GUÍA DE EJERCITACIÓN 5 – TRANSFORMACIONES LINEALES

Se denominan transformaciones (o aplicaciones) entre dos espacios vectoriales, estructurados sobre un mismo cuerpo de escalares, a las funciones que a cada elemento del primer espacio vectorial le hace corresponder un elemento del segundo espacio vectorial. Dichas transformaciones se representarán en la forma $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ indicando los nombres de los espacios vectoriales de partida y de llegada, respectivamente.

Caso particular. **Transformación traslación** (o afín)

$$f: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2} \ / \ f(x, y) = (x - \alpha, y - \beta), \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R},$$

$$f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3} \ / \ f(x, y, z) = (x - \alpha, y - \beta, z - \gamma), \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}, \gamma \in \mathbf{R}$$

Transformación inyectiva. Dada la transformación $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es inyectiva si y solo si:

$\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall \vec{y} \in \mathbf{V} : \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$ o equivalentemente, $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall \vec{y} \in \mathbf{V} : f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

Transformación suryectiva o sobreyectiva. Dada la transformación $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es suryectiva si y solo si todo vector de $\mathbf{W}$ es imagen de algún vector de $\mathbf{V}$, es decir, si y solo si:

$$\forall \vec{w} \in \mathbf{W} \Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbf{V} \text{ tal que } f(\vec{x}) = (\vec{w}).$$

Transformación biyectiva. Dada la transformación $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es biyectiva si y solo sí es inyectiva y suryectiva.

Transformación lineal (T.L.). Definición. Dados dos espacios vectoriales $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, '+', '\cdot')$ y $(\mathbf{W}, \mathbf{R}, '+', '\cdot')$, se denomina transformación lineal a toda función f definida de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ que verifica:

1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall \vec{y} \in \mathbf{V}$;
2) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}), \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \vec{x} \in \mathbf{V}$.

Propiedades: $f(\vec{0}_\mathbf{V}) = \vec{0}_\mathbf{W}$; $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

Algunas transformaciones lineales particulares.

$f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}; f(\vec{x}) = \vec{0}_\mathbf{W}$	T.L. Nula (o T.L. Cero)
$f: \mathbf{V} \to \mathbf{V};\ f(\vec{x}) = k\vec{x}$	Si $0 < k < 1$, T.L. Contracción o compresión de factor k
	Si $k = 1$, T.L. Identidad
	Si $k > 1$, T.L. Estiramiento o dilatación de factor k
$f: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}; f(x, y) = (\alpha x, y)$	Si $0 < \alpha < 1$, T.L. Contracción en el eje x de factor α
	Si $\alpha > 1$, T.L. Estiramiento (extensión) en el eje x de factor α
$f: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}; f(x, y) = (x, \beta y)$	Si $0 < \beta < 1$, T.L. Contracción en el eje y de factor β
	Si $\beta > 1$, T.L. Estiramiento (extensión) en el eje y de factor β
$f: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}; f(x, y) = (x + \beta y, y)$	T.L. Cizallante de factor β en la dirección del eje x
$f: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}; f(x, y) = (x, \alpha x + y)$	T.L. Cizallante de factor α en la dirección del eje y

T.L. Rotación en el plano de ángulo θ

$$f: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}; f(x, y) = (x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta), x \operatorname{sen}(\theta) - y \cos(\theta))$$

En esta unidad todas las rotaciones se medirán con ángulos con sentido horario $(\theta < 0)$ y antihorario $(\theta > 0)$ con $|\theta| \in [0; 2\pi]$.

T.L. Proyección ortogonal sobre un subespacio $S \subset \mathbf{W}$, $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ / $f(\vec{x}) = proy_S\vec{x}$.

Esto es, si $B_S = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \cdots; \vec{v}_r\}$ es una base ortogonal de $S \Rightarrow$

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i.$$

T.L. Reflexión sobre un subespacio $S \subset \mathbf{W}$, $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ /

$f(\vec{x}) = ref_S\vec{x} = (2proy_S\vec{x}) - \vec{x}$, o equivalentemente, $f(\vec{x}) = ref_S\vec{x} = \vec{x} - (2proy_{S\perp}\vec{x})$

Núcleo de una transformación lineal $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Definición. Si f es una transformación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, se denomina núcleo (kernel o nulidad) de la transformación lineal f, $\mathrm{Nu}(f)$, al subespacio de vectores de $\mathbf{V}$ definido como

$$\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in \mathbf{V} / f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbf{W}}\}.$$

Observación: $\vec{0}_{\mathbf{V}} \in \mathrm{Nu}(f)$, cualquiera sea la T.L. f.

Imagen de una transformación lineal $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Definición. Si f es una transformación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, se denomina imagen (o rango) de la transformación lineal f, $\mathrm{Im}(f)$, al subespacio de vectores de $\mathbf{W}$ definido como

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in \mathbf{W} / \exists \vec{x} \in \mathbf{V} \wedge f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Observación: $\vec{0}_{\mathbf{W}} \in \mathrm{Im}(f)$, cualquiera sea la T.L. f.

Dada $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $\dim \mathrm{Nu}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(\boldsymbol{V})$.

Operaciones definidas entre transformaciones lineales

Dadas las siguientes transformaciones lineales $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, $g: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ y $h: \mathbf{W} \to \mathbf{U}$, se definen las siguientes transformaciones lineales:

T.L. Suma $f + g: \mathbf{V} \to \mathbf{W} / \forall \vec{x} \in \mathbf{V}: (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$

T.L. Diferencia $f - g: \mathbf{V} \to \mathbf{W} / \forall \vec{x} \in \mathbf{V}: (f - g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{x})$

T.L. Producto de un escalar α por la T.L. $\alpha f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}\, f / \forall \vec{x} \in \mathbf{V}: (\alpha f)(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

T.L. Composición $h \circ f: \mathbf{V} \to \mathbf{U} / \forall \vec{x} \in \mathbf{V}: (h \circ f)(\vec{x}) = h\big(f(\vec{x})\big)$

Transformación lineal inversa. Si $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una transformación lineal biyectiva, existe $f^{-1}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, llamada transformación lineal inversa de f, que verifica $(f^{-1} \circ f)(\vec{x}) = (f \circ f^{-1})(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbf{V}$.

Matriz asociada a una transformación lineal. Sean $B_{\mathbf{V}} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \cdots; \vec{v}_n\}$ y $B_{\mathbf{W}} = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3; \cdots; \vec{w}_m\}$ bases ordenadas de los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente. Si $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una transformación lineal entonces existe una única matriz $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}$ tal que

$$\forall [X]_{B_{\mathbf{V}}} \in \mathbf{V}: [f(X)]_{B_{\mathbf{W}}} = A \cdot [X]_{B_{\mathbf{V}}},$$

donde $[X]_{B_{\mathbf{V}}}$ es una matriz columna compuesta por las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $B_{\mathbf{V}}$, A es una matriz tal que su columna i-ésima está por formada por las coordenadas de $f(\vec{v}_i)$ con $i = 1,2, \dots, n$ expresadas en la base $B_{\mathbf{W}}$. $[f(X)]_{B_{\mathbf{W}}}$ es una matriz columna compuesta por las coordenadas de $f(\vec{x})$ en la base $B_{\mathbf{W}}$.

Notación: Si $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, cuando se trabaje con las bases canónicas serán equivalentes:

$$\vec{x} \in \mathbf{R}^n, f(\vec{x}) = \vec{y} \text{ con } \vec{y} \in \mathbf{R}^m \equiv X \in \mathbf{R}^{n\times 1}, f(X) = A \cdot X = Y \text{ con } Y \in \mathbf{R}^{m\times 1}$$

$$\vec{x} \leftrightarrow X;\ f \leftrightarrow A;\ \ f(\vec{x}) = \vec{y} \leftrightarrow A \cdot X = Y;\ \vec{y} \leftrightarrow Y$$

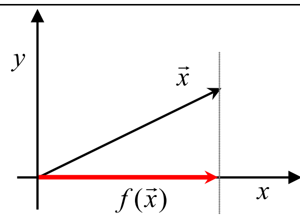
Si $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \leftrightarrow A; g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \leftrightarrow B; h: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p \leftrightarrow C$

$$f + g \ \leftrightarrow\ A + B;\ f - g \ \leftrightarrow\ A - B;\ \alpha f \ \leftrightarrow\ \alpha A; h \circ f \leftrightarrow C \cdot A$$

