

Guía de Ejercitación 2. Cálculo de Probabilidades

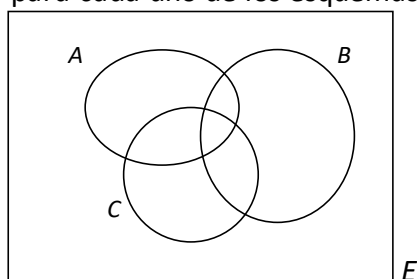
Ejercicio 1. Espacio muestral y eventos. El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de espacio muestral del experimento. Será indicado con E , y la probabilidad de ocurrencia de E vale 1, esto es $P(E) = 1$. Los eventos o sucesos serán simbolizados con letras como A, B, C , etc. El evento nulo será \emptyset ó $\{ \}$. El evento complementario de A será escrito como A^c (otras formas posibles son A' ó \bar{A}).

En cada uno de los siguientes casos definir el espacio muestral; identificar si es finito o infinito, discreto o continuo. De mencionarse, dar por extensión los eventos asociados definidos, y expresar literalmente y por extensión los sucesos complementarios correspondientes.

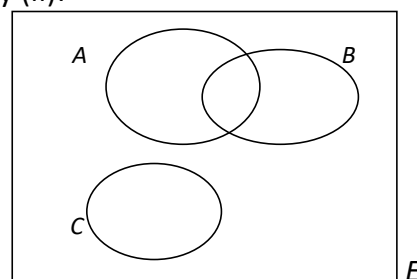
- a) Se analiza un cilindro con una muestra de aire para detectar o no la presencia de una molécula contaminante.
- b) Se seleccionan dos componentes y se clasifican conforme cumplan o no un requerimiento de resistencia eléctrica predeterminado.
- c) Se arroja una moneda hasta obtener cara.
Eventos asociados. A : se arroja a lo sumo tres veces la moneda; B : la primera cara aparece después de la segunda tirada y antes de la sexta tirada.
- d) De una producción donde hay artículos buenos y defectuosos se extraen sucesivamente hasta obtener dos defectuosos consecutivos o cuatro artículos cualquiera sea su condición. ¿Cuántos artículos buenos debe haber como mínimo en la producción para que la respuesta dada sea válida? ¿Cuántos defectuosos como mínimo?
Eventos asociados, suponiendo que haya la cantidad mínima requerida de artículos buenos y defectuosos para que el espacio muestral dado sea válido. R : se efectúan por lo menos tres extracciones; T : se efectúan a lo sumo tres extracciones.
- e) En un experimento se selecciona una pieza moldeada por inyección y se mide su longitud. Proponer tres experimentos aleatorios y definir en ellos al menos un evento.

Ejercicio 2. Diagrama de Venn.

- a) Los siguientes diagramas de Venn contienen 3 eventos (A, B y C) de acuerdo a lo esquematizado. Representar para cada uno de los esquemas (i) y (ii):



(i)

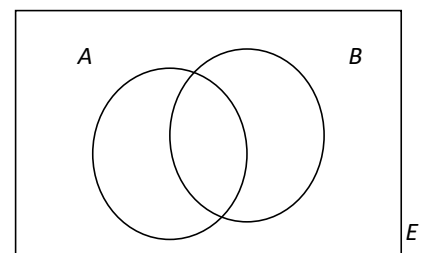


(ii)

$$A^c; A \cap B; (A \cap B) \cap C; (B \cup C)^c; (A \cap B)^c \cup C; (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

- b) Visualizar con el auxilio del diagrama de Venn que contiene 2 eventos, A y B , las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \text{ (Primera Ley de De Morgan)} \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \text{ (Segunda Ley de De Morgan)} \\ A^c &= (A^c \cap B) \cup ((A^c \cap B^c)) \\ (A \cap B)^c &= (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \end{aligned}$$



- c) **Afianzar la comprensión.** Indicar cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas. Observación: si una proposición es verdadera lo tiene que ser en todos los casos. Así, de auxiliarse con los diagramas de Venn conviene utilizar el esquema (i) del ítem a), y no del (ii) del mismo ítem pues sólo un caso particular.
- i) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$; ii) $(A \cup B) = (A \cap B^c) \cup B$; iii) $A^c \cap B = A \cup B$;
 iv) $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C^c$; v) $(A \cap B) \cap (B^c \cap C) = \emptyset$;
 vi) $[A \cap (B \cup C)]^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)$.

