GUÍA DE EJERCITACIÓN 4 ESPACIOS VECTORIALES REALES

Espacio Vectorial Real

Sea $\mathbf{V}$ un conjunto no vacío, $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales, $'+'$ y $'\cdot'$ dos operaciones llamadas suma y producto respectivamente.

Definición $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, '+', '\cdot')$ constituye un **espacio vectorial real** si y sólo si se verifican los siguientes axiomas

A1. Ley de composición interna para la $'+'$
$\forall \vec{v}_1 \in \mathbf{V}, \forall \vec{v}_2 \in \mathbf{V} \Longrightarrow (\vec{v}_1\ '+'\ \vec{v}_2) \in \mathbf{V}$

A2. Ley conmutativa para la $'+'$
$\forall \vec{v}_1 \in \mathbf{V}, \forall \vec{v}_2 \in \mathbf{V} \Longrightarrow (\vec{v}_1\ '+'\ \vec{v}_2) = (\vec{v}_2\ '+'\ \vec{v}_1)$

A3. Ley asociativa para la $'+'$
$\forall \vec{v}_1 \in \mathbf{V}, \forall \vec{v}_2 \in \mathbf{V}, \forall \vec{v}_3 \in \mathbf{V} \Longrightarrow \vec{v}_1\ '+'\ (\vec{v}_2\ '+'\ \vec{v}_3) = (\vec{v}_1\ '+'\ \vec{v}_2)\ '+'\ \vec{v}_3$

A4. Existencia de un elemento neutro para la $'+'$
$\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \exists \vec{0} \in \mathbf{V} \ / \ \left(\vec{v}\ '+'\ \vec{0}\right) = \left(\vec{0}\ '+'\ \vec{v}\right)$

A5. Existencia de elemento opuesto
$\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \exists (-\vec{v}) \in \mathbf{V} \quad [\vec{v}\ '+'\ (-\vec{v})] = \vec{0}$

A6. Ley de composición externa para el $'\cdot'$
$\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow (\alpha\ '\cdot'\ \vec{v}) \in \mathbf{V}$

A7. Ley asociativa mixta para el $'\cdot'$
$\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall \beta \in \mathbf{R} \Longrightarrow \alpha\ '\cdot'\ (\beta\ '\cdot'\ \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta)\ '\cdot'\ \vec{v}$

A8. Existencia de un elemento neutro para el $'\cdot'$
$\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \exists 1 \in \mathbf{R} \Longrightarrow (1\ '\cdot'\ \vec{v}) = \vec{v}$

A9. Propiedad distributiva del $'\cdot'$ **con respecto a la suma en** $\mathbf{R}$
$\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall \beta \in \mathbf{R} \Longrightarrow (\alpha + \beta)\ '\cdot'\ \vec{v} = \alpha\ '\cdot'\ \vec{v}\ '+'\ \beta\ '\cdot'\ \vec{v}$

A10. Propiedad distributiva del $'\cdot'$ **con respecto a la** $'+'$
$\forall \vec{v}_1 \in \mathbf{V}, \forall \vec{v}_2 \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow \alpha\ '\cdot'(\vec{v}_1\ '+'\ \vec{v}_2) = \alpha\ '\cdot'\ \vec{v}_1\ '+'\ \alpha\ '\cdot'\ \vec{v}_2$

Los elementos del conjunto $\mathbf{V}$ se denominan vectores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots)$; el elemento neutro para la $'+'$ denotado por $\vec{0}$ se denomina vector nulo; los elementos del conjunto $\mathbf{R}$ se denominan escalares.

Si en lugar de $\mathbf{R}$, se toman los escalares pertenecientes al conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros, el $(\mathbf{V}, \mathbf{Z}, '+', '\cdot')$ se denomina espacio vectorial entero; análogamente, al considerar el conjunto de los números complejos $\mathbf{C}$, $(\mathbf{V}, \mathbf{C}, '+', '\cdot')$ se denomina espacio vectorial complejo, ...

Propiedades Si $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, '+', '\cdot')$ es un espacio vectorial real, entonces:

P1. $\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, 0 \in \mathbf{R} \Rightarrow 0\ '\cdot'\ \vec{v} = \vec{0}$

P2. $\vec{0} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow \left(\alpha\ '\cdot'\ \vec{0}\right) = \vec{0}$

P3. Si $0\ '\cdot'\ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$

P4. $\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow (-\alpha)\ '\cdot'\ \vec{v} = \alpha\ '\cdot'(-\vec{v}) = -(\alpha\ '\cdot'\ \vec{v})$

Subespacio Vectorial Real

Definición Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbf{V}$, se denomina subespacio del espacio vectorial $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, '+', '\cdot')$ si y sólo si es en sí mismo un espacio vectorial con las operaciones $'+'$ y $'\cdot'$ definidas en $\mathbf{V}$.

Para que S sea subespacio, debe verificar las siguientes condiciones:

C1. $S \subset \mathbf{V}$
C2. $S \neq \emptyset$
C3. $\forall \vec{v}_1 \in S, \forall \vec{v}_2 \in S \Longrightarrow (\vec{v}_1\,' +'\,\vec{v}_2) \in S$
C4. $\forall \vec{v} \in S, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow (\alpha\,' \cdot '\,\vec{v}) \in S$

Propiedades

P1. $\vec{0} \in S$
P2. Si S_1 y S_2 son subespacios de $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, ' + ', ' \cdot ')$, entonces $(S_1 \cap S_2)$ es un subespacio $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, ' + ', ' \cdot ')$
P3. $S = \{\vec{0}\}$ y $S = \boldsymbol{V}$ se denominan subespacio triviales

Notación: En los siguientes párrafos se identificará al espacio vectorial $(\mathbf{V}, \mathbf{R}, ' + ', ' \cdot ')$ con el conjunto $\mathbf{V}$. Por una cuestión de practicidad un símbolo $+$ simple reemplazará a $' + '$, y un símbolo $\cdot$ a $' \cdot '$.