Ejemplos

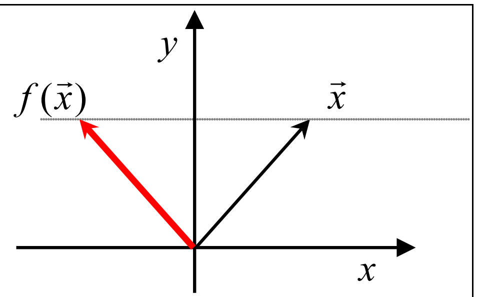
$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ Proyección ortogonal sobre el eje x

$$f(x, y) = (x, 0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



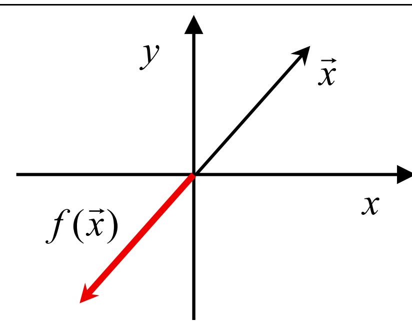
$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ Reflexión respecto al eje y

$$f(x, y) = (-x, y) \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



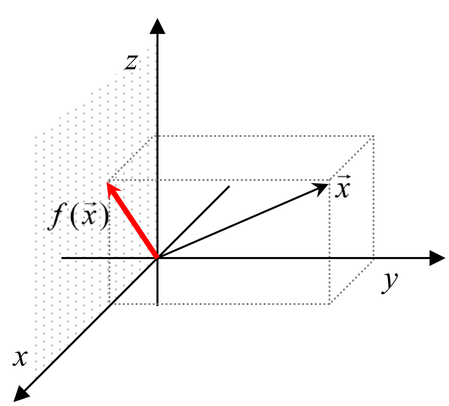
$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ Simetría central con respecto al origen de coordenadas

$$f(x, y) = (-x, -y) \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ Proyección ortogonal sobre el plano xz

$$f(x, y, z) = (x, 0, z) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

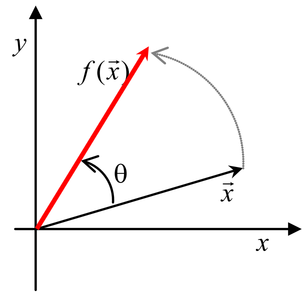


$f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ Rotación de ángulo θ con respecto al origen de coordenadas

$$f(x,y) = \big(x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)\big)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta) \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$\theta > 0$: sentido antihorario; $\theta < 0$: sentido horario

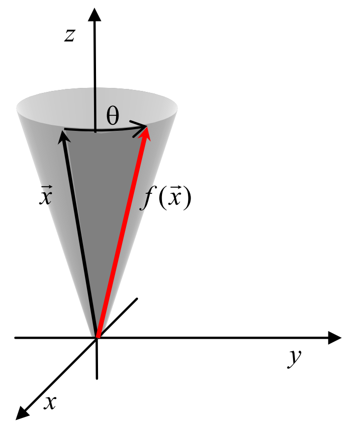


f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ Rotación de ángulo θ con respecto al eje z

$$f(x,y,z) = (x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta), z)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta) \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

$\theta > 0$: sentido antihorario; $\theta < 0$: sentido horario

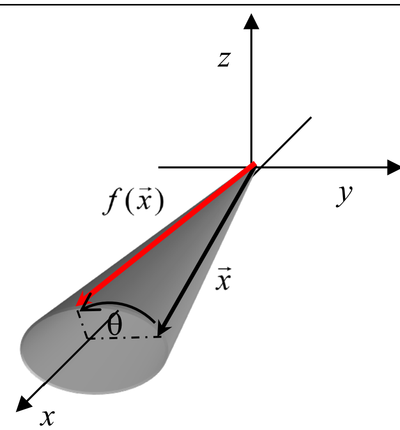


f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ Rotación de ángulo θ con respecto al eje x

$$f(x,y,z) = \big(x, y\cos(\theta) - z\,\mathrm{sen}(\theta), y\,\mathrm{sen}(\theta) + z\cos(\theta)\big)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos(\theta) - z\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y\,\mathrm{sen}(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$\theta > 0$: sentido antihorario; $\theta < 0$: sentido horario

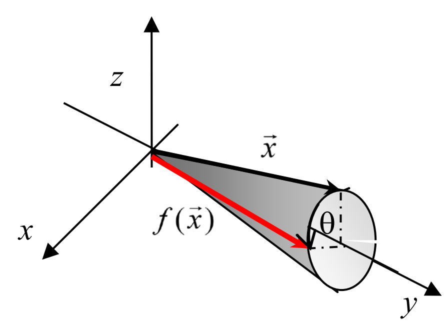


f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ Rotación de ángulo θ con respecto al eje y

$$f(x,y,z) = \big(x\cos(\theta) + z\,\mathrm{sen}(\theta), y, -x\,\mathrm{sen}(\theta) + z\cos(\theta)\big)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + z\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y \\ -x\,\mathrm{sen}(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$\theta > 0$: sentido antihorario; $\theta < 0$: sentido horario



Autovalores y autovectores de una T.L. $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Dada una transformación lineal $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, se denomina autovalor (valor propio, valor característico o eigenvalor) de f, al escalar λ para el que exista algún vector no nulo $\vec{x} \in \mathbf{V} - \{\vec{0}_{\mathbf{V}}\}$, tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Al vector no nulo anterior se lo denomina autovector (vector propio, vector característico o eigenvector) asociado a λ.
Observación: si $\lambda = 1$ es un valor propio de f, los vectores propios asociados verifican que $f(\vec{x}) = \vec{x}$ y se denominan vectores invariantes frente a la transformación.

Subespacio propio de una T.L. $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Cada autovalor de la T.L. f tiene asociado un subespacio definido por

$$S_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbf{V} / f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\},$$

esto es, por todos los autovectores de autovalor λ y el vector nulo de $\mathbf{V}$.

Observación: como la T.L. f está definida dentro de un mismo espacio vectorial, su matriz asociada, A, es cuadrada de orden coincidente con la dimensión del espacio vectorial. Se refiere indistintamente autovalores y autovectores de f ó autovalores y autovectores de A.

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \leftrightarrow A \cdot X = \lambda X$$

Condición: λ es autovalor $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Polinomio característico. Se denomina polinomio característico (o polinomio propio) de la T.L. $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ de matriz asociada A, a la expresión polinómica dependiente de λ, $P(\lambda)$,que se obtiene del desarrollo:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

donde I es la matriz identidad.

Ecuación característica. Se denomina ecuación característica de la T.L. $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ de matriz asociada A, a la ecuación que permite hallar las raíces (o ceros) del polinomio característico

$$P(\lambda) = 0 \equiv \det(A - \lambda I) = 0.$$

Observación: la resolución de la ecuación característica permite hallar los autovalores de f (ó de A).

Propiedades. Los autovectores asociados a autovalores distintos, son linealmente independientes.
Si la matriz A es simétrica, sus autovalores son reales y los subespacios asociados a autovalores diferentes resultan son ortogonales.

Matrices semejantes. Dos matrices son semejantes, si y sólo si, tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos autovalores.
Matriz diagonalizable. La matriz A asociada a una transformación lineal $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D. Si A es diagonalizable, existe una matriz P inversible denominada matriz de pasaje, tal que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D.$$

La matriz A de orden n es diagonalizable si y sólo si admite n autovectores independientes. Esta afirmación es equivalente a que si f tiene r autovalores diferentes, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ entonces

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{r} \dim(S_{\lambda i}).$$

La matriz de pasaje P se construye tomando como sus columnas, n autovectores lineralmente independientes de A y la matriz diagonal D tendrá en su diagonal principal los autovalores de A correspondientes a los autovectores que se emplearon para construir las columnas de P, en el mismo orden.
Matrices ortogonalmente diagonalizables. La matriz A asociada a una transformación lineal $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ es ortogonalmente diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D con una matriz de pasaje ortogonal, es decir $Q^{-1} \cdot A \cdot Q = D$ siendo $Q^{-1} = Q^T$.

La diagonalización ortogonal de matrices está directamente ligada a las matrices simétricas a través de las siguientes propiedades:

Los autovalores de una matriz simétrica real, son reales.

En una matriz simétrica real, los autovectores correspondientes a autovalores diferentes, son siempre ortogonales.

Una matriz A es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A es simétrica.

Procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica:

1) Se forma el polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
2) Se determinan las raíces del polinomio característico de A.
3) Para cada autovalor λ_i de A, de multiplicidad algebraica k_i, se determina una base de k_i autovectores para el espacio propio de λ_i.
4) Para cada espacio propio, transformamos la base obtenida en 3) en una base ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt.

