

RESPUESTAS GUÍA DE EJERCITACIÓN 5TRANSFORMACIONES LINEALES**Ejercicio 1.**

1.1) Es transformación lineal (T.L.); se corresponde con una proyección sobre el eje vertical para luego efectuar una rotación en $\pi/2$ en sentido horario.

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 / f(x_1, x_2) = (x_2, 0); A \cdot X = F(X) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{(x_1, 0) \mid \forall x_1 \in \mathbf{R}\} \text{ (todo el eje horizontal); } \dim(\text{Nu}(f)) = 1; B(\text{Nu}(f)) = \{(1, 0)\}$$

$$\text{Im}(f) = \{(x_1, 0) \mid \forall x_1 \in \mathbf{R}\} \text{ (todo el eje horizontal); } \dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \{(1, 0)\}$$

$$\mathbf{1.2) \quad \text{No es T.L. Contraejemplo} \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = (2, 5); \vec{y} = (3, 4) \quad \vec{x} + \vec{y} = (5, 9) \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \neq f(\vec{x} + \vec{y}) \\ (10, 0) + (12, 0) \neq (5 \cdot 9, 0) \\ (22, 0) \neq (45, 0) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{1.3) \quad \text{No es T.L. Contraejemplo} \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = (2, 5); \vec{y} = (3, 4) \quad \vec{x} + \vec{y} = (5, 9) \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \neq f(\vec{x} + \vec{y}) \\ (2 - 1, 5 + 2) + (3 - 1, 4 + 2) \neq (5 - 1, 9 + 2) \\ (3, 13) \neq (4, 11) \end{array} \right.$$

1.4) Es T.L.

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 6x_3, 0, -4x_1 + 12x_3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 6x_3 \\ 0 \\ -4x_1 + 12x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 - 3x_3 = 0\} = \{(3x_3, x_2, x_3) \mid \forall x_2, \forall x_3 \in \mathbf{R}\}$$

$$\dim(\text{Nu}(f)) = 2; B(\text{Nu}(f)) = \{(0, 1, 0); (3, 0, 1)\}$$

$$\text{Im}(f) = \{(\omega_1, 0, -2\omega_1) \mid \forall \omega_1 \in \mathbf{R}\}; \dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \{(1, 0, -2)\}$$

1.5) Es T.L.

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, x_1 + x_2); \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{(0, 0)\}; \dim(\text{Nu}(f)) = 0$$

$$\text{Im}(f) = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbf{R}^3 / \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3 = 0\} = \{(\omega_1, \omega_1 - 2\omega_3, \omega_3) \mid \forall \omega_1, \forall \omega_3 \in \mathbf{R}\}$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 2; B(\text{Im}(f)) = \{(1, 1, 0); (0, -2, 1)\}$$

$$\mathbf{1.6) \quad \text{No es T.L. Contraejemplo} \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \quad \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \neq f(\vec{x} + \vec{y}) \\ [5 - (-6)] + [-10 - (-7)] \neq 0 - 4 \\ 8 \neq -4 \end{array} \right.$$

1.7) Es T.L.

$$f: \mathbf{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{R}^{2 \times 2} / f(X) = X - X^T \text{ con } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2} \text{ isomorfo con } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nu}(f) = \{X \in \mathbf{R}^{2 \times 2} / X = X^T\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \mid \forall x_1, \forall x_2, \forall x_4 \in \mathbf{R} \right\} \text{ (matrices simétricas de orden 2)}$$

$$\dim(\text{Nu}(f)) = 3; B(\text{Nu}(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(f) = \{X \in \mathbf{R}^{2 \times 2} / X = -X^T\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} \mid \forall x_3 \in \mathbf{R} \right\} \text{ (matrices antisimétricas de orden 2)}$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 1; B(\text{Im}(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 2.