Combinación lineal de vectores

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_r\} \subset \mathbf{V}$, se dice que $\vec{v} \in \mathbf{V}$ es una combinación lineal de los elementos del conjunto si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbf{R}$ tales que verifiquen

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_r \vec{v}_r.$$

Dependencia e Independencia Lineal

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\} \subset \mathbf{V}$, se dice que es linealmente dependiente si para la combinación lineal entre los elementos del conjunto que da por resultado el vector nulo, no todos los escalares son simultáneamente nulos, es decir

$$\text{Si } \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow \exists \text{ algún } \alpha_i \neq 0 \;\; i = 1,2,\cdots,m.$$

El conjunto se denomina linealmente independiente, si la única solución posible es que todos los escalares sean simultáneamente cero (solución trivial), es decir

$$\text{Si } \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall i = 1,2,\cdots,m.$$

Sistema de generadores

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\} \subset \mathbf{V}$ se denomina sistema de generadores de $\mathbf{V}$

$$\text{si } \forall \vec{v} \in \mathbf{V},\; \exists \alpha_i \in \mathbf{R} \text{ con } i = 1,2,\dots,m \text{ tal que } \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{v}.$$

es decir que cualquier vector de $\mathbf{V}$ se pueda expresar como combinación lineal de los elementos del conjunto.

Base

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \cdots; \vec{v}_n\} \subset \mathbf{V}$ se denomina base de $\mathbf{V}$ si constituye un sistema de generadores linealmente independiente. Cuando la base posee un número finito de elementos, se denomina por dimensión del espacio vectorial $\mathbf{V}$ a dicho número.

Observación: estos últimos conceptos se pueden relacionar con un subespacio S, pudiendo establecer la dependencia o independencia lineal, sistema de generadores, base y dimensión para dicho subespacio.

Normas vectoriales

Sea un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre el cuerpo de los reales $\mathbf{R}$, una norma vectorial es una función $f: \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ que hace corresponder a cada vector $\vec{x} \in \mathbf{V}$ un escalar, denotado por $\|\vec{x}\|$, tal que verifica las siguientes propiedades:

P1. $\forall \vec{x} \in \mathbf{V},\; \|\vec{x}\| \geq \mathbf{0} \;\wedge\; \|\vec{x}\| = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
P2. $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbf{R}, \|k \cdot \vec{x}\| = |k| \cdot \|\vec{x}\|$
P3. $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall \vec{y} \in \mathbf{V}, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Algunas de las normas más usadas para $\vec{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$ con $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, son:

Norma de orden 1	$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$
Norma de orden 2 ó euclídea	$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
Norma de orden infinito o norma de máxima magnitud	$\|\vec{x}\|_\infty = max\{\|x_i\|\}_{i=1}^{n} = max\{\|x_1\|; \|x_2\|; \cdots; \|x_n\|\}$

Producto interior

Producto interior sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}$, definido sobre el cuerpo de los reales, es una función que asocia un escalar $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in \mathbf{R}$ con cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbf{V}$, de manera que se satisfacen los siguientes axiomas

A1. $\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ propiedad conmutativa

A2. $\forall \vec{u}, \forall \vec{v}, \forall \vec{w} \in \mathbf{V}, \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ propiedad distributiva con respecto a la suma

A3. $\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbf{R}, \langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

A4. $\forall \vec{u} \in \mathbf{V}, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \wedge \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Un espacio vectorial sobre el cual se ha definido un producto interior se conoce como espacio con producto interior.

Como propiedades, consecuencia de los axiomas 1 al 4 se puede indicar

P1. $\forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0$

P2. $\forall \vec{u}, \forall \vec{v}, \forall \vec{w} \in \mathbf{V}, \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

P3. $\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbf{R}, \langle \vec{u}, k\vec{v} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

Ejemplo: sean $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbf{R^n}$, el producto interior euclídeo, conocido como producto escalar de dos vectores, definido por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \equiv u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_n \cdot v_n$$

satisface todos los axiomas del producto interior.

Observación: si el espacio vectorial $\mathbf{V}$ está definido sobre el cuerpo de los complejos $\mathbf{C}$, entonces los axiomas 2, 3 y 4 se mantienen, cambiando el axioma 1 por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$$

Así, la propiedad **P3** es ahora: $\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbf{C}, \langle \vec{u}, k\vec{v} \rangle = \overline{k}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Definiciones asociadas a los espacios vectoriales con producto interior definido

Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ vectores pertenecientes a un espacio vectorial $\mathbf{V}$ con producto interior, se dice que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son ortogonales si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. El $\vec{0} \in \mathbf{V}$ es ortogonal con cualquier vector de $\mathbf{V}$.

Si bien suele denotarse la ortogonalidad con el símbolo $\perp$, sólo en el caso de vectores con interpretación geométrica el concepto de ortogonalidad coincide con el concepto de perpendicularidad (excepto para el vector nulo).

Sean $\vec{x}$ un vector perteneciente a un espacio vectorial $\mathbf{V}$ con producto interior y S un subespacio incluido en $\mathbf{V}$, se dice que $\vec{x}$ es ortogonal al subespacio S si $\vec{x}$ es ortogonal a cualquier vector perteneciente a S. Esto es:

$$\vec{x} \in \mathbf{V}, S \subset \mathbf{V}, \vec{x} \perp S \ si \ \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0 \ \ \forall \vec{v} \in S$$

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un mismo espacio vectorial $\mathbf{V}$ con producto interior, se dice que S_1 y S_2 son ortogonales si cada vector de S_1 es ortogonal a cada vector de S_2. Esto es:

$$S_1 \subset \mathbf{V}, S_2 \subset \mathbf{V}, S_1 \perp S_2 \ si \ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \ \ \forall \vec{u} \in S_1, \forall \vec{v} \in S_2$$

Base ortogonal

Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \cdots; \vec{v}_m\}$ en un espacio $\mathbf{V}$ con producto interior es un conjunto ortogonal, si $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ cuando $i \neq j$.

Se dice que un conjunto de vectores $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \cdots; \hat{v}_m\}$ en un espacio $\mathbf{V}$ con producto interior es un conjunto ortonormal, si

$$\begin{cases} \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = 0 & \text{si } i \neq j \\ \langle \hat{v}_i, \hat{v}_i \rangle = \|\hat{v}_i\|^2 = 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Es decir, un conjunto ortogonal el cual verifica que todos sus vectores tienen norma unitaria. En notación más compacta, utilizando la delta de Kronecker, debe ser $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Se dice que $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \cdots; \vec{v}_n\}$ en un espacio $\mathbf{V}$ con producto interior es un base ortogonal $\left(B_{og}\right)$, si el conjunto B constituye una base de $\mathbf{V}$ que cumple la condición de ortogonalidad.

Se dice que $B = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \cdots; \hat{v}_n\}$ en un espacio $\mathbf{V}$ con producto interior es un base ortonormal (B_{on}), si el conjunto B constituye una base de $\mathbf{V}$ que cumple la condición de ortonormalidad.

