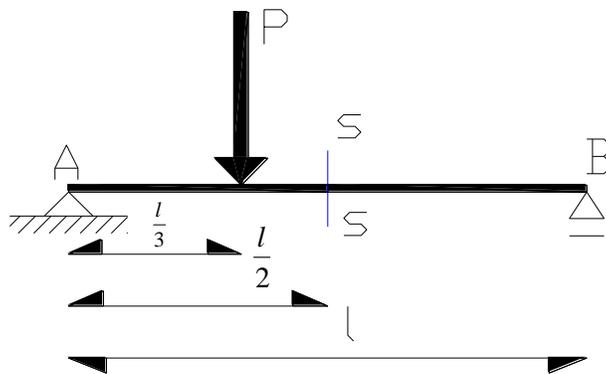


## PROBLEMAS DE PRINCIPIOS DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

**Problema n.º 1:** *Determinense el esfuerzo cortante y momento flector en la sección s-s de la viga de alma llena de la figura 1.*

1

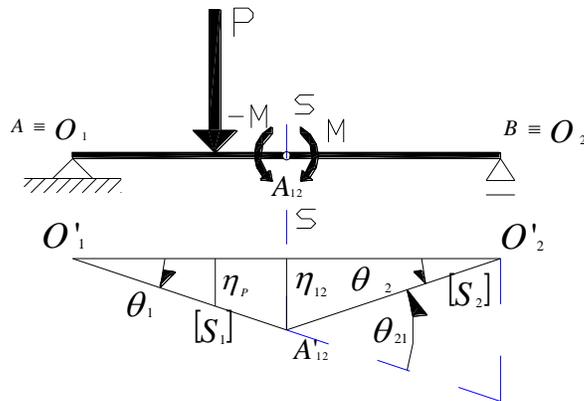
figura 1



### **Solución**

*Resolveremos el problema poniendo en evidencia la sección s-s. Comenzamos por determinar el momento flector, para lo cual ubicamos una rótula en la sección s-s como se indica en la figura 1 a.*

figura 1a



Una vez determinados los polos en la forma conocida, construimos el diagrama de corrimientos verticales dando un giro positivo  $\theta$ , a la chapa  $S_1$ , en consecuencia la chapa  $S_2$  girará en sentido inverso un ángulo  $\theta_2$ . Debido al principio de los trabajos virtuales tenemos:

$$\Phi = P \cdot \eta_p + M \cdot \theta_{21} = 0 \text{ ecuación a}$$

Pero,  $\eta_p = \theta_1 \cdot \frac{l}{3}$

Debido a que la sección s-s se encuentra a una distancia  $l/2$ , resulta  $\theta_1 = -\theta_2$ , y  $\theta_{12} = 2 \cdot \theta_1$ ,  $\theta_{21} = -\theta_{12}$

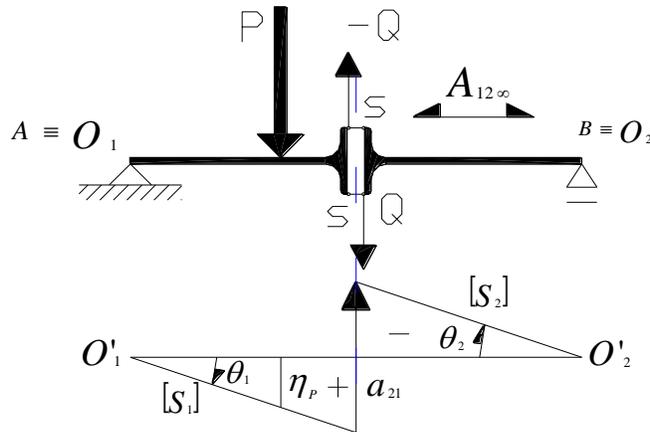
Reemplazando estas expresiones en la ecuación a, nos queda:

$$P \cdot \theta_1 \cdot \frac{l}{3} - M \cdot 2 \cdot \theta_1 = 0 \text{ obteniéndose de esta ecuación } M = P \cdot \frac{l}{6}$$

Siendo este, el valor del momento correspondiente a una longitud  $l/2$  del apoyo A.

Para determinar el esfuerzo cortante en la sección s-s, ponemos en evidencia el esfuerzo de corte con el mecanismo estudiado en la parte teórica, que se muestra en la figura 1b.

figura 1b



Comenzamos dando un giro positivo  $\theta_1$  alrededor del polo  $O_1$  a la chapa  $S_1$ , como consecuencia de ello, y debido a la articulación impropia  $A_{12\infty}$ , la chapa  $S_2$  girará un ángulo  $\theta_2 = -\theta_1$  alrededor de su polo  $O_2$ , y la fuerza  $Q$  sufrirá una traslación  $a_{12}$  negativa. Construido el diagrama de corrimientos verticales en la forma conocida, y, de acuerdo al principio de los trabajos virtuales, tenemos:

$$\Phi = P \cdot \eta_p - Q \cdot a_{21} = 0 \quad \text{Ecuación b}$$

Siendo  $\eta_p = \theta_1 \cdot \frac{l}{3}$  y  $|a_{21}| = \left| \theta_1 \cdot \frac{l}{2} \right| + \left| \theta_2 \cdot \frac{l}{2} \right|$  es decir  $|a_{21}| = |\theta_1| \cdot l$  .  $a_{21} < 0$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación b, resulta:

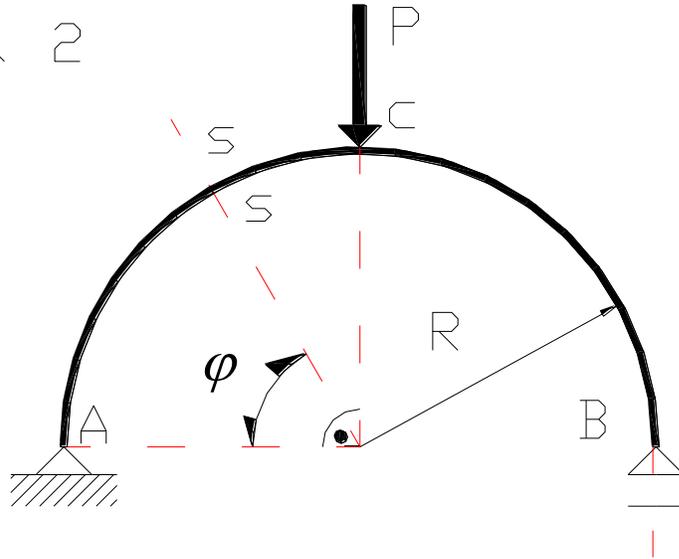
$$P \cdot \theta_1 \cdot \frac{l}{3} - Q \cdot (-\theta_1 \cdot l) = 0 \quad \text{de donde sale } Q = -\frac{P}{3}$$

Expresión que nos da el valor del esfuerzo cortante en la sección  $s-s$  en la viga de alma llena de la figura 1. Esta expresión coincide con la expresión que se obtiene reduciendo al baricentro de la sección  $s-s$ .