$f_1(x, y) = (x, -y)$	$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Reflexión con respecto al eje x
$f_2(x, y) = (-x, y)$	$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Reflexión con respecto al eje y
$f_3(x, y) = (y, x)$	$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Reflexión con respecto a la recta $y = x$
Rotación en $\pi/4$ alrededor del origen con sentido antihorario $f_4(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right), A_4 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$		
Composición de dos transformaciones: una rotación en $\pi/4$ alrededor del origen con sentido horario (T.L. g) y una reflexión con respecto al eje y (T.L. h), esto es $f_5 = h \circ g \Rightarrow A_5 = A_h A_g$ $f_5(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right), A_5 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$		
$f_6(x, y) = \left(\frac{3}{2}x, y \right)$	$A_6 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Expansión en la dirección del eje x de factor $k = \frac{3}{2}$
$f_7(x, y) = \left(\frac{7}{8}x, y \right)$	$A_7 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Compresión en la dirección del eje x de factor $k = \frac{7}{8}$

$f_8(x, y) = \left(x, \frac{3}{2}y\right)$	$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$	Expansión en la dirección del eje y de factor $k = \frac{3}{2}$
$f_9(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}y, y\right)$	$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Cizalladura en la dirección del eje x de factor $k = \frac{1}{2}$
$f_{10}(x, y) = \left(x, \frac{1}{2}x + y\right)$	$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	Cizalladura en la dirección del eje y de factor $k = \frac{1}{2}$

Ejercicio 3.

Caso	Forma explícita	Matriz	Descripción
1	$f(x, y) = (1,5x, 1,5y)$	$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$	Cambio de escala en un factor 1,5
2	$f(x, y) = (-1,5x, -1,5y)$	$A = \begin{pmatrix} -1,5 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{pmatrix}$	Cambio de escala en un factor 1,5 y rotación en π alrededor del origen
3	$f_i(x, y) = (-x, y)$	$A_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Reflexión con respecto al eje y
	$f_{ii}(x, y) = (-y, x)$	$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Rotación en $\pi/2$ alrededor del origen con sentido antihorario
4	$f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right); A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ Rotación en $\pi/4$ alrededor del origen con sentido antihorario		
5	$f_i(x, y) = (-x, y, z)$	$A_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Reflexión con respecto al plano coordenado (yz)
	$f_{ii}(x, y) = (-x, -y, z)$	$A_{ii} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Rotación en π alrededor del eje z

Ejercicio 4.

Caso 1	a	$\text{Im}(f)$: recta sobre la cual se proyecta; $\text{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x\}$ $\text{Nu}(f)$: recta que pasa por el origen perpendicular a aquella sobre la cual se proyecta; $\text{Nu}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = -x\}$
	b	$\lambda = 0; S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = -x\}$ $\lambda = 1; S_{\lambda=1} = \text{Im}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x\}$ (subespacio invariante)
	c	$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right); \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Caso 2	a	$\text{Im}(f) \equiv \mathbf{R}^2; \text{Nu}(f) = \{(0,0)\}$
	b	$\lambda = 1; S_{\lambda=1} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = x\}$ (subespacio invariante; recta donde se refleja) $\lambda = -1; S_{\lambda=-1} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = -x\}$ (vectores que se transforman en sus opuestos; recta perpendicular a aquella sobre la que se refleja y pasa por el origen)
	c	$f(x, y) = (y, x); A = \left((a_{i,j}) \right) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j} = \begin{cases} a_{1,1} = a_{2,2} = 0 \\ a_{1,2} = a_{2,1} = 1 \end{cases}$

Caso 3	a	$\text{Im}(f)$: plano sobre el que se proyecta; $\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y = 0\}$ $\text{Nu}(f)$: recta que pasa por el origen perpendicular al plano donde se proyecta; $\text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = z = 0\}$
	b	$\lambda = 0; S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = z = 0\}$ $\lambda = 1; S_{\lambda=1} = \text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y = 0\}$ (subespacio invariante)
	c	$f(x, y, z) = (x, 0, z); A = \left((a_{i,j}) \right) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j = 1) \vee (i = j = 3) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Caso 4	a	$\text{Im}(f)$: plano sobre el que se proyecta; $\text{Im}(f) \equiv \pi$ $\text{Nu}(f)$: recta que pasa por el origen perpendicular al plano donde se proyecta; $\text{Nu}(f) = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \vec{n}_\pi \cdot \vec{x} = 0\}$
	b	$\lambda = 0; S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f); \lambda = 1; S_{\lambda=1} = \text{Im}(f)$
	c	$\pi \equiv x + y + z = 0$

Ejercicio 5.

5.1) $r': x - y = 0$; **5.2)** $r': 2x - 7y = 0$; **5.3)** $r': 2x + y = 0$; **5.4)** $r': x - 2y = 0$;

5.5) $r': (8 + 5\sqrt{3})x + 11y = 0$

Ejercicio 6.