Teorema Si $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \cdots; \vec{v}_n\}$ es una base ortogonal para un espacio vectorial $\mathbf{V}$ con producto interior para cualquier vector $\vec{u} \in \mathbf{V}$, entonces

$$\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle} \vec{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{v}_n, \vec{v}_n \rangle} \vec{v}_n.$$

Si en particular la base fuese ortonormal, la expresión anterior se reduce a:

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \hat{v}_1 \rangle \hat{v}_1 + \langle \vec{u}, \hat{v}_2 \rangle \hat{v}_2 + \cdots + \langle \vec{u}, \hat{v}_n \rangle \hat{v}_n.$$

Teorema Si $A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \ldots; \vec{v}_m\}$ es un conjunto ortogonal donde $\vec{v}_i \neq \vec{0}\ \forall i = 1,2, \cdots, m$ en un espacio vectorial $\mathbf{V}$ con producto interior, entonces el conjunto A es linealmente independiente.

Proyección ortogonal

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial con producto interior y sea $A = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \ldots; \hat{v}_n\}$ una base ortonormal de dicho espacio. Si S es el subespacio generado por $A' = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \ldots; \hat{v}_r\}$ donde $r \leq n$, entonces todo vector $\vec{u} \in \mathbf{V}$ se puede expresar en la forma:

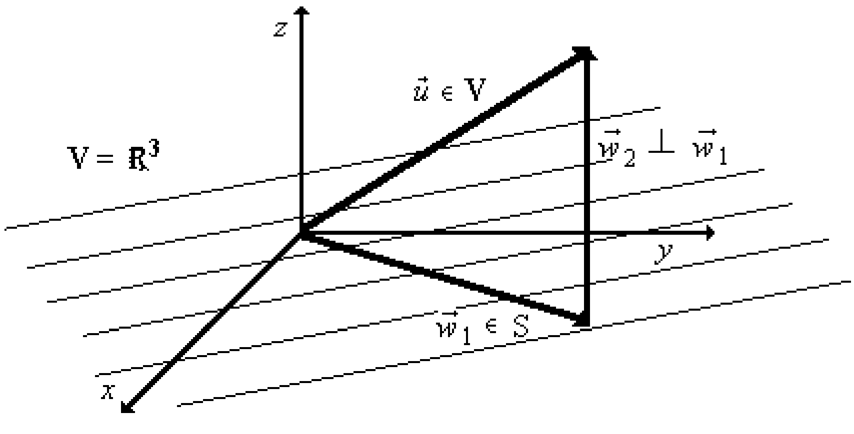
$$\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \text{ donde } \vec{w}_1 \in S \wedge \vec{w}_2 \in S^{\perp}$$

El vector $\vec{w}_1$ es la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre S y se denota por $\vec{w}_1 = proy_S \vec{u}$.

El vector $\vec{w}_2 = \vec{u} - proy_S \vec{u}$ se conoce como componente de $\vec{u}$ ortogonal a S.

$$\vec{w}_1 = \langle \vec{u}, \hat{v}_1 \rangle \hat{v}_1 + \langle \vec{u}, \hat{v}_2 \rangle \hat{v}_2 + \cdots + \langle \vec{u}, \hat{v}_r \rangle \hat{v}_r$$

$$\vec{w}_2 = \vec{u} - \langle \vec{u}, \hat{v}_1 \rangle \hat{v}_1 - \langle \vec{u}, \hat{v}_2 \rangle \hat{v}_2 - \cdots - \langle \vec{u}, \hat{v}_r \rangle \hat{v}_r = \langle \vec{u}, \hat{v}_{r+1} \rangle \hat{v}_{r+1} + \cdots + \langle \vec{u}, \hat{v}_n \rangle \hat{v}_n$$



$S \subset \mathbf{V}$ (plano xy)

Proceso de Gram-Schmidt

Todo espacio con producto interior de dimensión finita, no nula, tiene una base ortonormal.

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial con producto interior de dimensión finita n. Sea B una base de $\mathbf{V}$

$$B = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \cdots; \vec{u}_n\}.$$

La sucesiva secuencia de siguientes operaciones producirá otra base de $\mathbf{V}$ pero ortonormal

$$B' = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \cdots; \hat{v}_n\}.$$

1) Tomemos $\hat{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$; el vector $\hat{v}_1$ tiene norma 1.

2) Para obtener ahora un vector $\hat{v}_2$ de norma unitaria que sea ortogonal a $\hat{v}_1$, se calcula la componente de $\vec{u}_2$ ortogonal al subespacio S_1 generado por $\hat{v}_1$ y se normaliza:

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - proy_{S1}\vec{u}_2$$

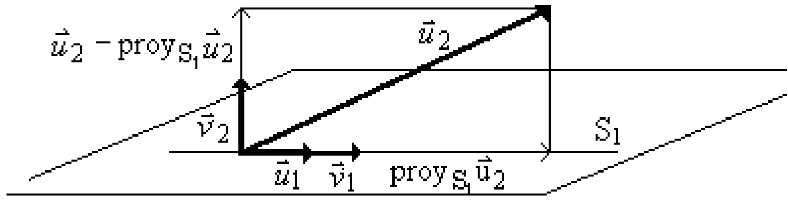
$$\text{donde } proy_{S1}\vec{u}_2 = \langle\vec{u}_2, \hat{v}_1\rangle\hat{v}_1 \text{ ó } \quad proy_{S1}\vec{u}_2 = \frac{\langle\vec{u}_2, \vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle}\vec{v}_1$$

$$\hat{v}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

Si $\vec{u}_2 - \langle\vec{u}_2, \hat{v}_1\rangle\hat{v}_1 = \vec{0}$, no se puede normalizar. Pero esta posibilidad es un absurdo pues, si se diese

$$\vec{u}_2 = \langle\vec{u}_2, \hat{v}_1\rangle\hat{v}_1 = \frac{\langle\vec{u}_2, \vec{u}_1\rangle}{\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1 \Rightarrow$$

$\vec{u}_2$ múltiplo escalar de $\vec{u}_1$ $\Rightarrow \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \Rightarrow$ L.D,
lo que contradice la independencia lineal de la base B.