**Problema n.º 2:** Determinar los esfuerzos cortante, normal, y el momento flector en la sección  $s-s$  en la viga de alma llena de eje

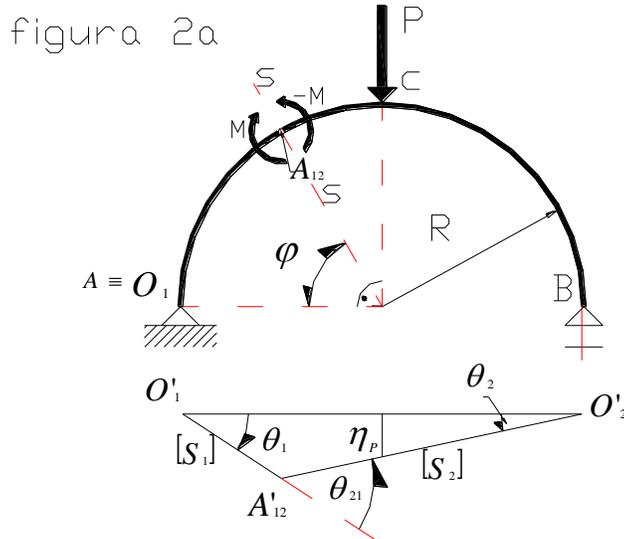
curvo y radio  $R$  sometida a una fuerza  $P$  como se indica en la figura 2.

figura 2



### Solución

Comenzamos por analizar el momento flector en la sección mencionada, para lo cual colocamos un mecanismo de rótula en la sección  $s-s$  como indica la figura 2 a.



Una vez obtenidos los polos  $O_1$  y  $O_2$  de rotación de las chapas formadas  $S_1$  y  $S_2$  ( el polo  $O_2$  no está indicado, pues aparecería fuera de los límites de la figura), se traza el diagrama de los corrimientos verticales que se representa en la parte inferior de la figura 2 a. Debido a que el polo  $O_2$  se encuentra sobre la vertical del apoyo móvil  $B$ ,  $O'_2$  se encontrará en el diagrama de corrimientos sobre la misma vertical de  $B$ . Luego el diagrama de corrimientos se traza en la forma conocida.

De acuerdo al principio de los trabajos virtuales tenemos:

$$P \cdot \eta_p + M \cdot \theta_{21} = 0, \quad \theta_{21} < 0 \quad \text{Ecuación a}$$

Por relaciones geométricas resulta:

$$\theta_1 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = \theta_2 \cdot R \cdot (1 + \cos \varphi) \quad \text{de donde obtenemos la relación}$$

$$\theta_2 = \theta_1 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad \text{Ecuación b}$$

Además, podemos determinar la siguiente relación:

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1 \quad \text{pero } \theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 < 0$$

entonces, resulta:  $\theta_{21} = -(\theta_2 + \theta_1)$ , y, reemplazando la ecuación b nos queda:

$$\theta_{21} = -\left( \theta_1 + \theta_1 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \quad \text{Ecuación c que, operando algebraica mente nos queda,}$$

$$\theta_{21} = -2 \frac{\theta_1}{1 + \cos \varphi} \quad \text{Ecuación d}$$

Reemplazando en la ecuación a, las ecuaciones b y c, y siendo

$\eta_p = \theta_2 \cdot R = \theta_1 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \cdot R$ , podemos escribir la ecuación a como:

$$P \cdot \theta_1 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \cdot R - M \cdot 2 \cdot \frac{\theta_1}{1 + \cos \varphi} = 0 \quad \text{Ecuación e}$$

obteniéndose:

$$M = \frac{P \cdot R}{2} (1 - \cos \varphi)$$

Siendo esta última expresión el momento en la sección **s-s** considerada de la viga.

A continuación determinaremos el esfuerzo de corte en la sección **s-s**, para lo cual ponemos en evidencia el mismo aplicando un mecanismo de dos bielas paralelas normales a la sección **s-s** considerada como se indica en la figura 2b.

En la misma, encontrados los polos de rotación de las chapas **S<sub>1</sub>** y **S<sub>2</sub>** en la forma conocida, podemos trazar el diagrama de corrimientos verticales. Al girar la chapa **S<sub>1</sub>** un ángulo  $\theta_1$ , en sentido positivo, la chapa **S<sub>2</sub>** girará un ángulo  $\theta_2 = -\theta_1$ , en consecuencia, la fuerza **Q** sufrirá una traslación **a<sub>12</sub>**. Siendo  $\eta$  el desplazamiento de la fuerza **P**, debido al principio de los trabajos virtuales, tenemos:

$$P \cdot \eta - Q \cdot a_{21} = 0 \quad \text{Ecuación f}$$

De acuerdo a la figura 2b, resulta  $\eta = \theta_2 \cdot R$  Ecuación g

Y el desplazamiento

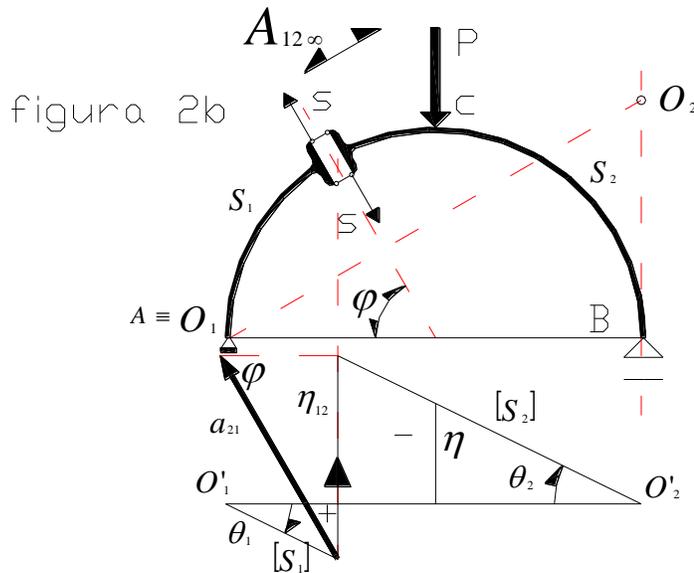
$$a_{21} = -\theta_1 \cdot \frac{2 \cdot R}{\sin \varphi} \quad \text{Ecuación h,} \quad \text{pues} \quad a_{12} = \frac{\eta_{12}}{\sin \varphi} \quad \text{y} \quad \eta_{12} = 2 \cdot R \cdot \theta_1$$

Reemplazando las ecuaciones g y h en la ecuación f, obtenemos:

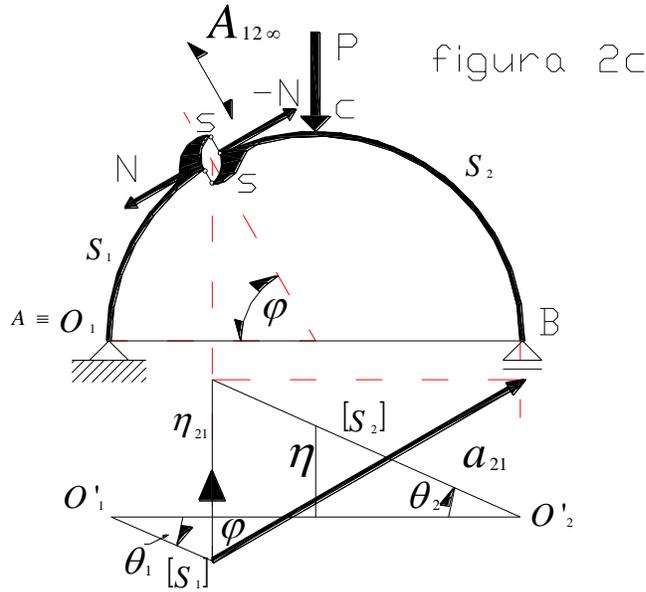
$$-P \cdot \theta_1 \cdot R - Q \cdot \left( -\theta_1 \cdot \frac{2R}{\sin \varphi} \right) = 0 \quad \text{Ecuación i. De donde surge} \quad Q = \frac{P}{2} \cdot \sin \varphi$$

## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Siendo este el esfuerzo cortante correspondiente a la viga estudiada en la sección **s-s**.