Ejercicio 3. Definición de eventos contextuados y operaciones elementales con ellos.

- a) Se prueba un artefacto electrónico y se registra su tiempo total de uso, t . El espacio muestral es $E = \{t \in \mathbf{R}/t \geq 0\}$ y sean en él los eventos definidos como:

$$A = \{t \in \mathbf{R}_{\geq 0}/t < 0\}, B = \{t \in \mathbf{R}_{\geq 0}/50 \leq t \leq 100\}, C = \{t \in \mathbf{R}_{\geq 0}/t < 150\}.$$

Definir los siguientes eventos: $A \cup B$; $A \cap B$; $B \cup C$; $B \cap C$; A^c ; B^c ; C^c .

Aclaración: en la definición de A no hay error de escritura.

- b) Una instalación consiste de dos calderas y un motor. Sean los sucesos, A : el motor funciona; B_1 : la caldera 1 funciona; B_2 la caldera 2 funciona; C : la instalación funciona. Si la instalación funciona cuando lo hacen el motor y por lo menos una caldera, expresar los sucesos C y C^c en función de operaciones de unión, intersección y complementos de A , B_1 y B_2 .

Ejercicio 4. Ingenieros y fecha de vencimiento. Una compañía de ingenieros constructores está actualmente trabajando en plantas eléctricas en tres lugares diferentes. Denotemos por A_i el evento de que la planta del lugar i se termina para la fecha del contrato con $i = 1, 2, 3$.

PI) Utilizar las operaciones de unión, intersección y complementos para describir cada uno de los siguientes eventos en términos de A_1 , A_2 y A_3 , dibujar un diagrama de Venn y hacer un sombreado de la región correspondiente a cada uno.

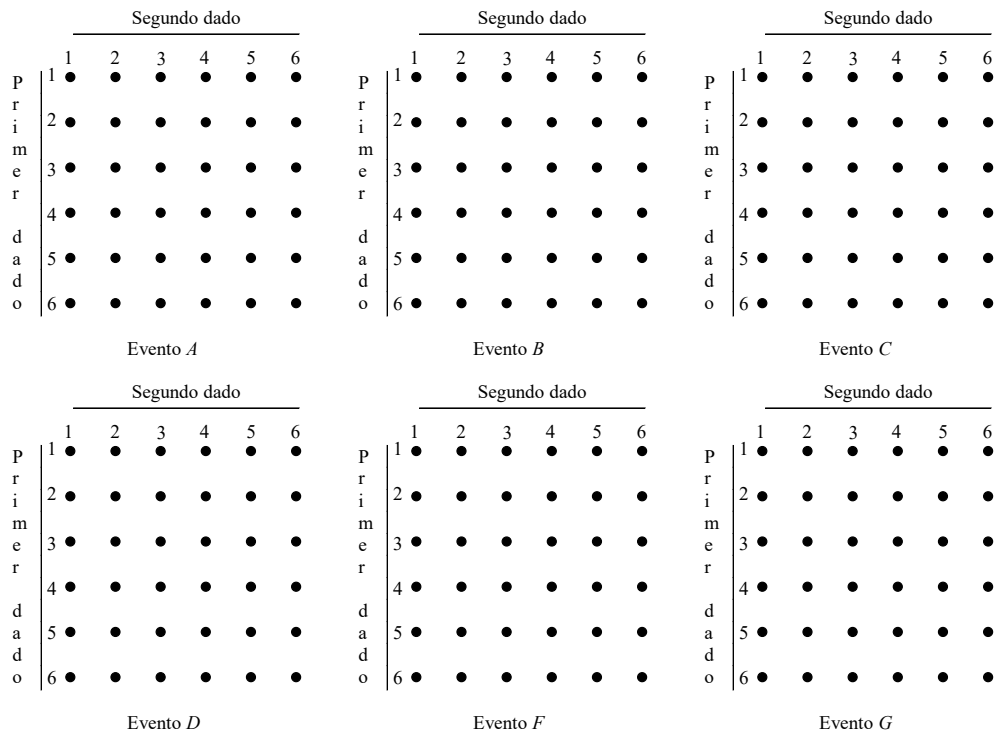
- Por lo menos una planta se termina para la fecha del contrato.
- Todas las plantas se terminan para la fecha del contrato.
- Sólo se termina la planta del lugar 1 para la fecha del contrato.
- La planta 1 no se termina para la fecha del contrato.
- Exactamente una planta se termina para la fecha del contrato.
- Ni la planta 2 ni la planta 3 se terminan para la fecha del contrato.

