3	2/9	$15a - 3a$	2/9
4	4	1/9	$20a$	1/9

$E(G) = 12a\ 2/9 + 20a\ 1/9 = \mathbf{44/9\ a}$

Si $k = 5$

Venta	Demanda asociada	$p(v)$	Ganancia: g	$p(g)$
1	1	1/3	$5\ a - 12\ a$	1/3
2	2	1/3	$10\ a - 9\ a$	1/3
3	3	2/9	$15\ a - 6\ a$	2/9
4	4	1/9	$20\ a - 3\ a$	1/9
5	0	0	$25\ a$	0

$E(G) = -6a\ 1/3 + 9a\ 2/9 + 17a\ 1/9 = \mathbf{17/9\ a}$

El valor de $k = 2$ maximiza la utilidad esperada, $E(G) = 22/3\ a$.

d) Depende el valor de la multa por demanda no satisfecha, cambiará el valor de k que maximiza la utilidad esperada. Se tendería a pensar que dada la poca diferencia entre la utilidad esperada al fabricar 2 ó 3 artículos, por lo menos la respuesta cambiaría al valor de $k = 3$ (pero podría ser mayor).

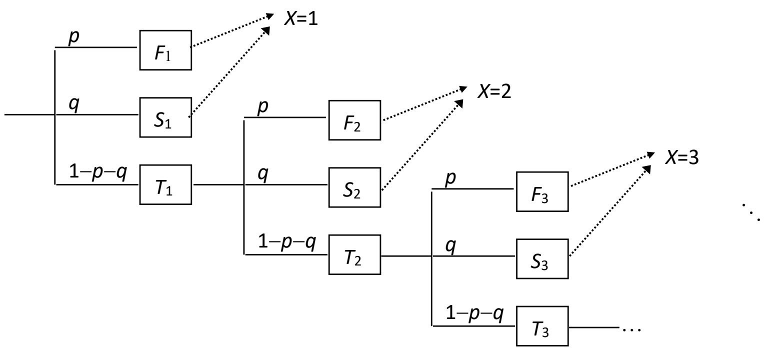
Ej.III. F_k: gana Fisher, S_k: gana Spassky, T_k: tablas en la k-ésima partida.

F gana Fisher el campeonato, S: gana Spassky el campeonato.

a)
$$P(F) = \frac{p}{1-(1-p-q)} = \frac{p}{p+q}$$

b) $P(X = k) = (1-p-q)^{k-1}(p+q) \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ Distribución geométrica

c)
$$E(X) = \frac{1}{1-(1-p-q)} = \frac{1}{p+q}; V(X) = \frac{(1-p-q)}{(p+q)^2}$$



Ej.IV.
$$(1-p)^m + mp(1-p)^{2m-1} + m^2p^2(1-p)^{2m-2} + \frac{m(m-1)}{2}p^2(1-p)^{2m-2}$$