Determinación del esfuerzo normal  $N$  en la sección **s-s**. Para esto ubicamos en la sección **s-s** dos bielas paralelas contenidas en la sección estudiada, quedando, de esta forma dividida la viga en las chapas  $S_1$  y  $S_2$ . Una vez determinada la posición de los polos  $O_1$  y  $O_2$  (el polo  $O_2$  no está representado por quedar fuera de la figura 2c, aunque se deberá encontrar sobre la recta de acción del apoyo móvil  $B$ ), procedemos al trazado del diagrama de los desplazamientos verticales, como indica la figura 2c.



Comenzamos dando un giro  $\theta_1$  a la chapa  $S_1$ , en consecuencia, la chapa  $S_2$  girará un ángulo  $\theta_2 = -\theta_1$ , y la fuerza  $N$  sufrirá una traslación  $a_{12}$  en la dirección indicada en la figura 2c. De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, tenemos:

$$P \cdot \eta + N \cdot a_{21} = 0 \quad \text{Ecuación j} \quad \text{y} \quad \eta = -\theta_2 \cdot R = -\theta_1 \cdot R$$

Para determinar  $a_{21}$ , tenemos que:

$$a_{21} = \frac{\eta_{21}}{\cos \varphi} = -\theta_1 \cdot \frac{2R}{\cos \varphi} \quad \text{Ecuación k} \quad \text{debido a que } \eta_{21} = \theta_1 \cdot 2R$$

El signo menos se debe a que  $a_{21}$  negativa al igual que  $\eta_{21}$ .

Entonces, reemplazando en la ecuación j, resulta:

$$-P \cdot \theta_1 \cdot R + N \cdot \left( -\theta_1 \cdot \frac{2R}{\cos \varphi} \right) = 0$$

De esta última se obtiene:

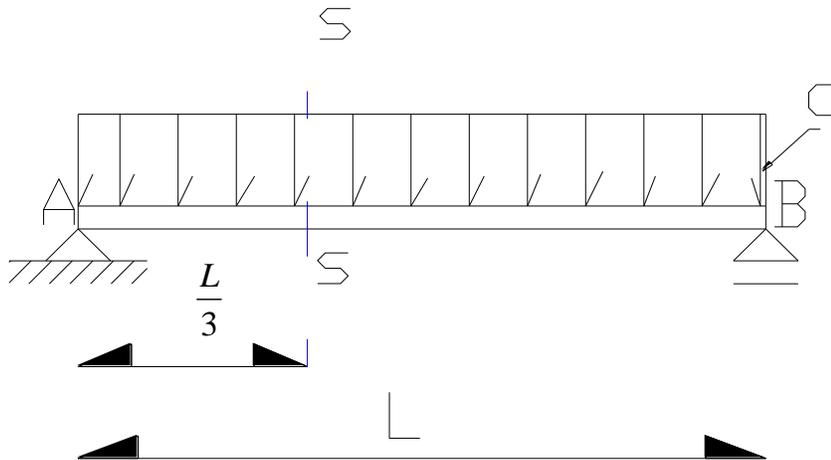
$$N = -\frac{P}{2} \cdot \cos \varphi$$

Siendo esta el esfuerzo normal correspondiente a una sección  $s-s$  cualquiera en un ángulo  $\varphi$ .

## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

**Problema n.º 3:** *Determinense los esfuerzos de momento flector, y cortante en la sección s-s de la viga de alma llena sometida a una carga uniformemente distribuida como se indica en la figura 3.*

figura 3



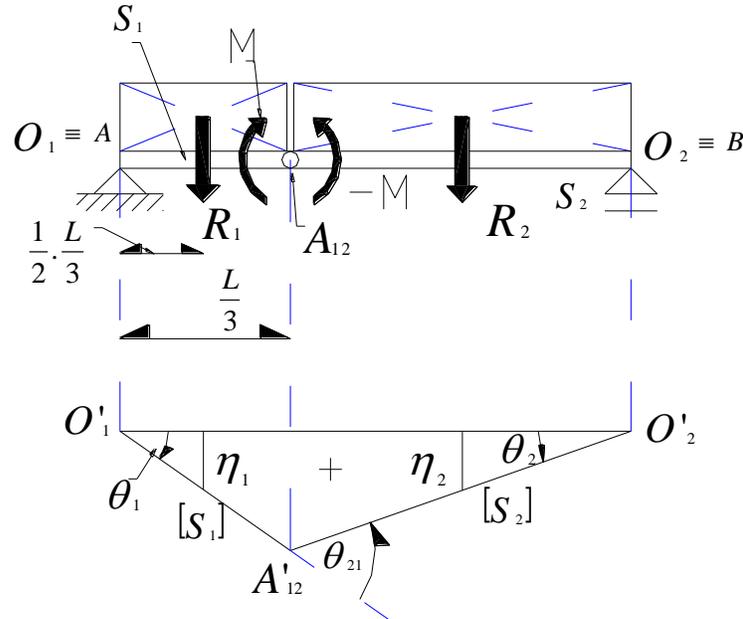
### Solución

Previo a la determinación de los esfuerzos solicitados, separamos la viga en dos chapas  $S_1$  y  $S_2$  por la sección  $s-s$ . Luego, reemplazamos las cargas repartidas de ambas chapas por sus respectivas resultantes  $R_1$  y  $R_2$  actuando en los baricentros de las mismas como indica la figura 3 a.

De acuerdo a esto último, tenemos:

$$\text{Ecuaciones a } \begin{cases} R_1 = q \cdot \frac{L}{3} \\ R_2 = q \cdot \left( L - \frac{L}{3} \right) = \frac{2}{3} q \cdot L \end{cases}$$

figura 3a



Ubicando el mecanismo de rótula en la sección **s-s**, con lo cual la viga se transforma en las chapas **S<sub>1</sub>** y **S<sub>2</sub>**, y ubicando los momentos **M** y **-M** se procede a trazar el diagrama de los corrimientos verticales en la forma estudiada.