PII) Definir literalmente los eventos complementarios correspondientes a los definidos en PI). Utilizar las operaciones de unión, intersección y complementos para describir cada uno de ellos en términos de A_1 , A_2 y A_3 .

Ejercicio 5. Experimento aleatorio y espacio muestral equiprobable. Estrategia visual.

Un dado equilibrado se arroja dos veces y se anota el resultado cada vez.

- Escribir por extensión el espacio muestral E .
- ¿Es E un espacio muestral equiprobable?
- Ubicar en el diagrama de la figura correspondiente a los sucesos elementales que componen los siguientes eventos:
 - A : el primer resultado es igual al segundo;
 - B : el segundo resultado es menor que el primero;
 - C : el segundo resultado no excede en dos al primero;
 - D : ambos resultados son 4;
 - F : a lo sumo uno de los resultados es 4;
 - G : al menos uno de los resultados es 4.



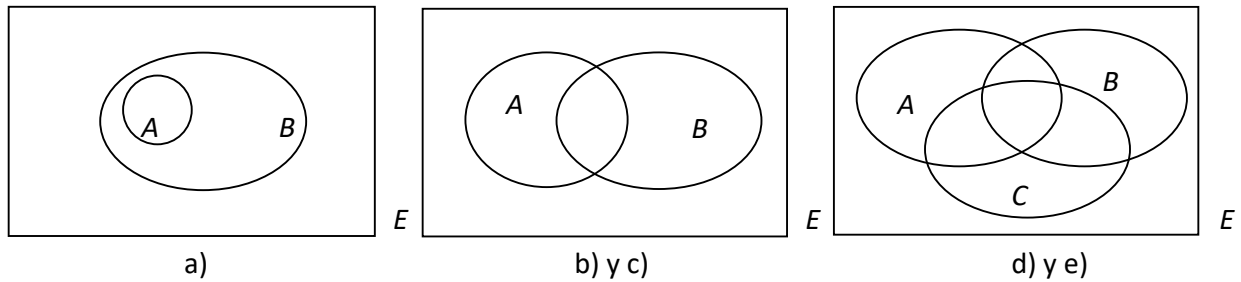
- d) Hallar las **probabilidades** de los eventos definidos en el ítem c).
e) Definir literalmente los eventos complementarios A^c , B^c , C^c , D^c , F^c , G^c .

Ejercicio 6. Validar o refutar argumentos de asignación de probabilidades. De una urna con cinco bolillas rojas numeradas de 1 a 5 y tres negras numeradas de 6 a 8, se saca una completamente al azar. Analizar la validez de las siguientes proposiciones y los argumentos que se presentan.