6.1) i. $\text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = 0\}$; recta coincidente con el eje z .

$\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0\}$; plano coordenado (xy)

ii. $\lambda = 0; S_{\lambda=0} = \text{Nu}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = 0\}$

$\lambda = -1; S_{\lambda=-1} = \text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0\}$

iii. $f(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), 0); A_f = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv. $g(x, y, z) = (a, y, 0); A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$h(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), 1); A_h = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(h \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = h \left(g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2) i. Para $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(f \circ g)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es diferente de $(g \circ f)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(f \circ g)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es diferente de $(g \circ f)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ (x+y)/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $(f \circ g)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

O, en forma equivalente: $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$; $g(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right)$

$(f \circ g)(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, 0, 0\right)$; $(g \circ f)(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$

iii. $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_g = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{f \circ g} = A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.3) No son posibles: $g \circ h, f \circ g, (h \circ g)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$; $(g \circ f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 0 \\ 4x_1 - 8x_2 \end{pmatrix}$;

$(f \circ h)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$; $(h \circ f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$

Observación. Si en el par se pudiera utilizar una misma función, esto es la composición de una función consigo misma, sólo podría realizarse $g \circ g$.

6.4) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_2 - x_3, x_3)$; $A_g = (A_f)^{-1}$

6.5) Si se rota seis veces un ángulo $\theta = \pi/3$, se llega nuevamente al punto de partida. Esta situación indica que la potencia sexta de A será la matriz identidad de orden 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6) Si al vector reflejado según el plano $\alpha \equiv x + y - z = 0$, se le aplica nuevamente la transformación, o sea se lo vuelve a reflejar, se vuelve al punto de partida. Por lo tanto, la transformación resultante $f \circ f$ es la transformación identidad. Esto indica que $A^2 = I$, es decir que A es involutiva.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.a)

$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_2 + 3x_3, 3x_3)$

Autovalores: $\lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = 3$

$\lambda = 1$	$S_{\lambda=1} = \{(x, 0, 0), \forall x \in \mathbf{R}\}$	$B_{on S(\lambda=1)} = \{(1, 0, 0)\}$
$\lambda = 2$	$S_{\lambda=2} = \{(2y, y, 0), \forall y \in \mathbf{R}\}$	$B_{S(\lambda=2)} = \{(2, 1, 0)\} \rightarrow B_{on S(\lambda=2)} = \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)\right\}$
$\lambda = 3$	$S_{\lambda=3} = \left\{\left(\frac{5}{2}z, 3z, z\right), \forall z \in \mathbf{R}\right\}$	$B_{S(\lambda=3)} = \{(5, 6, 2)\} \rightarrow B_{on S(\lambda=3)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{65}}{13}, \frac{6\sqrt{65}}{65}, \frac{2\sqrt{65}}{65}\right)\right\}$

A es diagonalizable. Matriz de pasaje $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

No es posible hallar una matriz que diagonalice ortogonalmente a A . Esta matriz no es simétrica. Esto puede verse también fácilmente si se toma la base de autovectores y se la ortonormaliza

$$B_A = \{(1, 0, 0); (2, 1, 0); (5, 6, 2)\} \rightarrow B'_A = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$$

no se obtiene una base de autovectores que permita diagonalizar a A .

$$g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_2 + 4x_3)$$

Autovalores: $\lambda = 2$ con multiplicidad 2; $\lambda = 3$

$\lambda = 2$	$S_{\lambda=2} = \{(x, 0, 0), \forall x \in \mathbf{R}\}$	$B_{on S(\lambda=2)} = \{(1, 0, 0)\}$
$\lambda = 3$	$S_{\lambda=2} = \{(y, y, -2y), \forall y \in \mathbf{R}\}$	$B_{S(\lambda=3)} = \{(1, 1, -2)\} \rightarrow B_{on S(\lambda=2)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$

A no es diagonalizable

Observar que si se ortonormaliza la base de autovectores, deja de ser una base de autovectores

$$B_A = \{(1, 0, 0); (1, 1, -2)\} \rightarrow B'_A = \left\{(1, 0, 0); \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