5) Sea Q la matriz cuyas columnas son los n autovectores linealmente independientes determinados en el paso 4), entonces Q es una matriz ortogonal y $Q^{-1} \cdot A \cdot Q = Q^T \cdot A \cdot Q = D$ es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los autovalores de A correspondientes a las respectivas columnas de Q.

Ejercicio 1.

Identificación de la condición de linealidad en una transformación. Búsqueda de contraejemplos. Valoración de la escritura matricial cuando lo sea. Concepto de Subespacios Núcleo e Imagen.

Determinar cuáles de las siguientes transformaciones son lineales. En los casos en los que la transformación no sea lineal, dar un contraejemplo con el que se visualice esta condición. En los casos que la transformación lo sea, dar la escritura matricial y hallar los subespacios Núcleo e Imagen. Indicar dimensión y una base para estos subespacios.

1.1) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_2, 0)$

1.2) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

1.3) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 - 1, x_2 + 2)$ (caso particular de traslación)

1.4) $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 6x_3, 0, -4x_1 + 12x_3)$

1.5) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, x_1 + x_2)$

1.6) $f: \mathbf{R}^{2\times 2} \to \mathbf{R}, f\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} = x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}$ (valor del determinante de la matriz)

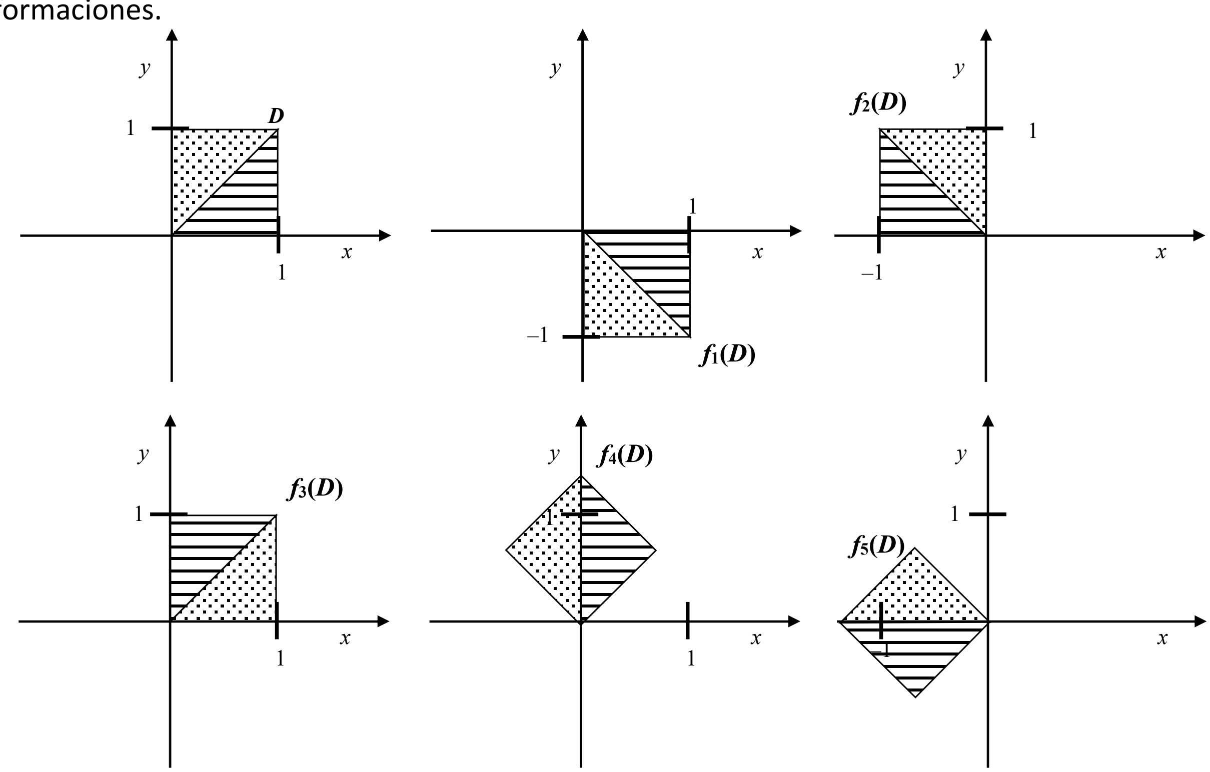
1.7) $f: \mathbf{R}^{2\times 2} \to \mathbf{R}^{2\times 2}, f(X) = X - X^T$ con $X \in \mathbf{R}^{2\times 2}$

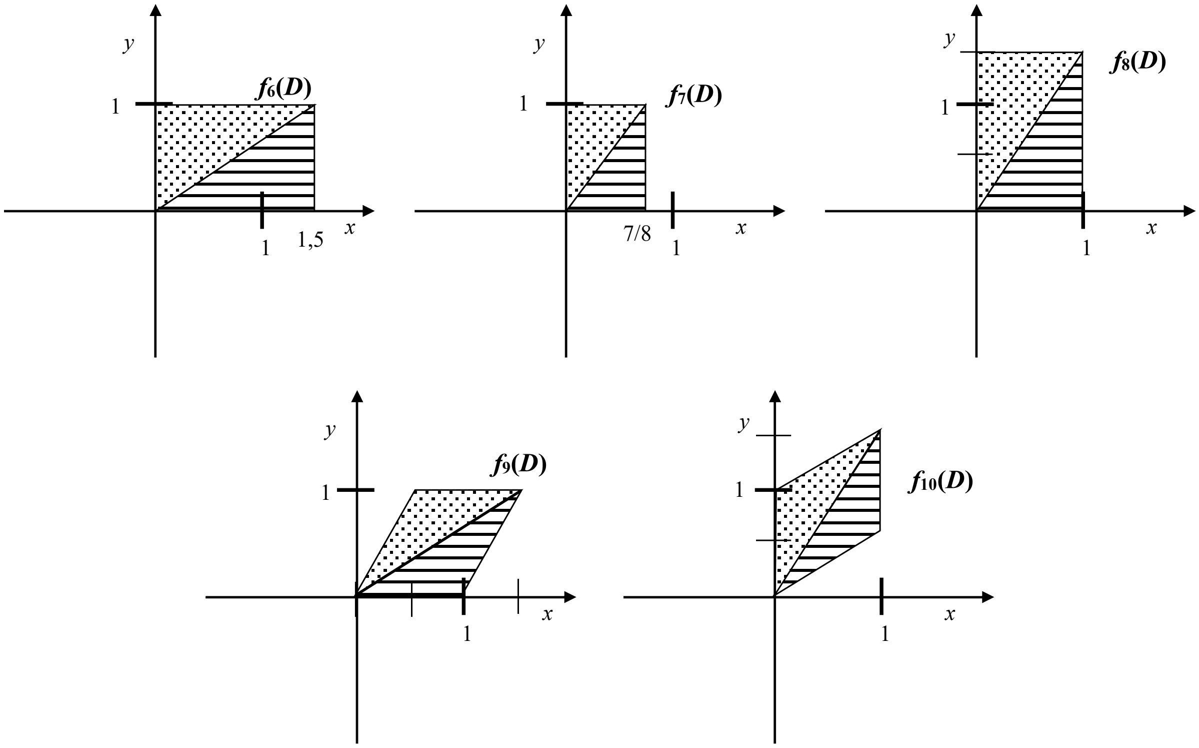
Observación: Para la escritura matricial, se considera el isomorfismo que existe entre $\mathbf{R}^{2\times 2}$ **y** $\mathbf{R}^4$.

Ejercicio 2.

Visualización del efecto de aplicar transformaciones lineales elementales a regiones sencillas y búsqueda de la función adecuada que provoque una modificación prefijado en un conjunto de puntos dado.

Dada la región $\boldsymbol{D}$, definida por un cuadrado de lado 1 formado por dos triángulos isósceles iguales indicada en la primer figura, identificar la transformación lineal $f_i: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$tal que modifica $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{f_i(D)}$ para cada valor de $i = 1,2,\ldots,10$. Dar la forma explícita y la matriz asociada a cada una de estas transformaciones.



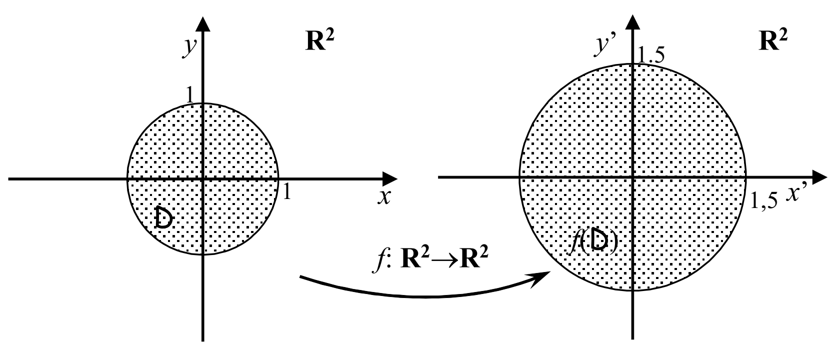


Ejercicio 3.