- a) Sólo hay dos resultados posibles: rojo o negro. Luego la probabilidad de cada uno es $1/2$.
b) Las rojas tienen más probabilidad de salir que las negras. Como 1 es roja y 6 es negra, es más probable que salga el 1 que el 6.
c) Cualquier bolilla tiene la misma probabilidad de salir, $1/8$.
d) El experimento se realizó una vez y salió el 4. Esta bolilla se vuelve a introducir en la urna. Si se vuelve a realizar el experimento, sería mucha casualidad de que vuelva a salir el 4. Luego, en dos repeticiones consecutivas del experimento, si la primera vez salió el 4, en la segunda es menos probable que salga el 4 que, por ejemplo, el 8.

Ejercicio 7. Diagrama de Venn asociado a un espacio muestral y probabilidad de eventos. Sean A , B y C tres eventos definidos en un mismo espacio muestral E . Dadas las siguientes proposiciones, probarlas en base a los axiomas de probabilidad o bien visualizar estos resultados sobre probabilidades de eventos relacionándolas con las áreas correspondientes en los diagramas de Venn.

- a) Si $A \subset B$, entonces $P(B) \geq P(A)$.
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$.
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
d) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$.
e) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
f) Proponer expresiones equivalentes a los ítem d) y e) para la unión de 4 eventos.



Ejercicio 8. Afianzar la comprensión. Resolver las siguientes cuestiones en cada caso.

a) Sean A y B eventos cuyas probabilidades son $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(A \cap B) = z$. Expresar en términos de x , y , z las probabilidades:

$$P(A \cup B); P(A^c \cup B^c); P(A^c \cap B); P(A^c \cup B); P(A^c \cap B^c).$$

b) Sean A , B y C eventos cuyas probabilidades son:

$$P(A) = 0,7; P(B) = 0,4; P(C) = 0,4; P(A \cap B) = 0,3;$$

$$P(A \cap C) = 0,25; P(B \cap C) = 0,15; P(A \cap B \cap C) = 0,1.$$

Calcular: $P(A \cup B)$; $P[(A \cup B \cup C)^c]$; $P(A^c \cap B \cap C^c)$; $P[A^c \cap (B \cup C)]$.

c) Sean A , B y C eventos cuyas probabilidades son:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/4, P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0 \text{ y } P(A \cap C) = 1/8.$$

Calcular la probabilidad de que al menos uno de los eventos A , B ó C ocurra.

Ejercicio 9. Tabla de relevamiento de información y probabilidades. La inspección visual de las láminas de un proceso de fabricación de semiconductores arrojó la siguiente tabla con respecto a partículas contaminantes:

| Número de partículas contaminantes | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 o más |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|---------|
| Proporción de obleas o láminas | 0,40 | 0,20 | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,10 |

Si se elige al azar una lámina de este proceso y se hace una inspección de ella:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no contenga impurezas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que contenga 3 o más impurezas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la oblea contenga hasta 2 impurezas?

Ejercicio 10. Tabla de doble entrada. Diagrama de árbol. Al analizar la resistencia al rayado y a los impactos de 49 muestras de un policarbuo plástico, se obtiene la siguiente información:

| | | Resistencia al rayado | |
|----------------------------|------|-----------------------|------|
| | | Alta | Baja |
| Resistencia a los impactos | Alta | 40 | 2 |
| | Baja | 4 | 3 |

Se extrae una muestra al azar del conjunto y se analiza sus características. Sea A el evento de que la muestra tiene alta resistencia a los golpes y B el evento de que la muestra tiene alta resistencia al rayado. Construir un diagrama de Venn para el experimento aleatorio. Interpretar literalmente cada uno de los eventos: $A \cap B$; A^c ; $A \cup B$ y calcular para cada uno su respectiva probabilidad. Proponer un diagrama de árbol que represente al experimento.

Ejercicio 11. Tornillos, tuercas y demás. Una caja de artículos de reserva está compuesta de la siguiente manera: 10% de los artículos son tuercas, 8% son tornillos, 12% son artículos defectuosos, 4% son tuercas defectuosas y 3% son tornillos defectuosos. Se selecciona un artículo al azar de la caja. Calcular la probabilidad de que:

- a) no sea tuerca ni tornillo;
- b) sea tuerca defectuosa o tornillo defectuoso;
- c) sea bueno pero no sea ni tuerca ni tornillo.