Una vez representado el diagrama de corrimientos verticales, habiéndose determinado previamente los polos en la forma conocida, procedemos aplicar el principio de los trabajos virtuales como sigue:

$$R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2 + M \cdot \theta_{21} = 0 \quad \text{Ecuación b}$$

$$\text{donde } \begin{cases} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{3} = \theta_1 \cdot \frac{L}{6} \\ \eta_2 = \theta_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3} = \theta_2 \cdot \frac{L}{3} \end{cases}$$

Y, por relaciones geométricas, obtenemos:

$$\theta_1 \cdot \frac{L}{3} = \theta_2 \cdot \frac{2}{3}L \quad \rightarrow \quad \frac{\theta_1}{2} = \theta_2 \quad \text{Ecuación c}$$

$$\text{Y, siendo } \theta_{21} = \theta_2 - \theta_1 = -\frac{\theta_1}{2} - \theta_1 = -\frac{3}{2}\theta_1 \quad \text{Ecuación d}$$

Reemplazando las ecuaciones a, c y d en la ecuación b, resulta:

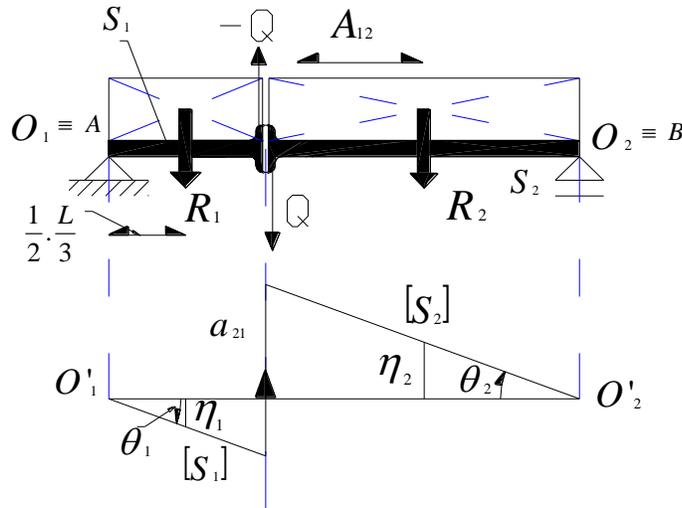
$$\frac{q.L}{3} \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{6} + \frac{2}{3}q.L \cdot \frac{\theta_1}{2} \cdot \frac{L}{3} + M \cdot \left(-\frac{3}{2}\theta_1\right) = 0 \quad \text{Ecuación e}$$

Obteniéndose de la ecuación e el valor del momento flector buscado para la sección **s-s** de la viga de alma llena estudiada.

$$M = \frac{1}{9}q.L^2$$

Determinación del esfuerzo cortante. Para esto, ponemos en evidencia la sección *s-s* con un mecanismo de dos bielas normales a la sección considerada, con lo que la viga de alma llena queda constituida por dos chapas  $S_1$  y  $S_2$  como indica la figura 3b. Luego, una vez determinada la posición de los polos de rotación, damos un giro  $\theta_1$  a la chapa  $S_1$ , y la chapa  $S_2$  girará un ángulo  $\theta_2 = \theta_1$ . Con lo cual construimos el diagrama de los corrimientos verticales como se indica en la figura 3b.

figura 3b



De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, surge la siguiente ecuación:

$$R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2 - Q \cdot a_{21} = 0 \quad \text{Ecuación f}$$

Por relaciones geométricas se tiene:

$$\text{Ecuaciones g} \begin{cases} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{L}{6} \\ \eta_2 = -\theta_2 \cdot \frac{L}{3} = -\theta_1 \cdot \frac{L}{3} \end{cases}$$

Y, siendo que las direcciones de la fuerza  $Q$  y su respectivo corrimiento  $a_{21}$  son coincidentes, se tiene:

$$a_{21} = -\theta_1 \cdot L \quad \text{Ecuación h. El signo menos es debido a que } a_{21} \text{ es negativo}$$

Reemplazando las ecuaciones g y h en la ecuación f, resulta:

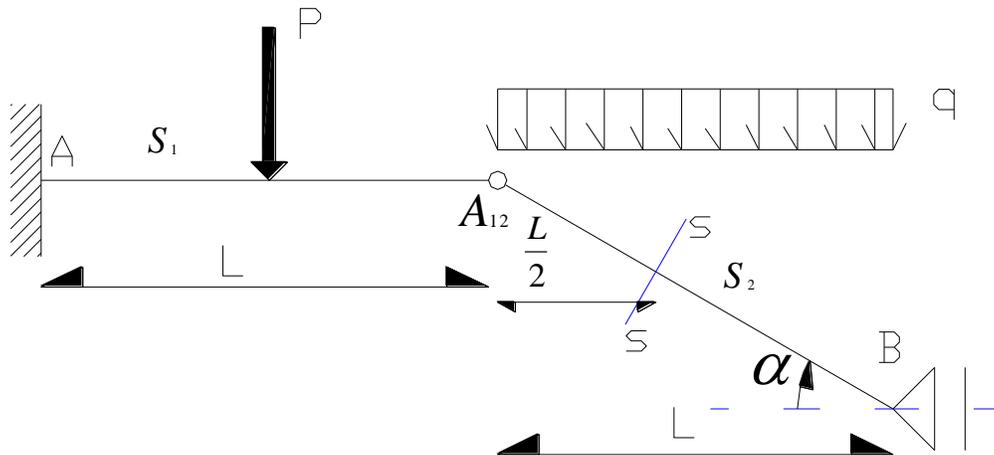
$$q \cdot \frac{L}{3} \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{6} - \frac{2}{3} \cdot q \cdot L \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{3} - Q \cdot (-\theta_1 \cdot L) = 0 \quad \text{Ecuación i}$$

De la ecuación i, obtenemos el esfuerzo cortante en la sección *s-s* de la viga, siendo este:

$$Q = q \cdot \frac{L}{6}$$

**Problema n.º 5:** Determinar el momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo normal en la sección s-s en la viga de alma llena de la figura 5.

figura 5



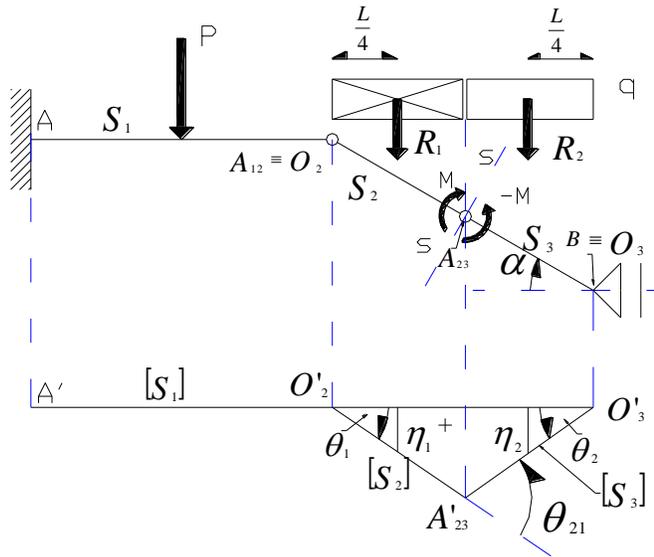
**Solución**

Podemos observar que se trata de un pórtico a tres articulaciones, en donde la chapa  $S_1$  permanece fija, pues la misma está empotrada, en consecuencia la articulación  $A_{12}$  es polo de la chapa  $S_2$ , es decir

$$A_{12} \equiv O_2.$$

Comenzamos por determinar el momento flector de s-s. Ubicamos, como ya conocemos, una rótula y colocamos los pares  $M$  y  $-M$  en la sección antedicha, transformando el sistema en una cadena cinemática abierta de tres chapas como se indica en la figura 5 a.

figura 5a



Conociendo que:

$$R_1 = R_2 = q \cdot \frac{L}{2}$$

Una vez trazado el diagrama de los corrimientos verticales, se pueden establecer relaciones entre los ángulos girados  $\theta_1$  y  $\theta_2$  por las chapas  $S_2$  y  $S_3$  que ayuden a resolver nuestro problema.