Desarrollar el pensamiento visual en su vínculo con las transformaciones lineales. Escritura de transformaciones en sus expresiones explícita y matricial. Identificación y descripción como lugar geométrico de las regiones planas y espaciales involucradas.

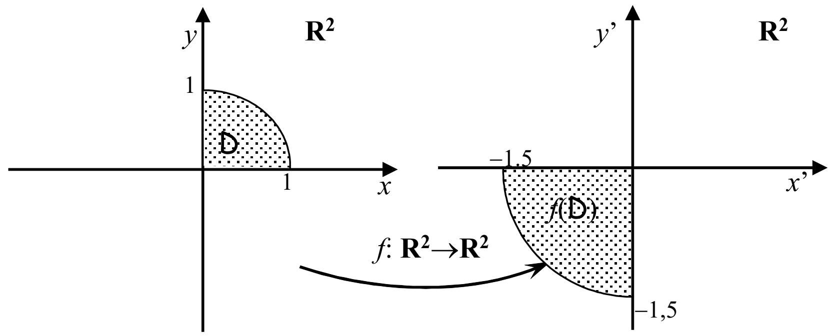
Proponer, para cada caso, una transformación lineal f que transforme la región indicada en el espacio vectorial de la izquierda en la región indicada en el espacio vectorial de la derecha, y otras especificaciones que eventualmente se expliciten.

Caso 1.



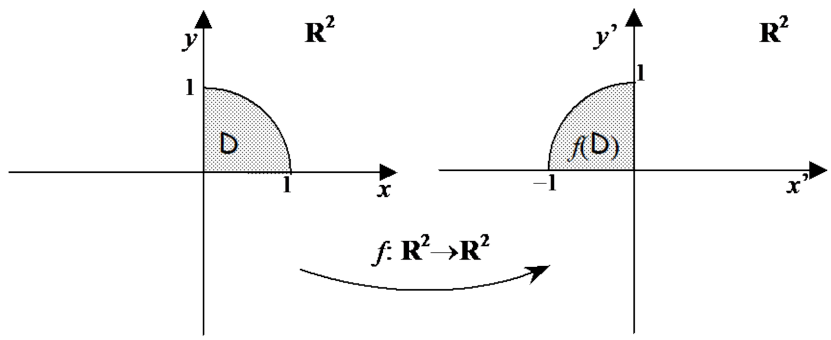
$$\boldsymbol{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\};\ f(\boldsymbol{D}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1{,}5\}$$

Caso 2.



$\boldsymbol{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}; f(\boldsymbol{D}) = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} / x^2 + y^2 \leq 1{,}5 \wedge x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$

Caso 3.



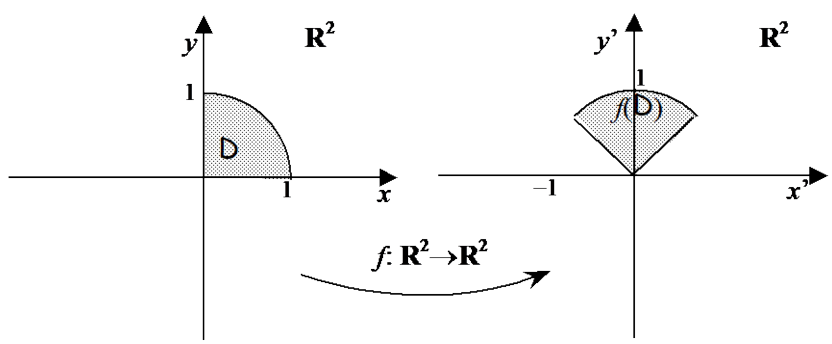
$\boldsymbol{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}; f(\boldsymbol{D}) = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$

Considerar dos transformaciones para este caso:

i. una tal que $f_i(1{,}0) = (-1{,}0)$,

ii. la otra tal que $f_{ii}(1{,}0) = (0{,}1)$.

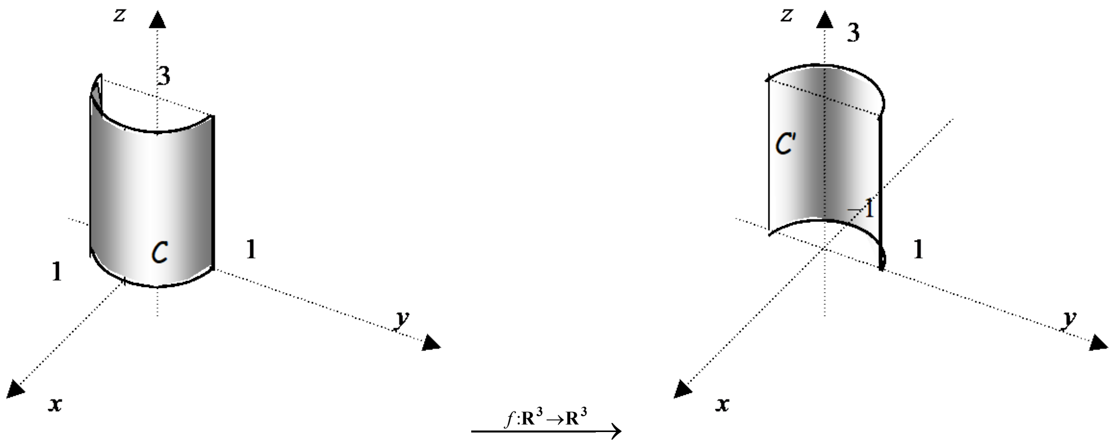
Caso 4.



$$\boldsymbol{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\};$$

$$f(\boldsymbol{D}) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R^2} / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y \geq |x|\right\}$$

Caso 5.

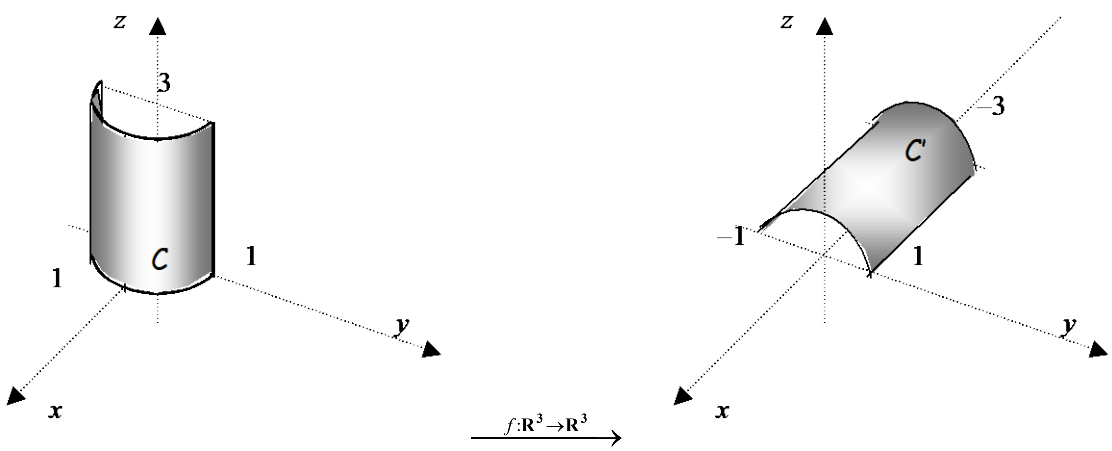


$$\boldsymbol{C} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\};$$
$$f(\boldsymbol{C}) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 = 1 \wedge x \leq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\}$$

Considerar dos transformaciones para este caso:

i. Una tal que $f_i(0,1,3) = (0,1,3)$	*ii.* La otra tal que $f_{ii}(0,1,3) = (0,-1,3)$

Caso 6



$$\boldsymbol{C} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\};$$
$$f(\boldsymbol{C}) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / y^2 + z^2 = 1 \wedge -3 \leq x \leq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge z \geq 0\}$$

Ejercicio 4.

Identificar subespacios especiales (Núcleo, Imagen, Subespacios Propios) asociados a transformaciones lineales en el plano y en el espacio tridimensional en un acercamiento al tema a partir de la interpretación geométrica.