Esquematizar un Diagrama de Venn asociado al experimento, un diagrama de árbol y una tabla de probabilidades. Apremiar las ventajas o desventajas que se presentan en la confección de estas representaciones de acuerdo a los datos del enunciado.

Ejercicio 12. ¿Y si de resistencias se trata? Un determinado dispositivo electrónico sólo puede contener resistencias de 10Ω , 22Ω y 48Ω , pero estas resistencias pueden tener potencias nominales de $0,25W$, $0,50W$ y $1W$, dependiendo de cómo se realice su compra para minimizar costos. Se sabe que en la compra que se realizó el 8% son resistencias de 10Ω y $0,25W$ de potencia, 10% son de 10Ω y $0,5W$, el 1% son de 10Ω y $1W$, el 20% de 22Ω y $0,25W$, 26% de 22Ω y $0,5W$ y el 5% de 22Ω y $1W$. Del total, el 40% son resistencias de $0,25W$ de potencia, 51% de $0,5W$ y el restante 9% es de $1W$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una resistencia la misma resulte de 48Ω ?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte 48Ω y $0,25W$?
- c) ¿Qué porcentaje hay de resistencias de 48Ω y $1W$?

Ejercicio 13. ¿Qué número era? Para abrir una cerradura de combinación se requiere de la selección correcta de un conjunto de 4 dígitos en sucesión (por ejemplo, puede tratarse del PIN de la tarjeta para extracción de dinero de un cajero automático). Los dígitos se eligen desde el 0 al 9. Calcular la probabilidad de poder abrir la cerradura sabiendo que

- a) todos los dígitos son distintos;
- b) el número de cuatro dígitos es capicúa.

Ejercicio 14. Extracción simultánea o sucesiva sin reposición, ¿es lo mismo? De un conjunto de 25 artículos entre los que hay 7 defectuosos y el resto buenos, se extraen simultáneamente 5 artículos. ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 artículos defectuosos entre los 5 extraídos? ¿Difiere la respuesta si la extracción se realiza sucesivamente sin reposición?

Ejercicio 15. Lote de arandelas. Un lote de 50 arandelas espaciadoras contiene 30 que son más gruesas que la dimensión requerida (fuera de tolerancia). Del lote se escogen 3 arandelas al azar, de a una y sin reemplazo.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 arandelas sean más gruesas que la dimensión requerida?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera arandela sea más gruesa que lo tolerado, si las dos primeras son buenas?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera arandela esté fuera de la tolerancia?
- d) ¿Cuál sería el número de arandelas que es necesario tomar para que la probabilidad de que todas ellas sean buenas sea menor a 0,04?
- e) ¿Cuál es el número de arandelas que es necesario tomar del lote para que la probabilidad de que una o más sea más gruesa que la dimensión requerida sea al menos 0,96? ¿Qué diferencia hay entre esta pregunta y la anterior?

Ejercicio 16. Probabilidad total y control de producción.

- a) **Control de calidad en una línea de producción.** Se diseñó un procedimiento de control de calidad que es eficaz el 90% de las veces en que el artículo es defectuoso y 95% en que es bueno. Suponiendo que en una producción hay un 1% de artículos defectuosos, calcular la probabilidad de que el sistema actúe con eficacia en un artículo elegido al azar.
- b) **Mezcla de producciones defectuosas.** Para proteger los aparatos electrónicos contra cambios inesperados de corriente se usan fusibles. Los fusibles modernos se producen en placas de vidrio,

con procesos de deposición de metales y litografía fotográfica. En cada placa se producen varios cientos de fusibles en forma simultánea. Al final del proceso, las placas se cortan con precisión utilizando sierras especiales. Cada fusible pasa por una de tres máquinas cortadoras alternas. La máquina M_1 produce 200 fusibles por hora, la máquina M_2 produce 250 fusibles por hora, y la máquina M_3 , 350 fusibles por hora. Después, los fusibles se mezclan. Las proporciones de partes defectuosas que producen por lo regular esas máquinas son 0,01, 0,02 y 0,005, respectivamente. Se elige un fusible al azar de la producción de una hora, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con el requisito de amperaje (que no sea defectuoso)?