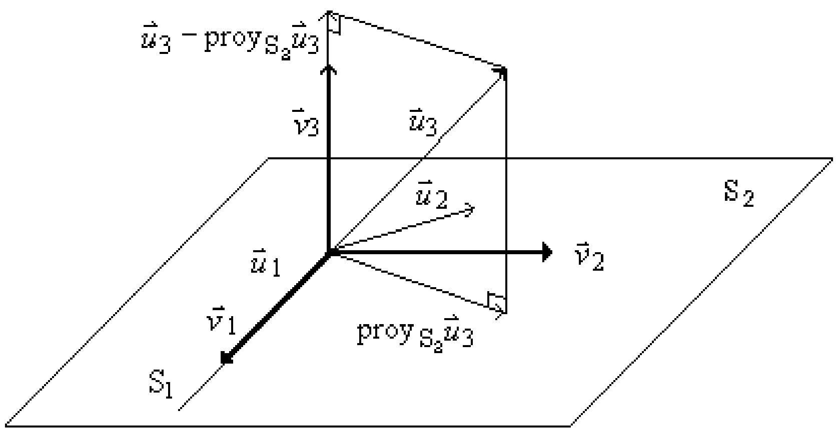


3) Para construir ahora un vector $\hat{v}_3$ de norma igual a 1 que sea ortogonal tanto a $\hat{v}_1$ como a $\hat{v}_2$, se calcula la componente de $\vec{u}_3$ ortogonal a S_2, donde S_2 es el subespacio generado por $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - proy_{S2}\vec{u}_3$$

$$\text{donde } proy_{S2}\vec{u}_3 = \langle\vec{u}_3, \hat{v}_1\rangle\hat{v}_1 + \langle\vec{u}_3, \hat{v}_2\rangle\hat{v}_2 \text{ ó } \quad proy_{S2}\vec{u}_3 = \frac{\langle\vec{u}_3, \vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle}\vec{v}_1 + \frac{\langle\vec{u}_3, \vec{v}_2\rangle}{\langle\vec{v}_2, \vec{v}_2\rangle}\vec{v}_2$$

$$\hat{v}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}$$



4) Para determinar un vector $\hat{v}_4$ de norma unitaria que sea ortogonal simultáneamente a $\hat{v}_1, \hat{v}_2$ y $\hat{v}_3$, se calcula la componente de $\vec{u}_4$ ortogonal al subespacio S_3 generado por $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \hat{v}_3\}$ y se normaliza:

$$\vec{v}_4 = \vec{u}_4 - proy_{S3}\vec{u}_4$$

donde $proy_{S3}\vec{u}_4 = \langle \vec{u}_4, \hat{v}_1 \rangle \hat{v}_1 + \langle \vec{u}_4, \hat{v}_2 \rangle \hat{v}_2 + \langle \vec{u}_4, \hat{v}_3 \rangle \hat{v}_3$ ó

$$proy_{S3}\vec{u}_4 = \frac{\langle \vec{u}_4, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}\vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{u}_4, \vec{v}_2 \rangle}{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle}\vec{v}_2 + \frac{\langle \vec{u}_4, \vec{v}_3 \rangle}{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_3 \rangle}\vec{v}_3$$

$$\hat{v}_4 = \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|}$$

Se sigue este procedimiento y se obtiene un conjunto ortonormal de vectores $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \hat{v}_3; \cdots; \hat{v}_n\}$.

Como $\mathbf{V}$ es de dimensión n y como el conjunto ortonormal es linealmente independiente, entonces:

$B' = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \hat{v}_3; \cdots; \hat{v}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{V}$.

Este proceso se conoce como "proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt".

Aclaración: Se puede realizar este proceso sólo ortogonalizando al conjunto de vectores y luego normalizar a cada uno de dichos vectores ortogonales.

Ejercicio 1.

Conceptualización a partir de conjuntos de dimensión pequeña, noción intuitiva de dimensión. Interpretación, identificación, demostración, búsqueda de contraejemplos, recodificación.

Identificar si los siguientes conjuntos de vectores son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales reales implícitos naturalmente en cada definición. En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, mostrar un contraejemplo. Indicar cuando alguno de ellos se corresponda con los subespacios triviales. Graficar, cuando sea posible, a los conjuntos. En el caso de que el conjunto sea un subespacio que contenga variables independientes, proponer una definición del mismo de forma que sólo incluya a las mismas.

1.1) $D_1 = \{(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)\}$ $D_1 \subset \mathbf{R^2}$

1.2) $D_2 = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$ $D_2 \subset \mathbf{R^2}$

1.3) $D_3 = \{(x,y)/\ x^2 + y^2 = -1\}$ $D_3 \subset \mathbf{R^2}$

1.4) $D_4 = \{(x,y,z)/\ z = 0\}$ $D_4 \subset \mathbf{R^3}$

1.5) $D_5 = \{(x,y,z)\ /x \geq 0\}$ $D_5 \subset \mathbf{R^3}$

1.6) $D_6 = \{(x,y,z)/x + y + z = 0\}$ $D_6 \subset \mathbf{R^3}$

1.7) $D_7 = \{(x,y,z)/x + y + z = 1\}$ $D_7 \subset \mathbf{R^3}$

1.8) $D_8 \subset \mathbf{R^3}$: conjunto solución del sistema lineal y homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

1.9) $D_9 = \{ax^2 + bx + c/c = a \wedge b = 0\}$ $D_{10} \subset \mathbf{P_2}[\boldsymbol{x}]$

$\mathbf{P_2}[\boldsymbol{x}]$={polinomios de grado ≤ 2 en la variable real x}

1.10) $D_{10} = \left\{M = \left(\left(m_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R^{2\times2}}/\ m_{i,j} = 0\ \ i > j\right\}$ $D_{10} \subset \mathbf{R^{2\times2}}$

1.11) $D_{11} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R^{2\times2}}/x_1 = 0 \wedge x_2 = (x_3)^2\right\}$ $D_{11} \subset \mathbf{R^{2\times2}}$

1.12) $D_{12} = A \cap B$ donde $A = \{M \in \mathbf{R^{2\times2}}/M^T = M\}$ y $B = \{M \in \mathbf{R^{2\times2}}/M^T = -M\}$.

Observación. Son subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbf{R^3}$: el origen de coordenadas, toda recta que pase por el origen, todo plano que pase por el origen, todo el espacio. Interprete geométricamente porque se cumplen las condiciones para ser subespacios y compare con algún conjunto que no lo sea –por ejemplo, una recta que no pase por el origen.

Ejercicio 2.

Abstracción, integración con conocimientos previamente adquiridos. Generalización, demostración.

Demostrar que los siguientes conjuntos son subespacios. Identificar la cantidad de parámetros libres en cada uno de subespacios.