Se definen distintas transformaciones lineales $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, con $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ (casos 1 y 2) o con $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ (casos 3 y 4). Para cada una de ellas contestar las siguientes cuestiones:

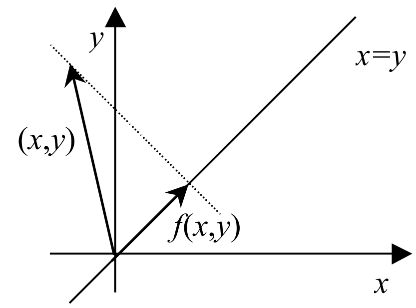
a) Describir geométricamente cuáles son los subespacios imagen de f y núcleo de f. Dar para cada uno de ellos una base.

b) Describir geométricamente cuáles son los autovectores y autovalores de f, esto es los vectores no nulos $\vec{v} \in \mathbf{V}$ tales que su imagen es un múltiplo escalar de sí mismo, $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Indicar los valores posibles de λ y el subespacio asociado a los autovectores para cada uno de ellos, S_λ.

c) Escribir la forma explícita de f y su matriz asociada.

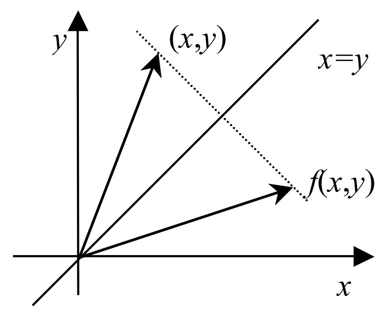
Caso 1. Sea la transformación lineal $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que le haga corresponder a cada vector (x, y) del plano su proyección ortogonal sobre la recta $x = y$, como indica la figura.

Figura Caso 1.



Caso 2. Sea la transformación lineal $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que le haga corresponder a cada vector (x, y) del plano su imagen especular con respecto a la recta $x = y$, como indica la figura.

Figura Caso 2.



Caso 3. Sea la transformación lineal $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$tal que a cada vector del espacio $\vec{v} = (x, y, z)$ $\vec{v} = (x, y, z)$ le hace corresponder su proyección sobre el plano coordenado (xz).

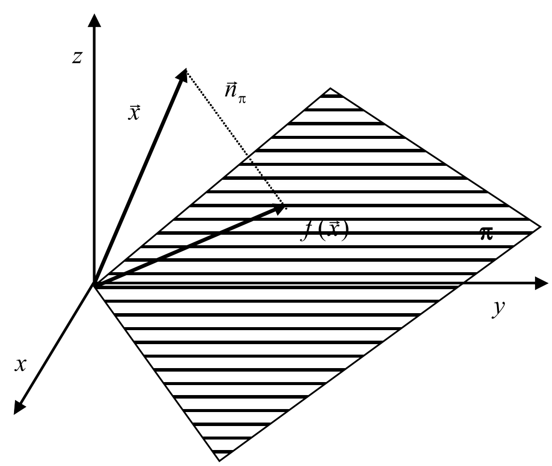
Caso 4. Sea $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal que representa la proyección ortogonal de cada vector del espacio sobre un plano π que pasa por el origen, esto es $f(x, y, z) = proy_\pi(x, y, z)$.

Información adicional para el ítem **c)**. La matriz asociada a f es

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la ecuación del plano π.

Figura Caso 4.



Ejercicio 5.

Hallar la imagen de un subespacio mediante transformaciones elementales en el plano.

Hallar la imagen de la recta del plano definida por $r\colon 2x - y = 0$ a través de cada una de las siguientes transformaciones. Identificar geométricamente la imagen obtenida y representarla.

5.1) Compresión de factor $1/2$ en la dirección del eje y.

5.2) Deslizamiento constante (cizallamiento) de factor 3 en la dirección del eje x.

5.3) Reflexión respecto al eje y.

5.4) Reflexión respecto a la recta definida por $x - y = 0$.

5.5) Rotación alrededor del origen de coordenadas de ángulo $\theta = \pi/3$.

Ejercicio 6.

Visualizar el mecanismo de composición de transformaciones lineales a partir de aplicaciones geométricas sucesivas, para luego adquirir la destreza en ejemplos más generales. Relación entre operaciones entre transformaciones lineales y operaciones entre las matrices asociadas a las mismas.

6.1) Sea la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que consiste en dos aplicaciones sucesivas. Primero proyecta cada vector del espacio sobre el plano coordenado (xy), y luego, al vector imagen obtenido lo gira un ángulo $\theta = \pi$ sobre el plano mencionado.

i. Identificar geométricamente los subespacios núcleo e imagen.

ii. Hallar todos los vectores no nulos $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$, tales que su imagen es un múltiplo escalar de sí mismo, $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Indicar los valores de λ.

iii. Analizar un caso más genérico donde la rotación sobre el plano (xy) de la imagen dada por la primera proyección se corresponde con un ángulo $\theta \in (0,2\pi)$ (sentido antihorario) donde $\theta \neq \pi$. Escribir la forma explícita y la matriz asociada a f.

iv. Dar la forma explícita de f y su matriz asociada A. Constatar que f se puede escribir como la composición de dos transformaciones lineales g y h, indicando cuáles, y que A se corresponde con el producto de las matrices asociadas a g y h.

6.2) Sea f la proyección ortogonal sobre el eje x en $\mathbf{R}^3$, y g la proyección ortogonal sobre la recta

$$r: y = x \wedge z = 0.$$

i. Mostrar con dos ejemplos que la composición de f con g no es conmutativa, esto es $g \circ f \neq f \circ g$.

ii. Escribir las formas explícitas de f y g, y de las dos composiciones posibles, $g \circ f$ y $f \circ g$.

iii. Verificar el vínculo entre las matrices asociadas a f y a g, y las matrices correspondientes a sus composiciones.

6.3) Dadas las siguientes transformaciones lineales, efectuar, con cada par de ellas, todas las composiciones posibles si:

$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3: f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -2x_1 + 3x_2, x_2 - 2x_1)$,
$g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3: g(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2, 0, -3x_2 + x_3)$,
$h: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2: h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_2 + x_3)$.

6.4) Dada la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + x_3, x_3)$, hallar en caso de ser posible, una transformación g tal que al componer $f \circ g$ resulte la transformación identidad. Nota: $g = f^{-1}$.

6.5) Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotación en el plano en un ángulo $\theta = \pi/3$ y sea A su matriz asociada. Si f se compone consigo misma 6 veces, esto es $f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f$, ¿cuál será la transformación resultante? (no realizar los cálculos, sino pensarlo en términos de acciones). ¿Qué indica esto para la potencia sexta de la matriz A, esto es A^6? Verificarlo.

6.6) Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la reflexión con respecto al plano $\alpha \equiv x + y - z = 0$ y sea A su matriz asociada. Si f se compone consigo misma 2 veces, esto es $f \circ f$, ¿cuál será la transformación resultante? (no realizar los cálculos, sino pensarlo en términos de acciones). ¿Qué indica esto para el cuadrado de la matriz A, esto es A^2? Verificarlo.

Ejercicio 7.

Adquirir el método del cálculo de autovalores y autovectores. Reforzar las destrezas necesarias para distinguir transformaciones diagonalizables o no

a) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales determinar los autovalores y sus correspondientes subespacios de autovectores asociados y, en caso de ser posible, encontrar una matriz de pasaje que diagonalice a la matriz asociada de la transformación. Ortonormalizar la base de

autovectores de la transformación y, en caso de ser posible, escribir una matriz de pasaje ortogonal (observar que esto sólo será posible si la matriz asociada es simétrica):
$f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}/f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,2x_2+3x_3,3x_3)$,
$g\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}/g(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_2-x_3,2x_2+4x_3)$,
$h\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}/h(\vec{x})=proy_{\pi}(\vec{x})$ proyección del vector $\vec{x}$ sobre el plano $\pi\equiv x+y+z=0$.

b) Para cada una de las siguientes matrices A, correspondientes a transformaciones lineales expresadas en función de la base canónica respectiva, encontrar el polinomio característico, la ecuación característica, los autovalores y sus autovectores asociados y obtener, si es posible, la matriz de pasaje P que las diagonalice y la matriz diagonal con la que son semejantes, $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$.

$i.$ $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; ii. $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; iii. $\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; iV. $\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$; v. $\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Conceptualización e integración. Trabajo con parámetros.

Ejercicio 8.

Identificación de la calidad de suficiencia de la información aplicada a transformaciones lineales. Reconocimiento de la incompatibilidad en la información.