$h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / h(\vec{x}) = \text{proy}_{\pi}(\vec{x})$ proyección ortogonal del vector $\vec{x}$ sobre el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$

$$h(\vec{x}) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$$

Autovalores: $\lambda = 1$ con multiplicidad 2; $\lambda = 0$

$\lambda = 1$	$S_{\lambda=1} \equiv \pi$	$B_{S(\lambda=1)} = \{(1, -1, 0); (1, 1, -2)\}$ $B_{on S(\lambda=1)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$
$\lambda = 0$	$S_{\lambda=0} = \{(z, z, z), \forall z \in \mathbf{R}\}$	$B_{S(\lambda=0)} = \{(1, 1, 1)\} \rightarrow B_{on S(\lambda=0)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

Base de autovectores ortonormal

$$B_{on} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$$

A es diagonalizable Matriz de pasaje $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	A es diagonalizable ortogonalmente Matriz de pasaje $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$
---	--

Ejercicio 7.b)

- i. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$; ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
 Autovalores $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$. Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=1} = (-1, 1)$; $S_{\lambda=1} = \{(x, -x), \forall x \in \mathbf{R}\}$
 $\vec{v}_{\lambda=2} = (-2, 1)$; $S_{\lambda=2} = \{(-2y, y), \forall y \in \mathbf{R}\}$

Es diagonalizable. $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- ii. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$; ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$
 no existen autovalores reales ($\nexists \lambda \in \mathbf{R} / \lambda^2 + 1 = 0$)

No es diagonalizable con escalares reales

- iii. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 25$; ecuación característica $\lambda^2 - 25 = 0$
 Autovalores $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = -5$. Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=5} = (1, 2)$; $S_{\lambda=5} = \{(x, 2x), \forall x \in \mathbf{R}\}$
 $\vec{v}_{\lambda=-5} = (-2, 1)$; $S_{\lambda=-5} = \{(-2y, y), \forall y \in \mathbf{R}\}$

Es diagonalizable ortogonalmente

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 2 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- iv. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ecuación característica $(5 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$

Autovalores $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$

Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=1} = (1, 1, 0)$; $B(S_{\lambda=5}) = \{(-1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ base ortogonal

Ortonormalizando los autovectores para hallar la matriz de pasaje ortogonal:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D = P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- vi. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ecuación característica $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$

Autovalor $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad 3. Autovector $\vec{v}_{\lambda=2} = (1, 1, -3)$; $\dim(S_{\lambda=2}) = 1$

A no es diagonalizable. No existe la matriz de pasaje P

Ejercicio 8.

8.1) i. Sí es suficiente; $f(2,0,2) = f[(1, -1, 2) + (1, 1, 0)] = f(1, -1, 2) + f(1, 1, 0) = (1, 5, 0)$

ii. No. $\{(1, -1, 2); (1, 1, 0)\}$ no es una base de $\mathbf{R}^3$

8.2) Es posible hallar los transformados de los vectores: $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 / -a + b + c = 0$

8.2) No. $(2, 2, -4) = (-2)(1, -1, 2) \wedge f(2, 2, -4) \neq (-2)f(1, -1, 2)$

8.3) Si, $\{(1, -1, 2); (1, 1, -4); (1, 0, -2)\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$; $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = (0, -2y + \frac{1}{2}z, x)$

8.4) $\{(1, -1); (1, 1)\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$

$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2: \vec{x} = \alpha(1, -1) + \beta(1, 1)$ y esta combinación lineal es única, por ser combinación lineal de vectores de una base. Luego $f(\vec{x}) = \alpha f(1, -1) + \beta f(1, 1)$, que es también C.L. única

$f(x, y) = (4x - 2y, -x - 3y)$

8.5) Existe la transformación lineal f , pero no es única

$\{(1, -1, 2); (1, 1, -4); (0, -2, 6)\}$ no es una base de $\mathbf{R}^3$ $[(0, -2, 6) = (1, -1, 2) - (1, 1, -4)]$

Para definir alguna transformación lineal, basta con completar el conjunto $\{(1, -1, 2); (1, 1, -4)\}$, a una base para $\mathbf{R}^3$ y determinar el transformado de dicho vector.