Y, siendo  $\theta_1 = \theta_2$  debido a la simetría, pues la sección **s-s** se halla a la mitad de la luz de la chapa  $S_2$ , entonces, determinamos los corrimientos verticales  $\eta_1$  y  $\eta_2$  de la siguiente forma:

$$\text{Ecuaciones a} \begin{cases} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{L}{4} \\ \eta_2 = \theta_2 \cdot \frac{L}{4} \end{cases}$$

Y, aplicando el principio de los trabajos virtuales, tenemos:

$$R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2 + M \cdot \theta_{21} = 0 \quad \text{Ecuación b}$$

Siendo, a su vez,  $\theta_{21} = -2 \cdot \theta_1$ , entonces, reemplazando la ecuación a, las expresiones de  $R_1$  y  $R_2$ , y el valor de  $\theta_{21}$  en la ecuación b, resulta:

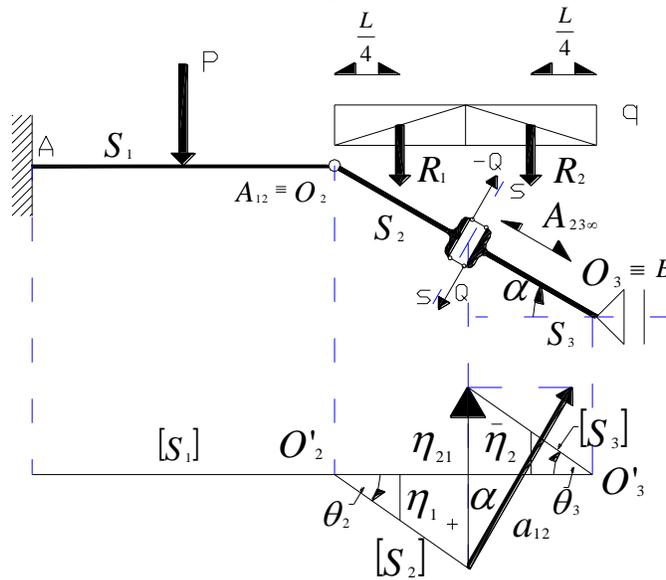
$$q \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{4} + q \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{4} - 2 \cdot M \cdot \theta_1 = 0 \quad \text{Ecuación c}$$

De la ecuación c, surge el valor del momento flector  $M$  en **s-s**.

$$M = q \cdot \frac{L^2}{8}$$

Seguidamente, se determinará el esfuerzo cortante  $Q$  en **s-s**. En la figura 5b se muestra el mecanismo utilizado para poner en evidencia el esfuerzo cortante en **s-s**, en conjunto con el diagrama de corrimientos verticales.

figura 5b



Una vez ubicado el mecanismo de dos bielas paralelas y normales a la sección  $s-s$ , formando así una cadena cinemática abierta de tres chapas, y, luego de colocar las fuerzas  $Q$  y  $-Q$ , determinamos la posición de los polos de las chapas. La chapa  $S_1$ , por estar empotrada, la misma permanece inmóvil, en consecuencia, la articulación  $A_{12}$  es polo de la chapa  $S_2$ . Desde este polo se traza una recta paralela a la dirección de las bielas determinando el polo  $O_3$  de la chapa  $S_3$ , en el apoyo  $B$ , coincidiendo con este.

Luego de esto, trazamos el diagrama de los corrimientos verticales, para ello, giramos la chapa  $S_2$  un ángulo  $\theta_2$  positivo, y, debido a la articulación impropia  $A_{23\infty}$ , la chapa  $S_3$  girará un ángulo  $\theta_3 = \theta_2$ , siendo las rectas  $[S_2]$  y  $[S_3]$  paralelas entre sí.

De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, tenemos:

$$R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2 - Q \cdot a_{21} = 0 \quad \text{Ecuación d}$$

Siendo:

$$\text{Ecuaciones e} \begin{cases} \eta_1 = \theta_2 \cdot \frac{L}{4} \\ \eta_2 = -\theta_2 \cdot \frac{L}{4} \end{cases}$$

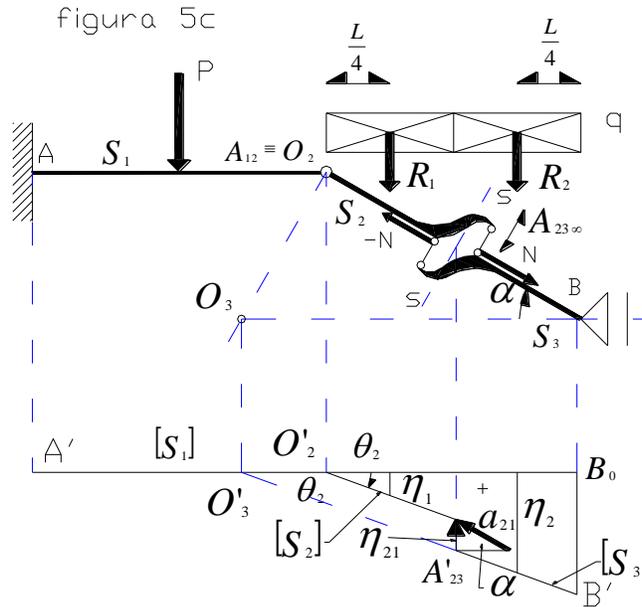
A su vez,

$$a_{21} = -\frac{\eta_{21}}{\cos \alpha}, \text{ pero } \eta_{21} = \theta_2 \cdot L, \text{ entonces } a_{21} = -\theta_2 \cdot \frac{L}{\cos \alpha} \quad \text{Ecuación f}$$

Reemplazando las ecuaciones d, f, y, las expresiones de  $R_1$  y  $R_2$  en la ecuación d, nos queda:

$$q \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_2 \cdot \frac{L}{4} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_2 \cdot \frac{L}{4} - Q \cdot \theta_2 \cdot \frac{L}{\cos \alpha} = 0 \quad \text{Surgiendo, de aquí, } \rightarrow Q = 0$$

Seguidamente, determinaremos el esfuerzo normal en  $s-s$ . Para ello, comenzamos colocando dos bielas paralelas en la sección estudiada, transformando la cadena cinemática a una de tres chapas, como se indica en la figura 5c.



Una vez determinados los polos de la cadena, procedemos a trazar el diagrama de los corrimientos verticales. El polo  $O_2$  de  $S_2$  coincide con la articulación  $A_{12}$ , mientras que el polo  $O_3$  de  $S_3$  se encuentra trazando una paralela a la dirección de  $A_{23\infty}$  por  $O_2$ , y en su intercepción con la normal al apoyo móvil  $B$ , determina el polo  $O_3$  de  $S_3$ .