8.1) Sea la transformación lineal $f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ de la que se conoce que

$$f(1,-1,2) = (0,3,1) \text{ y } f(1,1,0) = (1,2,-1),$$

responder las siguientes cuestiones justificando en cada caso:

i. La información dada, ¿es suficiente para hallar $f(2,0,2)$?

ii. Con la información dada, ¿es posible hallar los transformados de todos los vectores de la forma (a,b,c)? En caso negativo, indicar las características de los vectores que sí se pueda hallar $f(a,b,c)$.

8.2) ¿Es posible hallar una transformación lineal $f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ tal que cumpla que $f(1,-1,2) = (0,3,1)$ y $f(-2,2,-4) = (0,-6,-1)$? ¿Por qué?

8.3) ¿Es posible hallar una transformación lineal $f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ tal que se cumpla que $f(1,-1,2) = (0,3,1)$ y $f(1,1,-4) = (0,-4,1)$ y $f(1,0,-2) = (0,-1,1)$? ¿Por qué?

8.4) Demostrar que existe una única transformación lineal $f\colon \mathbf{R^2}\to\mathbf{R^2}$ tal que $f(1,-1) = (6,2)$ y $f(1,1) = (2,-4)$. Hallarla.

8.5) ¿Existe y es única la transformación lineal $f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ tal que cumpla que $f(1,-1,2) = (0,3,1)$ y $f(1,1,-4) = (0,-4,1)$ y $f(0,-2,6) = (0,7,0)$? De no existir, justificar la respuesta. De existir, pero no ser única, indicar por lo menos dos transformaciones lineales que cumplan con lo pedido.

Ejercicio 9.

Planificar estrategias de resolución, evaluar alternativas posibles.

Resolver cada una de las siguientes cuestiones, o justificar –si así fuere el caso– la no existencia de respuesta.

9.1) Hallar el valor de $k\in\mathbf{R}$ para que el núcleo de la transformación lineal f tenga dimensión 1, donde

$$f\colon \mathbf{R^4}\to\mathbf{R^4} / f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (kx_2 - 3x_3, -2x_1 + x_2 + kx_4, x_1 + x_3 + kx_4, x_2 + 2x_3).$$

Dar todas las respuestas posibles.

9.2) Hallar una transformación lineal $f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$, tal que

$$\begin{cases} \mathrm{Nu}(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R^3} / x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ \mathrm{Im}(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R^3} / x_1 + x_3 = x_2 - x_3 = 0\} \end{cases}.$$

9.3) Hallar los valores de a y b para que los núcleos de las transformaciones lineales f y g sean los mismos, sabiendo que

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, -x_1 - x_3) \wedge g(1,0,0) = (1,-1) \wedge (0,1,0) \in \mathrm{Nu}(g) \wedge g(0,0,1) = (a,b).$$

9.4) Hallar una transformación lineal $f\colon \mathbf{R^2}\to\mathbf{R^2}$ tal que $B = \{(1,2)\}$ sea tanto una base para $\mathrm{Nu}(f)$ como para la $\mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 10.

Interpretar la información dada; planear e implementar estrategias de resolución.

10.1) Se conoce que la matriz asociada, A, a una transformación lineal, $f\colon \mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$, es simétrica y verifica que $f(\hat{\imath}) = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $f(\hat{\jmath}) = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ y $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ es un autovector. Hallar la matriz A, los autovalores y sus subespacios de autovectores asociados.

10.2) Se conoce que los autovalores de una matriz son 3, 2 y -2 y las bases de los subespacios de autovectores correspondientes son $\{\vec{u} = (1,0,0)\}$, $\{\vec{v} = (-3,3,1)\}$ y $\{\vec{w} = (1,-5,5)\}$, respectivamente. Encontrar la matriz y la transformación lineal.

10.3) Los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$ son autovectores linealmente independientes del mismo autovalor, el cual vale cero, de una transformación lineal $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$.

i. Justificar la afirmación: el núcleo de f es un subespacio de $\mathbf{R^3}$ de, al menos, dimensión 2.

ii. Proponer una transformación f tal que además verifique que $\{\vec{u}\}$ sea una base para el subespacio imagen de f.

Ejercicio 11.

Trabajo con parámetros a definir para que se cumplan las condiciones solicitadas.

Hallar los subespacios propios de cada una de las transformaciones lineales definidas en el espacio real tridimensional cuyas matrices en la base canónica son las dadas. ¿Para qué valores reales de k, cada una de las matrices es diagonalizable?

$$\text{i.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ ii.} \begin{pmatrix} 1+k & -k & k \\ 2+k & -k & k-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12.

Demostración de proposiciones teóricas vinculadas a autovalores y autovectores.

12.1) El término independiente del polinomio característico de una transformación lineal es el valor del determinante de la matriz asociada.

12.2) La matriz A satisface su propia ecuación característica, esto es $P(A) = O$.

12.3) $\lambda = 0$ es un autovalor de $A \in \mathbf{R^{n\times n}}$, si y sólo si, A es una matriz singular (no invertible).

12.4) Sea $A \in \mathbf{R^{n\times n}}$, invertible, con autovalor $\lambda \neq 0$ y autovector asociado X. Probar que λ^{-1} es autovalor de A^{-1} con el mismo autovector X.

12.5) Si λ es autovalor de $A \in \mathbf{R^{n\times n}}$ con autovector X, entonces λ^2 es autovalor de A^2 con el mismo autovector X.

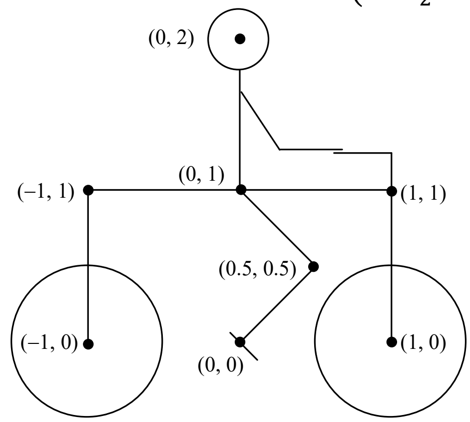
12.6) Si λ es autovalor de $A \in \mathbf{R^{n\times n}}$ con autovector X y $B = cI - A$, con I la matriz identidad y $c \in \mathbf{R}$, entonces $(c - \lambda)$ es autovalor de B con autovector X.

12.7) Sea $B \in \mathbf{R^{n\times n}}$ con autovalor λ y autovector asociado X, y sea $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$ donde P es una matriz invertible. Probar que $Y = P^{-1} \cdot X$ es autovector de A, y encontrar cuál es el correspondiente autovalor.

Aplicaciones

Arte gráfica

- Aplicar la transformación lineal $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 / f(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}y, y\right)$, al contorno del dibujo dado.



Cálculo de potencias de una matriz

- Demostrar que si la matriz $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ es semejante con una matriz diagonal D verificándose que:

$$A = P^{-1} \cdot D \cdot P \text{ entonces } A^k = P^{-1} \cdot D^k \cdot P, \text{ con } k \in \mathbf{N}.$$

- Calcular las potencias indicadas de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to A^{10}; B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \to B^{100}; C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to C^k, k \in \mathbf{N}.$$

Aplicación a un sistema dinámico

En muchas aplicaciones es necesario modelar matemáticamente un sistema que evoluciona en el tiempo. Algunas características del sistema se miden a intervalos de tiempo con lo cual se produce una secuencia de vectores (escritos como matrices columna) $X_0,\ X_1, \cdots$. Las componentes de cada X_k contienen la información acerca del estado del sistema al momento de la k-ésima medición.

Si existe una matriz A tal que $X_1 = A \cdot X_0, X_2 = A \cdot X_1$, y en general

$$X_{k+1} = A \cdot X_k \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

a esta ecuación se la llama ecuación lineal en diferencias y al sistema que representa, sistema lineal dinámico discreto.

A fin de ilustrar como algunas ideas desarrolladas en este trabajo práctico que se pueden aplicar en estos casos, plantearemos el siguiente problema sobre movimiento de poblaciones. Vamos a analizar como cambian las poblaciones urbanas y rurales en una región dada durante un período de varios años. Fijemos un año inicial, por ejemplo, el 2000 y llamemos u_0 y r_0 a las poblaciones urbanas y rurales respectivamente en ese año:

$X_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$ con u_0 población urbana en el año 2000 y r_0 población rural en el año 2000.