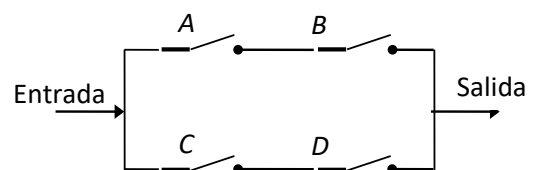
Ejercicio 17. Teorema de Bayes. Dos máquinas automáticas, producen piezas idénticas, que son colocadas en un transportador común. El rendimiento de la primera máquina es el doble del correspondiente a la segunda. El porcentaje de piezas sin defectos que produce la primera es del 60% y el de la segunda del 84%. Una pieza que se toma del transportador resulta sin defectos. Hallar la probabilidad de que esta pieza haya sido producida por la primera máquina.

Ejercicio 18. Afianzar la comprensión. Un dispositivo electrónico consta de dos subsistemas A y B . A partir de una serie de pruebas previas, se presupone que: la probabilidad de que el subsistema A falle es 0,2; la probabilidad de que falle solamente el subsistema B es 0,15; y la probabilidad de que ambos fallen es 0,15. Calcular:

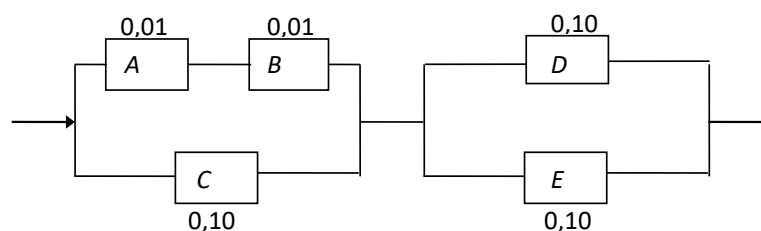
- la probabilidad de que el subsistema B falle.
- la probabilidad de que el subsistema A falle solo.
- la probabilidad de que A falle sabiendo que B no falló.
- ¿Son independientes las fallas de los subsistemas? Justificar la respuesta.

Ejercicio 19. Funcionamiento independiente pero no idéntico. Para la confección de un sistema de señalización de emergencia se tienen tres indicadores. La probabilidad de que el indicador accione durante la avería es igual al 0,95 para el primero de ellos y 0,9 para los otros dos. Se supone que su funcionamiento es independiente del tipo de conexión, o no, entre ellos. Si los indicadores se conectan en un sistema en paralelo de tres ramas, ¿cuál es la probabilidad de que cuando se produzca una avería, el sistema lo indique? ¿Cuál si el sistema es de conexiones en serie?

Ejercicio 20. Los contactos A, B, C, D , pertenecen a distintos relés cuya probabilidad individual de falla es 10^{-2} . Indicar la probabilidad de que circule corriente entre la entrada y la salida del circuito de la figura al excitar los cuatro relés. Suponer independencia de falla de los relés.



Ejercicio 21. El circuito siguiente trabaja si y solo si existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento de izquierda a derecha. Se supone que los dispositivos fallan de manera independiente. La probabilidad de falla de cada uno de ellos está indicada en el esquema. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



Lectura y comprensión

El arte de predecir sucesos muy raros

Supongamos que la presencia de una cierta enfermedad virósica se determina mediante un análisis de sangre que tiene una “sensibilidad” muy elevada de 0,999. Este número indica la probabilidad de que el análisis de sangre de positivo si la persona tiene el virus. Supongamos también que la prueba mencionada tiene una “especificidad” elevada del 0,9999, número que indica la probabilidad de que el análisis dé negativo si la persona no tiene el virus. En suma, un análisis de sangre de calidad: alta sensibilidad, alta especificidad.