<u>Notación</u>. $O_{m\times n}$: Matriz nula de orden $m \times n$ con $m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$; $r(A)$: rango de la matriz A.

2.1) $D_1 = \{M \in \mathbf{R^{n\times n}}/\ M^T = M\}$.

2.2) $D_2 = \left\{M = \left(\left(m_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R^{n\times n}}/m_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \wedge m_{1,1} = m_{2,2} = \cdots = m_{n,n}\right\}$.

2.3) $D_3 = \left\{M = \left(\left(m_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R^{n\times n}}/\ m_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\right\}$.

2.4) $D_4 = \{X \in \mathbf{R^{n\times1}}/A \cdot X = O_{n\times1} \wedge A \in \mathbf{R^{n\times n}} \text{ con } r(A) = r\}$.

Ejercicio 3.

Aplicación del concepto de pertenencia. Identificación, particularización.

Analizar si cada uno de los siguientes vectores pertenece al subespacio indicado.

3.1) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $S_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{R^{2\times2}}/\begin{cases} -a + b = c \\ 4a + c - 3d = 0 \end{cases}\right\}$.

3.2) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $S_2 = \{M \in \mathbf{R^{2\times2}}/\ M + M^T = O_{2\times2}\}$

3.3) $\vec{v}_3 = -2x^2 + x - 3$; $S_3 = \{ax^2 + bx + c \in \mathbf{P_2}[\boldsymbol{x}] / a = 2t \wedge b = -t, t \in \mathbf{R}\}$

Ejercicio 4.

Ejemplificación del concepto primario de combinación lineal y adquisición del vínculo con el de independencia lineal. Interpretación geométrica del concepto y su abstracción, identificación de la posibilidad de más de una solución y su relación con la dependencia lineal.

Hallar, en cada caso, los valores del ó de los parámetros reales para los cuales el vector $\vec{v}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto indicado. Una vez elegidos los parámetro, ¿la combinación es única? Interpretar geométricamente cuando sea posible.

4.1) $\vec{v} = (k^2, k)$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = (1,-1); \vec{v}_2 = (-1,1)\}$

4.2) $\vec{v} = (1,2,k)$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = (-1,2,3); \vec{v}_2 = (3,-2,0)\}$

4.3) $\vec{v} = (k^2, k, 0)$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = (-1,2,3); \vec{v}_2 = (3,-2,0); \vec{v}_3 = (1,2,6)\}$

4.4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

4.5) $\vec{v} = kx^2 - 2x + k$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = x^2 + 2x + 3; \vec{v}_2 = 3x^2 + 2x + 1\}$

4.6) $\vec{v} = (1, k, k^2)$ $\quad A = \{\vec{v}_1 = (k, k, k^2); \vec{v}_2 = (k^2, kh, k^2h)\}$

Para cada caso analizar la dependencia o independencia lineal del conjunto A.

Ejercicio 5.

Consolidación de los conceptos de generación e independencia en subespacios de dimensión pequeña. Reconocimiento de información suficiente pero no necesaria; identificación de subespacios a partir de conjuntos que los generan: recodificación de información; análisis de casos; proposición de modificaciones, optimización.

5.1) Dado el conjunto de vectores $A = \{\vec{a} = (1,1,1); \vec{b} = (1,-1,5); \vec{c} = (1,3,-3)\}$ analizar si es:

5.1.a) linealmente independiente **5.1.b)** sistema de generadores de $\mathbf{R^3}$.

En función de la respuesta obtenida, discriminar si toda la información contenida en el conjunto A es necesaria desde el punto de vista algebraico, o es posible eliminar parte de ella y seguir generando la misma entidad algebraica. ¿Cualquier parte, en forma arbitraria? Justificar la respuesta.

Si la respuesta (**5.1.b**) es negativa, definir el subespacio S_A que generan, indicando una base y dimensión del mismo.

Si la respuesta (**5.1.b**) es negativa, proponer una mínima cantidad de cambios en los elementos de A para que dicho conjunto constituya una base de $\mathbf{R^3}$. Justificar la respuesta.

5.2) Dado el conjunto $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$ contestar las siguientes cuestiones.

5.2.a) Indicar para qué valores de a y b el conjunto A es linealmente dependiente.

5.2.b) Si $a = -1$ y $b = 0$, definir el subespacio que genera el conjunto A, S_A, indicando base y dimensión.

5.2.c) Hallar la intersección del subespacio S_A del ítem **5.2.b)** con S, siendo S el subespacio definido por $S = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{R^{2\times 2}} / \ x + y + t = 0 \ \wedge \ z + t = 0\right\}$.

5.2.d) Si $a = -1$ y $b = 0$, modificar el conjunto A para que constituya una base de $\mathbf{R^{2\times 2}}$.

5.3) Dado el conjunto $A = \{\vec{v}_1 = (1,1,a); \vec{v}_2 = (-1,-a^2,-a); \vec{v}_3 = (1,1,-b)\}$:

5.3.a) Hallar para qué valores de a y b el conjunto es linealmente independiente.

5.3.b) Encontrar un valor de a y un valor de b para los cuales el subespacio generado por el conjunto A tenga dimensión dos. Dar una interpretación geométrica del mismo. Fijado el valor de a, ¿hay una única opción de b para que el subespacio generado por el conjunto A tenga dimensión dos? Analizar todas las distintas alternativas.

5.4) Dado los siguientes sistemas de generadores, determinar dimensión y una base para cada uno de los subespacios de $\mathbf{R^3}$ correspondientes. Identificar cada subespacio con un sistema de ecuaciones lineales de un número mínimo de ecuaciones. Hallar la intersección de los mismos. Graficar. Para cada subespacio dar una base que no contenga ninguno de los vectores de los conjuntos que originalmente identifican al correspondiente subespacio.

S_1 generado por $A_1 = \{\vec{v}_1 = (1{,}0{,}1); \vec{v}_2 = (-1{,}0{,}1); \vec{v}_3 = (0{,}0{,}1)\}$

S_2 generado por $A_2 = \{\vec{u}_1 = (1{,}0{,}1); \vec{u}_2 = (-1{,}0,-1)\}$

S_3 generado por $A_3 = \{\vec{w}_1 = (0{,}0{,}1); \vec{w}_2 = (-1{,}1{,}0); \vec{w}_3 = (0{,}0{,}0); \vec{w}_4 = (2,-2,-1)\}$

Ejercicio 6.

Desarrollo intuitivo. Observación, justificación de hipótesis, generalización.