Por  $O'_2$  damos un giro  $\theta_2$  a  $S_2$ , y el desplazamiento vertical de  $S_2$  queda definido por  $[S_2]$ . Por  $O'_3$ , trazamos una recta paralela a la dirección  $[S_2]$ , determinando el desplazamiento vertical  $[S_3]$  de  $S_3$ . El desplazamiento  $\eta_{21}$  será el correspondiente desplazamiento relativo para llevar a  $[S_3]$  a la posición  $[S_2]$ .

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, tenemos:

$$R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2 - N \cdot a_{21} = 0 \quad \text{Ecuación g}$$

Siendo, además:

$$\overline{BO_3} = \overline{B_0O'_3} = \frac{L}{\cos^2 \alpha}$$

Resultando los siguientes corrimientos verticales:

$$\text{Ecuaciones h} \begin{cases} \eta_1 = \theta_2 \cdot \frac{L}{4} \\ \eta_2 = \theta_2 \cdot \left( \frac{L}{\cos^2 \alpha} - \frac{L}{4} \right) \end{cases}$$

Y, también, de la figura 5c, extraemos:

$$\eta_{12} = \theta_2 \cdot \left( \frac{L}{\cos^2 \alpha} - \frac{L}{2} \right) - \theta_2 \cdot \frac{L}{2} = \theta_2 \cdot \left( \frac{L}{\cos^2 \alpha} - L \right) \quad \text{Ecuación i}$$

Que, siendo el corrimiento  $a_{21}$  de la fuerza  $N$ :

$$a_{21} = -\frac{\eta_{12}}{\text{sen } \alpha} = -\frac{\theta_2}{\text{sen } \alpha} \left( \frac{L}{\cos^2 \alpha} - L \right) \quad \text{Ecuación j}$$

Reemplazando en la ecuación g, las ecuaciones h y j, y, las expresiones de  $R_1$  y  $R_2$ , resulta la siguiente ecuación:

$$q \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_2 \cdot \frac{L}{4} + q \frac{L}{2} \cdot \theta_2 \cdot \left( \frac{L}{\cos^2 \alpha} - \frac{L}{4} \right) - N \cdot \left[ -\frac{\theta_2}{\sin \alpha} \left( \frac{L}{\cos^2 \alpha} - L \right) \right] = 0 \quad \text{Ecuación k}$$

Despejando  $N$  de la ecuación k, y, realizando algunas operaciones algebraicas, resulta:

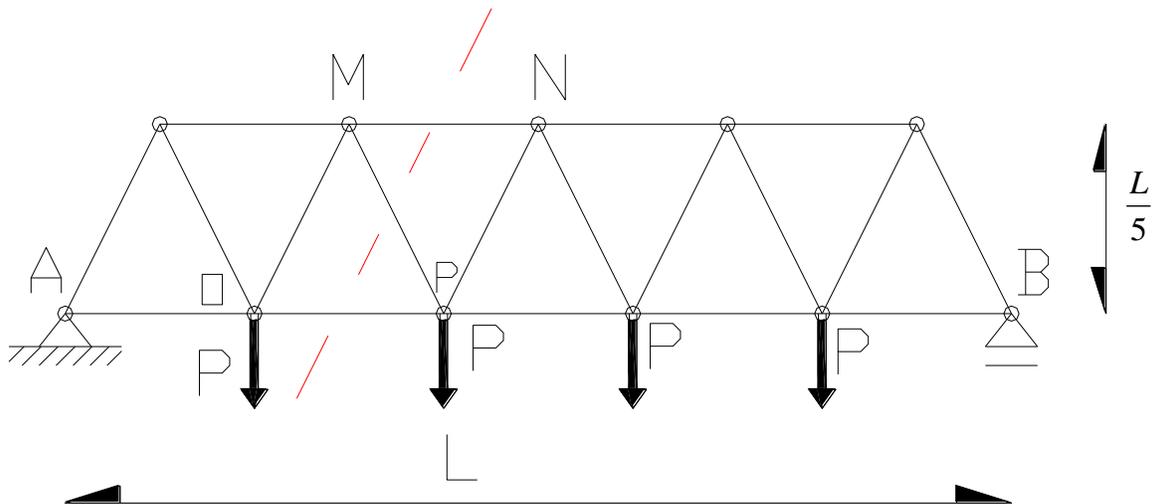
$$N = -\frac{q \cdot L}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Siendo este último, el valor del esfuerzo normal  $N$  en la sección  $s-s$  solicitada.

16

**Problema n.º 8:** En la estructura reticular de la figura 8 se deberán determinar los esfuerzos de las barras  $MN$ ,  $MP$ , y  $OP$ .

figura 8



### Solución

Comenzamos por determinar la tensión de la barra  $MN$ , por lo cual, sustituimos la barra en cuestión por las fuerzas  $T$  como se indica en la figura 8 a. Con esto el sistema se transforma en una cadena cinemática abierta de dos chapas,  $S_1$  y  $S_2$ , siendo la articulación  $A_{12}$  entre ambas, el nodo  $P$ .

Si damos un giro positivo  $\theta_1$  a  $S_1$ , entonces,  $S_2$  girará un ángulo  $\theta_2$  en sentido negativo. Las fuerzas  $T$  en los nodos  $N$  y  $M$  materializan un esfuerzo de tracción, por lo que al ser  $\theta_1 > 0$ , entonces, la variación de distancia  $\delta_{MN}$  resulta negativa, por lo que el trabajo de  $T$  será positivo, y, de acuerdo al principio de los trabajos virtuales, resulta:

$$P \cdot \eta_1 + P \cdot \eta_2 + P \cdot \eta_3 + P \cdot \eta_4 + T_{MN} \cdot (-\delta_{MN}) = 0 \quad \text{Ecuación a}$$

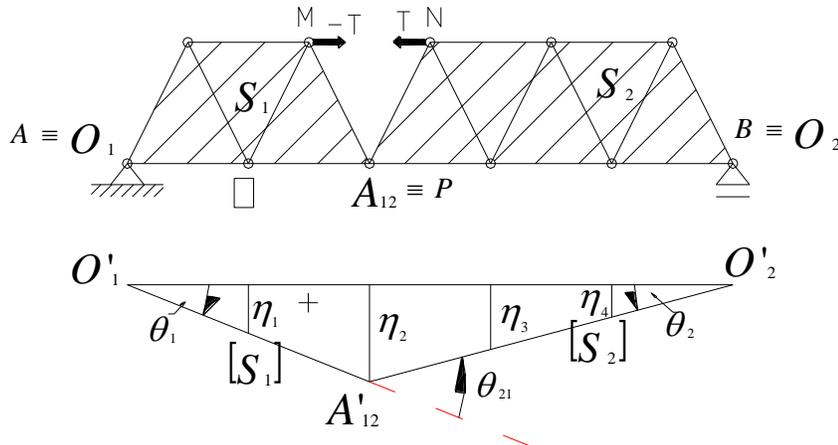
A su vez, se tiene:

$$\theta_1 \cdot \frac{2}{5}L = \theta_2 \cdot \frac{3}{5}L \quad \text{de donde} \quad \theta_2 = \frac{2}{3}\theta_1 \quad \text{Ecuación b}$$