Pero, si lo miramos desde la perspectiva de la persona cuya sangre se analiza, las apreciaciones matemáticas al respecto se tornan con otro matiz. Por extraño que parezca, el significado (el valor predictivo) del resultado positivo o negativo de un individuo cambia según la situación. Concretamente, dependiendo de la “rareza” de fondo del suceso que la prueba trata de detectar. Cuanto más raro es el suceso entre la población de referencia, peor se vuelve la capacidad de detección de la prueba, aun siendo la misma prueba que antes, con la misma sensibilidad y la misma especificidad.

Es más fácil de comprender con cifras concretas. Supongamos que el porcentaje de la población de una cierta región infectada por ese virus es de 1,5%. Si sometemos a 10000 individuos de la zona al excelente análisis de sangre, podremos esperar 151 resultados positivos en total: 150 serán los individuos verdaderamente infectados que obtendrán auténticos resultados positivos en sus análisis sanguíneos, pero 1 corresponderá al falso positivo que podemos esperar. Así, si alguien obtiene un positivo para el virus en un análisis de sangre, en esas circunstancias, la probabilidad de que esté infectado realmente con el virus es de 150 entre 151, un porcentaje de probabilidad del 99,34%.

Si esta misma prueba se realiza en una población donde haya, aproximadamente un caso por cada 10000 individuos, el último resultado es bien distinto. Si analizamos a 10000 personas, podremos esperar 2 resultados positivos en total: uno correspondiente a la persona verdaderamente infectada y el otro al falso positivo. O sea que si alguien tiene un positivo para el virus en el análisis de sangre, en esas circunstancias, la probabilidad de que esté infectado realmente con el virus es de 1 entre 2, un porcentaje de probabilidad del 50%.

Esto es, pues, cuando el índice de fondo de un suceso nos dice que éste es muy raro, hasta un excelente análisis de sangre se vuelve un tanto malo.

Hasta aquí, la lectura fue una adaptación del párrafo “*Las estadísticas nos abruma*” del libro *Mala Ciencia* de Ben Goldracc, Editorial Paidós, 2011, p190-192.

En la figura I mostramos el análisis generalizado a partir de una proporción p de individuos que tienen el virus dentro de una población. En ella se grafica la probabilidad condicional de que si al individuo le dio el análisis positivo, realmente esté infectado, simbolizada con $P(A)$. Su cálculo, expresado por

$$P(A) = \frac{0,999p}{0,999p + 0,0001(1 - p)},$$

es una aplicación directa del Teorema de Bayes. Se grafica el rango significativo de proporciones poblacionales bajas (casos raros); para proporciones mayores de infectados, el gráfico es asintótico a 1.

En la figura II se completa la visualización de este análisis superponiendo a $P(A)$ para todo el rango de p , la probabilidad condicional de que si al individuo le dio el análisis negativo, realmente no esté infectado, simbolizada con $P(B)$, cuyo cálculo está dado por

$$P(B) = \frac{0,9999(1 - p)}{0,001p + 0,9999(1 - p)},$$

Fuera de este contexto, si este análisis de alta sensibilidad y alta especificidad se aplicase a un proceso de control de calidad sobre una población de un 10% de individuos por debajo del estándar, se apreciaría su excelente poder predictivo (baja probabilidad de errores). Observar que en este proceso se cometen dos tipos de errores: falsos positivos y falsos negativos, que no tienen la misma probabilidad (excepto para algún valor de p).