6.1) Los siguientes ítems se pueden contestar sin necesidad de realizar un cálculo muy elaborado. Existe una justificación elemental en cada caso, y es posible encontrarla con la sola observación. Intentar hallarla, discutirla.

6.1.a) Sea S_1 el subespacio formado por las matrices diagonales de orden 2. El conjunto definido por $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ no puede constituir una base para S_1.

6.1.b) Sea S_2 el subespacio formado por las matrices simétricas de orden 2. El conjunto definido por $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ no puede constituir una base para S_2.

6.1.c) Si el subespacio S_3 está generado por el conjunto C, entonces $\vec{v}_3$ no pertenece a S_3 con

$$C = \{\vec{v}_1 = x^2; \vec{v}_2 = -x^2 + 1; \vec{v}_3 = -2\} \text{ y } \vec{v} = -x^2 + 3x + 1.$$

6.2) Determinar dimensión y una base para cada uno de los siguientes subespacios:

$S_1 = \{ax^2 + bx + c \ / \ a + b = 0\} \subset \mathbf{P_2}[\boldsymbol{x}]$;

$S_2 = \{\vec{x} \in \mathbf{R^4} / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$;

$S_3 = \{M \in \mathbf{R^{2\times 2}} / \ tr(M) = 0\}$**.** Notación: tr es la traza de una matriz cuadrada definida por la suma de los elementos de su diagonal principal.

6.3) Sean S_1 y S_2 dos subespacios de $\mathbf{R^{2\times 2}}$ definidos por:

$$S_1 = \{X \in \mathbf{R^{2\times 2}} / \ X^T = X\};\ S_2 = \{X \in \mathbf{R^{2\times 2}} / \ X^T = -X\}.$$

6.3.a) Hallar dimensión y una base B_{S1} de S_1 y dimensión y una base B_{S2} de S_2.

6.3.b) Justificar que el conjunto $B = B_{S1} \cup B_{S2}$ es una base de $\mathbf{R^{2\times 2}}$. Constatar que cualquier vector $\vec{x} = \left(\left(x_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R^{2\times 2}}$ se puede descomponer como $\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1 \in S_1$ y$\vec{u}_2 \in S_2$.

Ejercicio 7.

Identificación de la información contenida en los datos del problema. Discusión de alternativas plausibles y demostración de hipótesis en un contexto donde la visualización geométrica constituye una ayuda heurística.

7.1) Sean A y B dos conjuntos linealmente independientes de $\mathbf{R^3}$ definidos por

$$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ y } B = \{\vec{v}_3\}.$$

Analizar la dependencia o independencia lineal del conjunto$C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$. ¿Constituye C una base de $\mathbf{R^3}$? Justificar la respuesta.

7.2) Si el conjunto de vectores $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ es una base de $\mathbf{R^3}$, demostrar que el conjunto de vectores $\{\vec{u}_1 = \vec{a}; \vec{u}_2 = \vec{a} + \vec{b}; \vec{u}_3 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\}$ es linealmente independiente.

7.3) El conjunto $A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \subset \mathbf{R^3}$ es una base de un subespacio S. Analizar para los distintos valores de $\lambda \in \mathbf{R}$ y las direcciones relativas de los vectores de A, la dimensión de los subespacios S_{11}, S_2 y S_3 si se sabe que:

7.3.a) S_1 que está generado por el conjunto $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \lambda\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\}$,

7.3.b) S_2 que está generado por el conjunto $C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2\}$,

7.3.c) S_3 que está generado por el conjunto $D = \{\vec{v}_1; 2\vec{v}_1 - (1 - \lambda)\vec{v}_2\}$.

Notación: ($\times$) producto vectorial; ($\cdot$) producto escalar.

7.4) Demostrar que cualesquiera sean los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de $\mathbf{R^3}$, el conjunto $\{\vec{a}-\vec{b}; \vec{b}-\vec{c}; \vec{c}-\vec{a}\}$ es linealmente dependiente.

7.5) Analizar los resultados posibles de $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ si el conjunto $\{\vec{a};\vec{b}\}$ es linealmente dependiente. Justificar la respuesta.

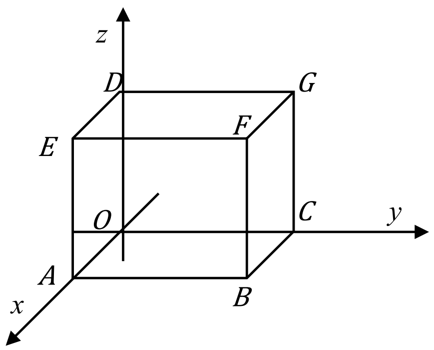
7.6) Analizar los resultados posibles de $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ si el conjunto $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ constituye una base de vectores mutuamente perpendiculares de $\mathbf{R^3}$. Justificar la respuesta.

7.7) Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pertenecientes a $\mathbf{R^3}$:

7.7.a) Demostrar que el subespacio vectorial generado por $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es el mismo subespacio que el generado por $\{\vec{u}+\vec{v};\vec{u}-\vec{v}\}$.

7.7.b) Analizar los casos cuando $\{\vec{u};\vec{v}\}$ es linealmente independiente o es linealmente dependiente. Indicar dimensión del subespacio generado, dar una base del mismo y su interpretación geométrica.

7.8) Sea un cubo de lado a y un sistema cartesiano ortogonal con su origen en uno de los vértices como se indica en la figura.



a) ¿Es linealmente independiente el conjunto $\{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{FC};\overrightarrow{OB}\}$? Justificar la respuesta.

b) ¿Es linealmente independiente el conjunto $\{\overrightarrow{DF};\overrightarrow{OF};\overrightarrow{EA}\}$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 8.

Análisis de estructura lógica. Búsqueda de contraejemplos.

Justificar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, proponer un contraejemplo.

8.1) En este ítem $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in \mathbf{R^3}$.

8.1.a) Si $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}$ es L.I. $\Rightarrow \{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3;\vec{v}_4\}$ es S.G. de $\mathbf{R^3}$.

8.1.b) Si $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}$ es L.I. $\Rightarrow \{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}$ constituye una base de $\mathbf{R^3}$.

8.1.c) Si $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}$ es L.I. $\Rightarrow \{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$ es L.I.

8.1.d) Si $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}$ es L.D. $\Rightarrow \{\vec{v}_1;\vec{v}_2\}$ es L.D.

8.1.e) Si $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3;\vec{v}_4\}$ es S.G. de $\mathbf{R^3} \Rightarrow \{\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbf{R^3}$.