Para los años 2001 y subsiguientes emplearemos la notación:

$$X_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ u_1 \end{pmatrix};\ X_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ u_2 \end{pmatrix};\ X_3 = \begin{pmatrix} r_3 \\ u_3 \end{pmatrix};\cdots.$$

Supongamos que estudios demográficos revelan que cada año, el 5 % de la población rural se muda a centros urbanos y el 3 % de la población urbana se muda al zonas rurales (estos valores no son reales sino apropiados para las cuentas de este ejercicio). Después de un año, la cantidad original u_0 de personas en zonas urbanas se han distribuido entre la ciudad y el campo de la siguiente manera:

$\begin{pmatrix} 0.95r_0 \\ 0{,}05r_0 \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$ (1era fila permanecen en zonas rurales, 2da fila se mudan a zonas urbanas),

y para la población urbana será

$\begin{pmatrix} 0.03u_0 \\ 0{,}97u_0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}97 \end{pmatrix}$ (1era fila se mudan a zonas rurales, 2da fila permanecen en zonas urbanas).

De esta forma:

$$X_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}05 \end{pmatrix} + u_0 \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ u_0 \end{pmatrix},$$

es decir $X_1 = M \cdot X_0$ donde M es la matriz de migración determinada por$M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix}$. Si los porcentajes de migración permanecen constantes, para el cambio del 2001 al 2002 será $X_2 = M \cdot X_1$ y el cambio del año k-ésimo al $(k+1)$ – ésimo será $X_{k+1} = M \cdot k$. La secuencia de vectores $\{X_1; X_2; X_3; \cdots\}$ describe la evolución en el tiempo de la población en zonas rurales y urbanas.

Supongamos que la población total en la región en estudio, en el año 2000 es de 1000000 de personas con 600000 habitantes en zonas urbanas. ¿Cómo sería el comportamiento a largo plazo de este sistema? En este caso sería $X_0 = \begin{pmatrix} 400000 \\ 600000 \end{pmatrix}$. Buscamos los autovalores y autovectores de M y obtenemos $\lambda_1 = 1$ con autovector $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\lambda_2 \cong 0{,}92$ con autovector $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. El siguiente paso es escribir X_0 como combinación lineal de V_1 y V_2 obteniendo $X_0 = 125000 \cdot V_1 + 25000 \cdot V_2$. Ahora se reemplaza X_0 para obtener X_1 en $X_1 = M \cdot X_0$ y así sucesivamente para obtener:

$$X_{k+1} = M \cdot X_k = 125000 \cdot 1^k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 25000 \cdot (0{,}92)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k = 0; 1; 2; \cdots$$

lo que nos da la solución explícita a nuestra ecuación en diferencias $X_{k+1} = M \cdot X_k$. Por otra parte, cuando $k \to \infty$ vemos que $X_{k+1} \to 125000 \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 375000 \\ 625000 \end{pmatrix}$. La población rural tiende a estabilizarse en 375000 habitantes y la urbana en 625000. (Verificar que M es una matriz de Markov). En este modelo no se consideran ni nacimientos ni decesos en la población.

Ejercicios

- Supongamos una población de cierta especie donde no hay nacimientos en la que cada año el 2% de la población joven se vuelve vieja y el 3% de la población vieja muere. Comprobar que una ecuación en diferencias para este sistema es

$$\begin{pmatrix} \text{Joven} \\ \text{Vieja} \\ \text{Muerta} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}00 & 0 \\ 0{,}02 & 0{,}97 & 0 \\ 0{,}00 & 0{,}03 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Joven} \\ \text{Vieja} \\ \text{Muerta} \end{pmatrix}.$$

  Demostrar que el estado estacionario del sistema según esta ecuación es $X_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir toda la población muerta.

- La fracción de autos alquilados por una empresa en una ciudad, es el 2% del total de autos que posee y fuera de esa ciudad alquila el 98% restante. Si cada mes esas fracciones son multiplicadas por la matriz de Markov $A=\begin{pmatrix}0{,}80 & 0{,}05\\ 0{,}20 & 0{,}95\end{pmatrix}$, encontrar la expresión para las fracciones alquiladas dentro y fuera de la ciudad en un mes posterior cualquiera y encontrar el estado estacionario del sistema.

Ecuación general de segundo grado con dos variables. Vínculo con matrices, autovalores y autovectores.

La ecuación general de segundo grado puede expresarse como

$$a_{1,1}x^2+2a_{1,2}xy+a_{22}y^2+2a_{1,3}x+2a_{2,3}y+a_{3,3}=0.$$

Así se resalta el hecho que puede expresarse en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{1,2} & a_{22} & a_{2,3}\\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow X^T\cdot A\cdot X=0$$

donde $X^T=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}$ y A es una matriz simétrica.

Por los grados de los términos, la ecuación general de segundo grado admite asociarla en

Forma cuadrática: $a_{1,1}x^2+2a_{1,2}xy+a_{22}y^2$

Forma lineal: $2a_{1,3}x+2a_{2,3}y$

Término independiente: $a_{3,3}$

Para destacar los distintos términos, también se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{1,2} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}a_{1,3} & a_{2,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+a_{3,3}=0.$$

Llamando

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, A_{3,3}\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{1,2} & a_{22}\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}a_{1,3}\\ a_{2,3}\end{pmatrix}$$

es posible escribir la ecuación en la siguiente forma matricial

$$X^T\cdot A_{3,3}\cdot X+2A_3^T\cdot X+a_{3,3}=0.$$

donde $A_{3,3}$ también es simétrica.

Eliminación del término de producto cruzado. Si el coeficiente $a_{1,2}\neq 0$, la cónica (elipse, hipérbola o parábola, o algún caso degenerado de ellas) que representa la ecuación está girada con respecto a la posición que generalmente se estudia (ejes principales paralelos a los ejes coordenados $x\ y$). Se requiere girar los ejes de referencia habituales de modo que la ecuación de la cónica en el nuevo sistema $x'\ y'$ no contenga término de producto cruzado. Esto se puede lograr mediante la sucesión de acciones siguiente.

Paso 1. Encontrar una matriz P que diagonalice ortogonalmente la forma cuadrática $X^T\cdot A_{3,3}\cdot X$. Observación: P estará constituida por una base ortonormal de autovectores de $A_{3,3}$. Siempre se podrá pues esta matriz es simétrica

Paso 2. Intercambiar las columnas de P en caso de ser necesario, para hacer $\det(P)=1$, de modo que P resulta matriz ortogonal propia y geométricamente el cambio de coordenadas se corresponde en forma estricta a una rotación (en caso de que P sea ortogonal impropia se corresponde con una rotación y una reflexión de uno de los ejes y no resulta conveniente).

Paso 3. Para obtener la ecuación en el sistema $x'\ y'$ se sustituye $X=P\cdot X'$. Así

$$(P\cdot X')^T\cdot A_{3,3}\cdot (P\cdot X')+2A_3^T\cdot (P\cdot X')+a_{3,3}=0$$

$$(X')^T\cdot \left(P^T\cdot A_{3,3}\cdot P\right)\cdot X'+2(A_3^T\cdot P)\cdot X'+a_{3,3}=0.$$

Como P diagonaliza ortogonalmente a $A_{3,3}$,

$$P^T \cdot A_{3,3} \cdot P = P^{-1} \cdot A_{3,3} \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 son autovalores de $A_{3,3}$. Así, la ecuación queda

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{1,3} \quad a_{2,3})\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{3,3} = 0,$$

o bien

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{1,3}x' + 2a'_{2,3}y' + a_{3,3} = 0.$$

Esta ecuación no contiene término de producto cruzado.

Como $X = P \cdot X' \Longrightarrow P^{-1} \cdot X = X' \Longrightarrow X' = P^T \cdot X$.
Los transformados de los versores canónicos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ son

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2,1} \\ p_{2,2} \end{pmatrix}.$$

De modo que la base $\{\widehat{\imath'} = (p_{1,1}, p_{1,2}); \widehat{\jmath'} = (p_{2,1}, p_{2,2})\}$ indica la orientación de los nuevos ejes.