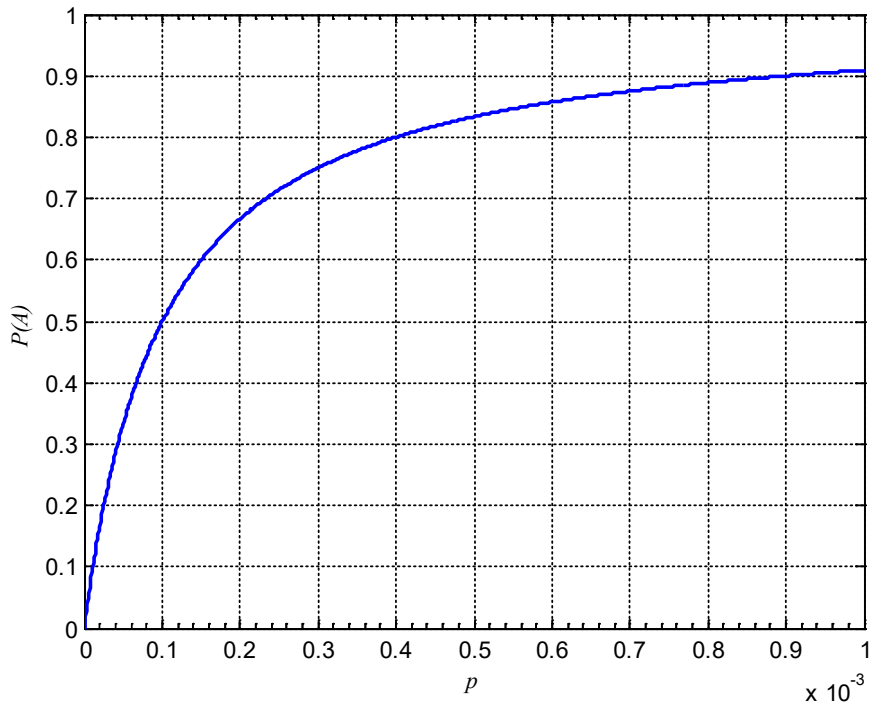


Figura I

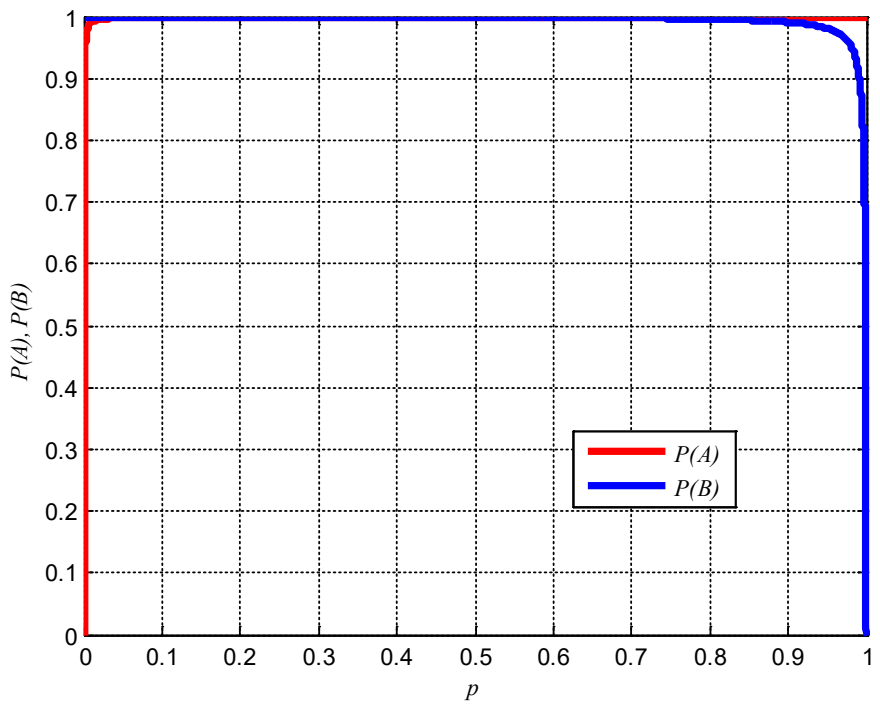


Figura II