También, se tiene:

$$\theta_{21} = -(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{5}{3}\theta_1 \quad \text{Ecuación c}$$

figura 8a



Considerando que las elongaciones  $\eta$  son:

$$\text{Ecuaciones d} \begin{cases} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{L}{5} & ; & \eta_2 = \theta_1 \cdot \frac{L}{5} \\ \eta_3 = \theta_2 \cdot \frac{2}{5}L = \frac{4}{15}\theta_1 \cdot L & ; & \eta_4 = \theta_2 \cdot \frac{L}{5} = \frac{2}{15}\theta_1 \cdot L \end{cases}$$

Y, siendo  $\delta_{MN} = \theta_{21} \cdot \frac{L}{5}$  Ecuación e

Reemplazando las ecuaciones b, c, d, y e en la ecuación a, resulta:

$$P \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{5} + 2\theta_1 \cdot P \cdot \frac{L}{5} + \frac{4}{15}P \cdot \theta_1 \cdot L + \frac{2}{15}P \cdot L \cdot \theta_1 + T_{MN} \cdot \left( \frac{5}{3}\theta_1 \cdot \frac{L}{5} \right) = 0 \quad \text{Ecuación f}$$

De la ecuación f, surge:  $T_{MN} = -3P$ . Con lo que se observa que el sentido del esfuerzo es contrario al asignado. En consecuencia, la barra  $T_{MN}$  está solicitada a compresión.

A continuación, determinamos el esfuerzo de la barra **OP**. Para ello, sustituimos la barra **OP** en cuestión, reemplazándola por dos fuerzas opuestas **T** y **-T** materializando un esfuerzo de tracción, como se indica en la figura 8b.

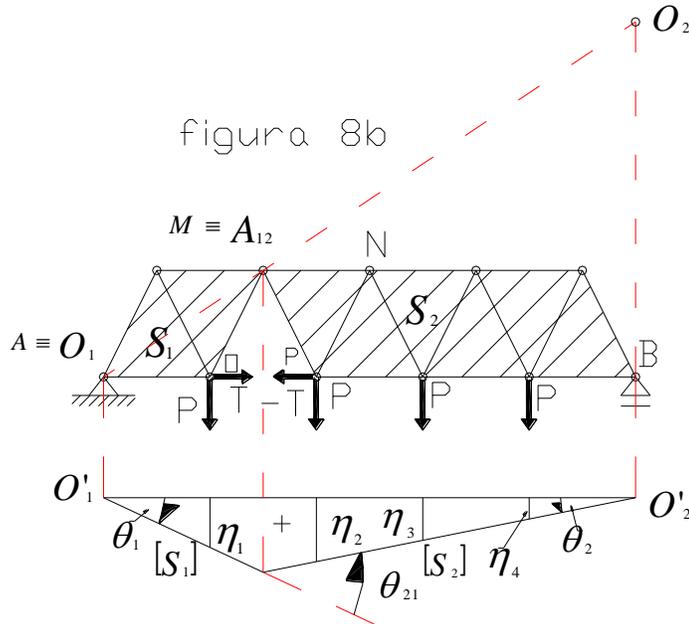
Una vez sustituida esta barra, el sistema se transforma en una cadena cinemática abierta de chapas  $S_1$  y  $S_2$  articuladas en  $A_{12}$  correspondiente con el nudo **M**.

Luego de esto, se confiere un giro  $\theta_1$  alrededor de  $O_1$  a  $S_1$ , y  $S_2$  girará  $\theta_2$  alrededor de  $O_2$ . De la figura 8b, se obtiene:

$$\theta_1 \cdot \left( \frac{L}{5} + \frac{L}{10} \right) = \theta_2 \cdot \left( \frac{3}{5}L + \frac{L}{10} \right) \text{ de aquí surge } \theta_2 = \frac{3}{7}\theta_1 \text{ Ecuación g}$$

Y, también:

$$\theta_{21} = -(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{10}{7}\theta_1 \text{ Ecuación h}$$



Debido a que  $\theta_1 > 0$ ,  $\delta_{MN} > 0$ , y el trabajo virtual de  $T$  resulta  $< 0$ . De acuerdo al principio de los trabajos virtuales se tiene:

$$P \cdot \eta_1 + P \cdot \eta_2 + P \cdot \eta_3 + P \cdot \eta_4 + T_{OP} \cdot \delta_{OP} = 0 \text{ Ecuación i}$$

Los corrimientos verticales resultan:

$$\text{Ecuaciones j} \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{L}{5} \\ \eta_2 = \theta_2 \cdot \frac{3}{5}L = \frac{9}{35}\theta_1 \cdot L \\ \eta_3 = \theta_2 \cdot \frac{2}{5}L = \frac{6}{35}\theta_1 \cdot L \\ \eta_4 = \theta_2 \cdot \frac{L}{5} = \frac{3}{35}\theta_1 \cdot L \end{array} \right.$$

A su vez, se tiene:

$$\delta_{OP} = \theta_{21} \cdot \frac{L}{5} \text{ que, reemplazando se obtiene: } \delta_{OP} = -\frac{2}{7}\theta_1 \cdot L \text{ Ecuación k}$$

Reemplazando las ecuaciones j y k en la ecuación i, resulta:

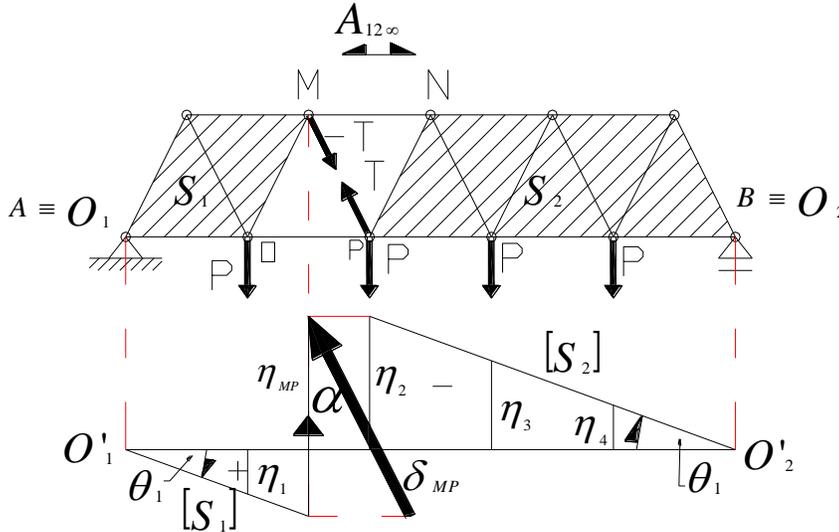
$$P \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{5} + \frac{9}{35}P \cdot L \cdot \theta_1 + \frac{6}{35}P \cdot L \cdot \theta_1 + \frac{3}{35}P \cdot L \cdot \theta_1 + T_{OP} \cdot \left( -\frac{2}{7}\theta_1 \right) \cdot L = 0 \text{ Ecuación l}$$

De la ecuación l, se despeja el esfuerzo buscado de la barra, siendo este:

$$T_{OP} = \frac{5}{2}P \text{ tracción}$$

Para determinar el esfuerzo de la barra  $MP$ , reemplazamos la barra  $MP$  por dos fuerzas opuestas  $T$  y  $-T$  materializando un esfuerzo de tracción, como indica la figura 8c. Como se observa en la figura 8c, queda formada una cadena abierta de dos chapas  $S_1$  y  $S_2$  con articulación  $A_{12\infty}$  impropia.

figura 8c



De la figura 8c, se observa que al darle un giro positivo  $\theta_1$  a  $S_1$  alrededor de  $O_1$ . Como consecuencia de la articulación impropia  $A_{12\infty}$ ,  $S_2$  tendrá una traslación paralela a  $S_1$ , con lo que el diagrama de corrimientos verticales resultará con  $[S_1]$  paralela a  $[S_2]$ .