Ejemplo 1. Si $\begin{cases} f(1, -1, 2) = (0, 3, 1) \\ f(1, 1, -4) = (0, -4, 1) \\ f(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow f_1: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = (0, -2y + \frac{1}{2}z, -3y - z)$

Ejemplo 2. Si $\begin{cases} f(1, -1, 2) = (0, 3, 1) \\ f(1, 1, -4) = (0, -4, 1) \\ f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow f_1: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = (0, -2y + \frac{1}{2}z, -3y - z)$

$f_2: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f_2(x, y, z) = (\frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z, x + y + \frac{3}{2}z, \frac{4}{3}x + y + \frac{1}{3}z)$

Ejercicio 9.

9.1) $\dim(Nu(f)) = 1$ si $k = 0 \vee k = -3/2$

9.2) Por ejemplo, $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

9.3) $a = 1 \wedge b = -1$; **9.4)** Por ejemplo, $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 / f(x_1, x_2) = (-2x_1 + x_2, -4x_1 + 2x_2)$

Ejercicio 10.

10.1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda$; los autovalores que se

obtienen resolviendo la ecuación característica $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0$ son:

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 6$$

Los subespacios asociados son: $S_{\lambda=0} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \alpha(-2, 2, 1), \forall \alpha \in \mathbf{R}\} = \{(-2z, 2z, z), \forall z \in \mathbf{R}\}$

$S_{\lambda=3} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \beta(1, 2, -2), \forall \beta \in \mathbf{R}\} = \{(x, 2x, -2x), \forall x \in \mathbf{R}\}$

$S_{\lambda=6} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 / \vec{x} = \delta(2, 1, 2), \forall \delta \in \mathbf{R}\} = \{(2y, y, 2y), \forall y \in \mathbf{R}\}$

10.2) La transformación lineal es $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = (3x + y, y + 3z, y - z)$ y la correspondiente matriz asociada, utilizando la base canónica de $\mathbf{R}^3$, resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

10.3) i. La afirmación es verdadera dado que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores linealmente independientes, con un mismo autovalor, igual a cero, por lo cual se transforman en el vector nulo del segundo espacio, y

$\{\vec{u}; \vec{v}\}$ es una base para el núcleo de la transformación lineal, que tendrá dimensión dos. Es posible agregar otro vector, linealmente independiente con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cuyo transformado también sea el vector nulo, con lo cual la dimensión para el núcleo será tres

ii. El conjunto $\{(1,1,0); (0,1,1)\}$, debemos completarlo a una base de $\mathbf{R}^3$. Para completar a la base, debemos elegir vectores: $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 / a - b + c \neq 0$

Si el vector elegido es $(a, b, c) = (1,0,1) \Rightarrow f(1,0,1) = (1,1,0)$ y para esta elección la transformación lineal es:

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, 0 \right)$$

Ejercicio 11.

i. Ecuación Característica: $(1 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0$. Autovalores: $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 3$ (simple)

Los autovalores no dependen del valor de k

La matriz sólo es diagonalizable para $k = 1$. Base de autovectores: $B = \{(1,0,0); (0,1,-2); (1,0,2)\}$

ii. Ecuación Característica: $(1 - \lambda)^2(1 + \lambda) = 0$. Autovalores: $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = -1$ (simple)

La matriz sólo es diagonalizable para $k = 0$. Base de autovectores: $B = \{(1,0,2); (0,1,-1); (0,1,1)\}$

Sugerencia para hallar el polinomio característico: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\begin{vmatrix} 1+k-\lambda & -k & k \\ 2+k & -k-\lambda & k-1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C2 \leftarrow C2+C3} \begin{vmatrix} 1+k-\lambda & 0 & k \\ 2+k & -\lambda-1 & k-1 \\ 2 & -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{F2 \leftarrow F2-F3} \begin{vmatrix} 1+k-\lambda & 0 & k \\ k & 0 & k-1+\lambda \\ 2 & -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+k-\lambda & 0 & k \\ k & 0 & k-1+\lambda \\ 2 & -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1+k-\lambda & k \\ k & k-1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1+\lambda) \begin{vmatrix} k+(1-\lambda) & k \\ k & k-(1-\lambda) \end{vmatrix} = (1+\lambda)\{[k+(1-\lambda)][k-(1-\lambda)] - k^2\}$$

$$P(\lambda) = (1+\lambda)([k^2 - (1-\lambda)^2] - k^2) = (-1)(1+\lambda)(1-\lambda)^2$$

Observación: los autovalores no dependen del valor de k