Notación: (L.I.) linealmente independiente, (L.D.) linealmente dependiente, (S.G.) sistema de generadores.

8.2) Todo conjunto de vectores tal que uno de sus elementos es el vector nulo, es linealmente dependiente.

8.3) En todo conjunto de vectores linealmente dependiente, el primer elemento se puede escribir como combinación lineal de los restantes.

8.4) La condición necesaria y suficiente para que el conjunto formado por dos vectores no nulos del espacio $\mathbf{R^3}$ sea linealmente dependiente es que dichos vectores sean paralelos.

8.5) Es condición suficiente pero no necesaria para que el conjunto formado por tres vectores no nulos del espacio $\mathbf{R^3}$ sea linealmente dependiente es que sean coplanares.

8.6) Un subespacio vectorial no puede tener más de una base.

8.7) Si el conjunto M de vectores genera al espacio vectorial $\mathbf{V}$, entonces todo vector en $\mathbf{V}$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de M de manera única.

Ejercicio 9. Sean las siguientes matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-k & 1 \end{pmatrix}; M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}.$$

9.1) ¿Para qué valores reales de k, M_4 se puede expresar como combinación lineal de M_1, M_2 y M_3?

9.2) Para $k = 1$, expresar el subespacio S generado por el conjunto $\{M_1; M_2; M_3\}$. Dar una base del mismo e indicar su dimensión.

9.3) ¿Existe algún valor de k para el cuál el conjunto $\{M_1; M_2; M_3; M_4\}$ constituya una base de $\mathbf{R}^{2\times 2}$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 10.

Reconocimiento de más de una opción de representar lo mismo. Justificación de equivalencias; elección de la expresión más conveniente; cambio de sistemas de referencia; reconstrucción de un sistema dado un conjunto de datos suficientes; discriminación de datos redundantes.

10.1) Sean los subespacios S_1 y S_2 definidos por

$$S_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \middle/ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\},$$

$$S_2 = \{\vec{x} = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / \vec{x} = \lambda(1,0,1,1) + \mu(0,1,1,-1), \forall\lambda \in \mathbf{R}, \forall\mu \in \mathbf{R}\}$$

y S_3 el subespacio generado por el conjunto de vectores

$$A_1 = \{\vec{v}_1 = (-1,2,1,-3); \vec{v}_2 = (2,-3,-1,5); \vec{v}_3 = (1,-1,0,2)\}.$$

10.1.a) Hallar una base para cada uno de los subespacios.

10.1.b) Demostrar que $S_1 = S_2 = S_3 = S$.

10.1.c) Si en el ítem **a)** se dio como respuesta más de un conjunto diferente, calcular las coordenadas de un vector genérico de S en dichas bases. Si en el ítem **a)** se dio sólo una base por respuesta, indicar otra diferente y realizar con ellas lo pedido.

10.2) Sea $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$ una base de $\mathbf{R}^2$ y sean $\vec{a}$ y $\vec{c}$ dos vectores de dicho espacio vectorial. Sabiendo que $\vec{a}$ en la base canónica está identificado con el par $(1,1)$, mientras que sus coordenadas en la base B son 2 y 3, y que $\vec{c}$ de coordenadas $(-1,1)$ en la base canónica tiene coordenadas 3 y 5 en la base B, determinar las coordenadas en la base canónica de los vectores del conjunto B. Graficar.

Ejercicio 11.

Cálculo de distintos tipos de normas vinculadas a un mismo espacio vectorial.

11.1) Hallar las normas de orden 1, 2 e infinito del vector $\vec{x} = (1,2,-5,0) \in \mathbf{R}^4$.

11.2) Hallar una base del subespacio S tal que todos sus vectores tengan norma euclídea 1, siendo

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

Ejercicio 12.

Conocimiento del producto interior definido sobre un espacio vectorial. Vinculación con la generalización del producto escalar de espacios con representación geométrica. Destreza en la identificación de productos interiores factibles distintos a los habituales.

Definido el producto interior, hallar el resultado pedido.

12.1) Con $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 + u_4 \cdot v_4$.

Hallar $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

12.2) Con $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \mathbf{P_2}[\boldsymbol{x}]$ (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 en la variable x); $\langle p(x), q(x) \rangle = a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_0$.

Hallar $\langle p(x), q(x) \rangle$ si $p(x) = 2x^2 + 5x - 1$ y $q(x) = 3x^2 - 2x$.

Observación: Salvo que se indique lo contrario, en lo que siga se trabajará con los escalares pertenecientes al conjunto de los números reales. De igual forma, al trabajar en $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{P_n}[x]$ cuando no se aclare lo contrario se usarán los productos interiores definidos por:

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \in \mathbf{R^n}$, el producto interior euclídeo, conocido como producto escalar de dos vectores, definido por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 + \cdots + u_n \cdot v_n$.

$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, q(x) = b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \ \in \mathbf{P_n}[x]$ (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n en la variable x),

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_n \cdot b_n + \cdots + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_0$$

Puede observarse que el producto interior de un vector de $\mathbf{R^n}$ por sí mismo se corresponde con el cuadrado de la norma de orden 2 o euclídea, es decir que: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2$.

Ejercicio 13.

Construcción e identificación de conjuntos ortogonales y ortonormales. Aprendizaje del proceso de ortogonalización de un conjunto con la perspectiva de aplicaciones futuras.

13.1) Sea el vector $\vec{a} = (1,2,-1)$ y el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 = x_3 \wedge x_2 = 0\}$, demostrar que $\vec{a} \perp S$.

13.2) Sean los subespacios de $\mathbf{R}^{33}$ definidos por

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 = x_3 \wedge x_2 = 0\} \text{ y } S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 = x_3 = 0\}$$

Demostrar que son ortogonales, es decir$S_1 \perp S_2$.

13.3) Demostrar que el siguiente conjunto constituye una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$

$$B_1 = \left\{ \vec{v}_1 = (0,1,0); \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Nota: además de calcular los seis productos interiores necesarios y constatar que su resultado es el esperado, es decir $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$, se puede construir una matriz A cuyas columnas sean las coordenadas de los vectores de la base y comprobar que A es una matriz ortogonal ($A \cdot A^T = I$). Pensar el porqué de esta equivalencia.

13.4) Hallar $a \in \mathbf{R}$, para que el siguiente conjunto constituya una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$

$$B_2 = \left\{ \vec{v}_1 = (0,1,0); \vec{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right); \vec{v}_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, a \right) \right\}.$$

¿La respuesta es única?