Eliminación de los términos lineales. Una vez eliminado el término cruzado, los términos lineales se eliminan completando cuadrados.
Por ejemplo, si $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, la ecuación luego de aplicarle la rotación se puede presentar:

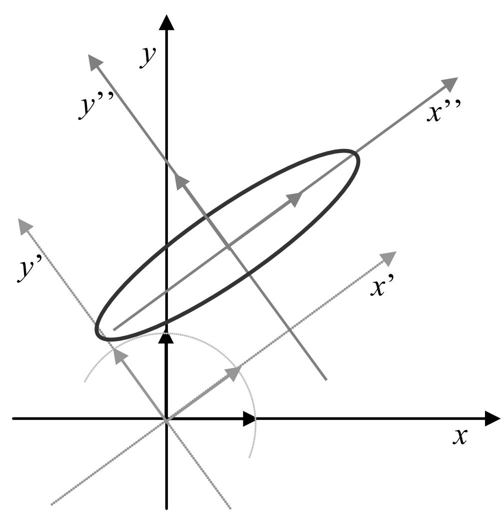
$$\lambda_1\left(x'^2 + 2\frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}x'\right) + \lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}y'\right) + a_{3,3} = 0,$$

$$\lambda_1\left[x'^2 + 2\frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}x' + \left(\frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}\right)^2\right] + \lambda_2\left[y'^2 + 2\frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}y' + \left(\frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}\right)^2 - \left(\frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}\right)^2\right] + a_{3,3} = 0,$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}\right)^2 + a_{3,3} - \left(\frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}\right)^2 = 0.$$

Se propone la traslación

$$\begin{cases} x" = x' + \dfrac{a'_{1,3}}{\lambda_1} \\ y" = y' + \dfrac{a'_{2,3}}{\lambda_2}, \end{cases}$$



de donde se obtiene la forma canónica de la ecuación en los nuevos ejes dada por

$$\lambda_1 x"^2 + \lambda_2 y"^2 + a_{3,3} - \left(\frac{a'_{1,3}}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{a'_{2,3}}{\lambda_2}\right)^2 = 0,$$

cuyos elementos son fácilmente identificables.

Queda una ecuación del tipo

$$\lambda_1 x"^2 + \lambda_2 y"^2 + a"_{3,3} = 0.$$

Ejemplo 1. Graficar la cónica cuya ecuación es $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

Escrita en la forma $X^T \cdot A_{3,3} \cdot X + 2A_3^T \cdot X + a_{3,3} = 0$:

$$\underbrace{(x \quad y)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Forma cuadrática}} + \underbrace{2(0 \quad 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Forma lineal}} + \underbrace{(-36)}_{\text{Término independiente}} = 0.$$

Para eliminar el término cruzado hay que hallar la matriz P, se calcula el polinomio característico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4).$$

El subespacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda = 4$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y\ \forall y \in \mathbf{R};\ S_{\lambda=4} = \{(2y, y)\ \forall y \in \mathbf{R}\};\ B_{S(\lambda=4)} = \{(2,1)\}.$$

La base ortonormalizada de $S_{\lambda=4}$:

$$Bon_{S(\lambda=4)}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

El subespacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda = 9$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2x - y = 0 \Rightarrow y = -2x\ \forall x \in \mathbf{R};\ S_{\lambda=9} = \{(x, -2x)\ \forall x \in \mathbf{R}\};\ B_{S(\lambda=9)} = \{(1, -2)\}.$$

La base ortonormalizada de $S_{\lambda=9}$:

$$Bon_{S(\lambda=9)}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

Una matriz de pasaje P ortogonal será $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Dado que el $\det(P) = -1$ (ortogonal impropia), usamos el opuesto del vector base de $S_{\lambda=9}$. Queda

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Las orientaciones de los nuevos versores son

$$\left\{\hat{v}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right); \hat{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

Aplicando la rotación a la ecuación dada, a partir de $X = P \cdot X'$:

$$(P \cdot X')^T \cdot A_{3,3} \cdot (P \cdot X') + 2A_3^T \cdot (P \cdot X') + a_{3,3} = 0,$$

$$\Rightarrow (X')^T \cdot \left(P^T \cdot A_{3,3} \cdot P\right) \cdot X' + 2(A_3^T \cdot P) \cdot X' + a_{3,3} = 0,$$

queda

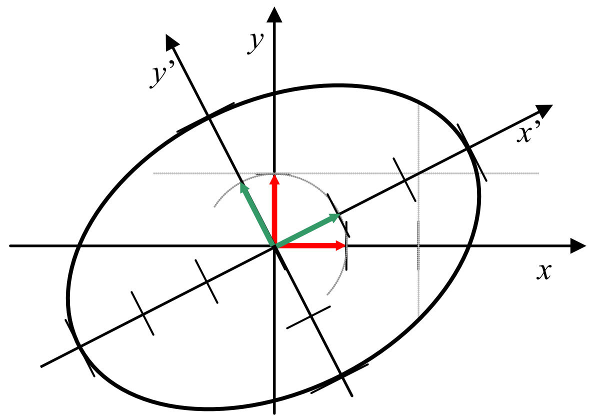
$$(x' \quad y') \cdot P^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(0 \quad 0) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0,$$

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0 \Rightarrow 4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0.$$

Dividiendo por 36 y reordenando la expresión, resulta la ecuación canónica correspondiente a una elipse con centro en el origen de coordenadas,

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1 \Longrightarrow \frac{x'^2}{3^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1,$$

con semieje mayor paralelo al eje x' de longitud 3, y semieje menor paralelo al eje y' de longitud 2.



Ejemplo2. Graficar la cónica cuya ecuación es

$$5x^2-4xy+8y^2+\frac{20}{\sqrt{5}}x-\frac{80}{\sqrt{5}}y+4=0.$$

Escrita en la forma $X^T\cdot A_{3,3}\cdot X+2A_3^T\cdot X+a_{3,3}=0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}}_{\text{Forma cuadrática}}+\underbrace{2\begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}} & -\frac{40}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}}_{\text{Forma lineal}}+\underbrace{4}_{\text{Término independiente}}=0.$$

Se utiliza la misma transformación que en el ejemplo 1.

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix};\left\{\hat{v}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\hat{v}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

Aplicando la rotación a la ecuación dada, a partir de $X=P\cdot X'$:

$$(P\cdot X')^T\cdot A_{3,3}\cdot(P\cdot X')+2A_3^T\cdot(P\cdot X')+a_{3,3}=0,$$

$$\Longrightarrow (X')^T\cdot\left(P^T\cdot A_{3,3}\cdot P\right)\cdot X'+2(A_3^T\cdot P)\cdot X'+a_{3,3}=0,$$

queda

$$\begin{pmatrix} x' & y'\end{pmatrix}\cdot P^T\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}\cdot P\cdot\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}} & -\frac{40}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}+4=0,$$

$$\begin{pmatrix} x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -4 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}+4=0\Longrightarrow 4x'^2+9y'^2-8x'-36y'+4=0.$$

Aquí es necesaria una translación para eliminar los términos lineales. Se completa cuadrados.

$$4\left(x'^2-2x'\right)+9\left(y'^2-4y'\right)+4=0 \Rightarrow 4\left(x'^2-2x'+1-1\right)+9\left(y'^2-4y'+4-4\right)+4=0$$
$$4\left(x'^2-2x'+1\right)+9\left(y'^2-4y'+4\right)+4-4-36=0$$
$$4(x'-1)^2+9(y'-2)^2=36$$

Este proceso lleva a la ecuación:

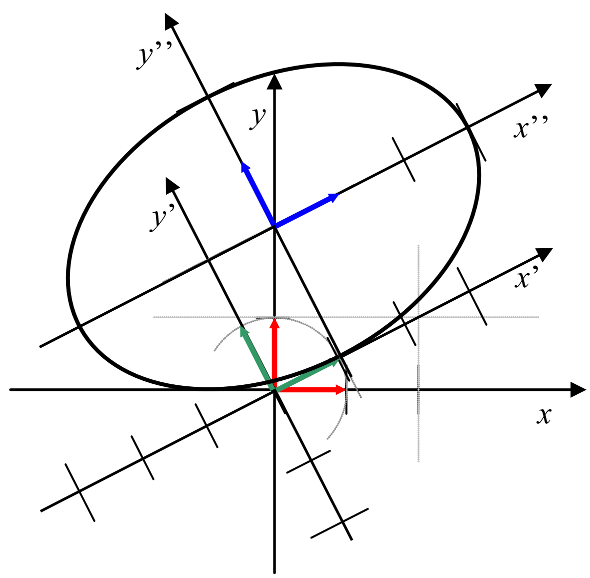
$$\frac{(x'-1)^2}{9}+\frac{(y'-2)^2}{4}=1$$

Al proponer la traslación

$$\begin{cases} x" = x'-1 \\ y" = y'-2' \end{cases}$$

resulta la forma canónica de una elipse

$$\frac{(x'-1)^2}{3^2}+\frac{(y'-2)^2}{2^2}=1.$$



Ejercicio propuesto.

Aplicar el procedimiento anterior para identificar y graficar las siguientes cónicas (o sus degeneraciones).

a) $4x^2-24xy+11y^2+56x-58y+95=0$

b) $4x^2-12xy+9y^2-8\sqrt{13}x-14\sqrt{13}y+117=0$

c) $11x^2+24xy+4y^2-15=0$

d) $x^2-2xy+y^2=0$

e) $9x^2+12xy+4y^2-52=0$