13.5) Construir a partir de la base $B_3 = \{\vec{v}_1 = (1,1,0); \vec{v}_2 = (0,1,1); \vec{v}_3 = (1,0,1)\}$, una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ (aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt).

13.6) Construir una base ortonormal de $\mathbf{R}^4$ que incluya los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ con:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Sugerencia: en primer lugar, hallar dos vectores, $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$, que completen la base.

Ejercicio 14.

Concientización de la agilidad de trabajo al elegir bases ortogonales y ortonormales. Proyección a futuras aplicaciones con espacios vectoriales de dimensión infinita.

Dados el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ (geométricamente representado por un plano que pasa por el origen) y los vectores $\vec{a} = (1,2,1)$ y $\vec{b} = (3,-2,4)$:

14.1) Hallar una base ortonormal $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2\}$ para S.

14.2) Hallar las coordenadas de $\vec{a} \in S$ en términos de la base hallada. Para ello recuerde la facilidad que le ofrece el trabajar con una base ortonormal $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2\}$ para S pues se verifica que:

$$\vec{a} = \langle \vec{a}, \hat{v}_1 \rangle \hat{v}_1 + \langle \vec{a}, \hat{v}_2 \rangle \hat{v}_2.$$

14.3) Hallar la proyección ortogonal de $\vec{b}$ sobre S, es decir $proy_S \vec{b}$.

14.4) Comprobar que el vector $\left(\vec{b} - proy_S \vec{b} \right)$ es ortogonal a S.

14.5) Hallar la distancia entre el punto $P(3,-2,4)$ y el plano π identificado con S. La misma está dada por la norma euclídea del vector $\left(\vec{b} - proy_S\vec{b}\right)$.

14.6) Hallar el subespacio constituido por todos los vectores de $\mathbf{R^3}$ ortogonales a S, es decir

$$S^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbf{R^3} / \vec{x} \perp S\}.$$

Sugerencia: completar la base $\{\hat{v}_1; \hat{v}_2\}$de S a una base ortonormal de $\mathbf{R^3}$ y obtener el subespacio generado por los vectores que se han agregado. Considerar que si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita y S es un subespacio no trivial de $\mathbf{V}$, entonces siempre se verifica:

$$\dim(\mathbf{V}) = \dim(S) + \dim(S^{\perp})\,, S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}_{\mathbf{V}}\}.$$

14.7) Escribir el vector $\vec{c} = (1,1,-1)$como la suma de $\left(\vec{p} + \vec{h}\right)$ de forma que $\vec{p} \in S$ y $\vec{h} \in S^{\perp}$.

14.8) Dados los puntos $P_0(1,-1,2)$ y $P_1(-1,0,1)$, hallar la proyección ortogonal de $\overrightarrow{P_0P_1}$ sobre el plano que representa S.

Ejercicio 15.

Identificación de subespacios ortogonales, visualización en ejemplos con representación geométrica. Vinculación entre los conceptos de ortogonalidad e independencia.

15.1) Dados los siguientes subespacios vectoriales (S), hallar una base de cada uno de ellos, el complemento o subespacio ortogonal $(S^{\perp})$ y una base correspondiente. Graficar. Utilizando los resultados obtenidos, hallar una base del espacio vectorial si:

15.1.a) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} / x_1 + x_2 = 0\}$

15.1.b) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} / x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0\}$

15.1.c) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3} / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Ortonormalizar las bases halladas.

15.2) Sea el espacio vectorial $\mathbf{R^3}$ y sea $A \subset \mathbf{R^3}$ un conjunto ortogonal de tres vectores no nulos, esto es

$$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \subset \mathbf{R^3} \text{ con } \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j,\ \vec{v}_i \neq \vec{0}.$$

Demostrar que A es un conjunto linealmente independiente.

15.3) Sea $\mathbf{R^5}$ un espacio vectorial y sea S un subespacio en $\mathbf{R^5}$. Si el conjunto A constituye una base para S y el conjunto B corresponde a una base del subespacio complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$, donde

$$A = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \subset S \subset \mathbf{R^5} \text{ con } \dim(S)\text{=3 y } B = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\} \subset S^{\perp} \subset \mathbf{R^5},$$

Demostrar, o justificar en forma clara, que si se define el conjunto

$$C = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{u}_1; \vec{u}_2\} \subset \mathbf{R^5}$$

entonces C constituye una base del espacio vectorial $\mathbf{R^5}$.

15.4) Sea $\mathbf{R^5}$ un espacio vectorial y sea S un subespacio en $\mathbf{V}$. Si el conjunto A constituye una base ortonormal para S y el conjunto B corresponde a una base ortonormal del subespacio complemento ortogonal de S, $S^{\perp}$, donde

$$A = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \hat{v}_3\} \subset S \subset \mathbf{R^5} \text{ con } \dim(S)\text{=3 y } B = \{\hat{u}_1; \hat{u}_2\} \subset S^{\perp} \subset \mathbf{R^5},$$

Demostrar, o justificar en forma clara, que si se define el conjunto

$$C = \{\hat{v}_1; \hat{v}_2; \hat{v}_3; \hat{u}_1; \hat{u}_2\} \subset \mathbf{R^5}$$

entonces C constituye una base ortonormal del espacio vectorial $\mathbf{R^5}$.

Un poco más allá.

Búsqueda del logo para la asignatura

Encomendamos a una diseñadora gráfica el logo de la materia, nos propone el siguiente diseño.

Los colores elegidos, Azul y Gris en las A para trasmitir lógica y precisión y la G en Verde para representar crecimiento y análisis. Las letras se entrelazan como un guiño al vínculo de conexión entre las dos ramas que se conectan y complementan.

La diseñadora dispone de una paleta base reducida con solo dos colores, Azul Claro y Verde Esmeralda, en RGB (código de color Red, Green, Blue):

$$\vec{a} = (173, 216, 230) \text{ y } \vec{v} = (80, 200, 120).$$

En RGB, el color Gris se forma al mezclar la misma cantidad de Rojo, Verde y Azul. Por ejemplo, el color Gris Plata es $(192, 192, 192)$ y el Gris Oscuro es $(64, 64, 64)$. ¿Se puede lograr un Gris cualquiera,

$$\vec{g} = (c, c, c),$$

con la paleta de $\vec{a}$ y $\vec{v}$?

¿Se puede dar una explicación de interpretación geométrica a lo que se respondió?

Si agregamos a la paleta el color morado representado por

$$\vec{m} = (93, 16, 110),$$

¿lograríamos el gris? ¿Por qué?