De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, se tiene:

$$P \cdot \eta_1 + P \cdot \eta_2 + P \cdot \eta_3 + P \cdot \eta_4 + T_{MP} \cdot (-\delta_{MP}) = 0 \quad \text{Ecuación m}$$

Como  $\theta_1 > 0$ , entonces  $\delta_{MP} < 0$

A su vez,  $\delta_{MP} = \frac{\eta_{MP}}{\cos \alpha}$  Ecuación n

De la figura 8c, se obtiene:

$$\eta_{MP} = \theta_1 \cdot \left( L - \frac{L}{10} \right) = \frac{9}{10} \theta_1 \cdot L \quad \text{Ecuación o}$$

y, también:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{L}{5}}{\sqrt{\left(\frac{L}{5}\right)^2 + \left(\frac{L}{10}\right)^2}} = \frac{\sqrt{20}}{5} \quad \text{Ecuación p}$$

Las ordenadas de los corrimientos verticales quedan:

$$\text{Ecuaciones q} \begin{cases} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{L}{5} \\ \eta_2 = -\frac{3}{5} \theta_1 \cdot L \\ \eta_3 = -\frac{2}{5} \theta_1 \cdot L \\ \eta_4 = -\theta_1 \cdot \frac{L}{5} \end{cases}$$

Reemplazando el resultado  $p$  en  $n$ , y luego la ecuación  $o$  en la  $n$ , a continuación, estas en la ecuación  $m$ , resulta:

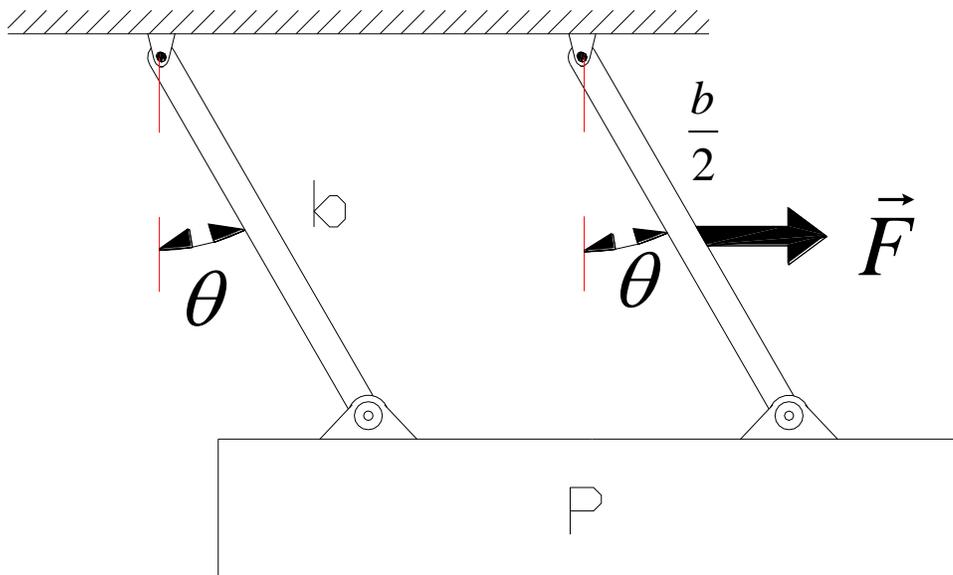
$$P \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{5} - P \cdot \theta_1 \cdot \frac{3}{5} \cdot L - P \cdot \theta_1 \cdot \frac{2}{5} L - P \cdot \theta_1 \cdot \frac{L}{5} + T_{MP} \cdot \left( \frac{\theta_1 \cdot \frac{9}{10} L}{\frac{\sqrt{20}}{5}} \right) = 0 \quad \text{Ecuación r}$$

De la ecuación  $r$ , se obtiene:

$$T_{MP} = \frac{2\sqrt{20}}{9} P \quad \text{Esfuerzo de tracción}$$

**Problema n.º 10:** El peso  $P$  de la figura 10 está suspendido de dos barras paralelas articuladas de peso despreciable. Determinese el ángulo de equilibrio  $\theta$  que alcanzan las barras bajo la acción de una fuerza horizontal  $F$  aplicada en el punto medio de una de ellas.

figura 10

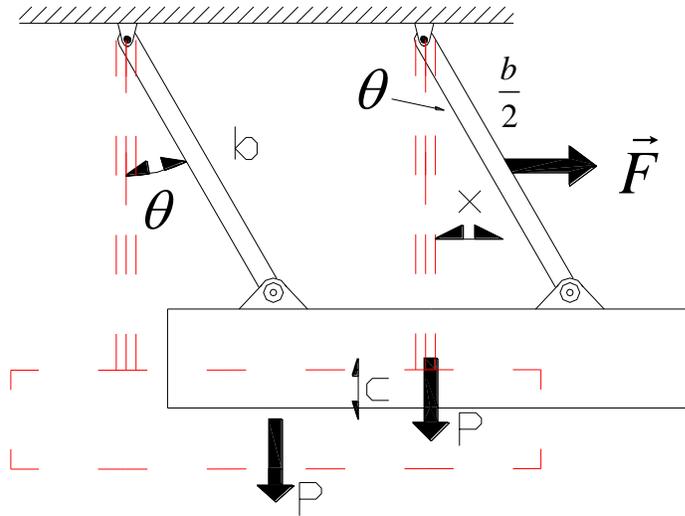


**Solución**

## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Al desplazarse la fuerza  $F$  una magnitud infinitésima  $x$ , las barras girarán un ángulo infinitésimo  $\theta$ , y  $P$  se desplazará una distancia  $c$ , en su propia dirección, según se muestra en la figura 10 a.

figura 10a



Siendo los desplazamientos  $c$  y  $x$  de  $P$  y  $F$  respectivamente, de la siguiente forma:

$$\text{Ecuaciones a} \begin{cases} c = b - b \cdot \cos \theta = b(1 - \cos \theta) \\ x = \frac{b}{2} \sin \theta \end{cases}$$

y los diferenciales de estos desplazamientos son:

$$\text{Ecuaciones b} \begin{cases} \delta c = b \cdot \sin \theta \cdot \delta \theta \\ \delta x = \frac{b}{2} \cos \theta \cdot \delta \theta \end{cases}$$

Para un desplazamiento  $\delta x$  positivo, corresponde un desplazamiento  $\delta c$  negativo, según la geometría del sistema. Por tanto, de acuerdo al principio de los trabajos virtuales, se exige que el trabajo total de todas las fuerzas exteriores activas sea nulo. Por consiguiente, resulta:

$$\vec{F} \cdot \delta x + \vec{P} \cdot \delta c = 0 \quad \text{Ecuación c}$$

Reemplazando las ecuaciones b en la ecuación c, resulta:

$$\vec{F} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos \theta \cdot \delta \theta - \vec{P} \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \delta \theta = 0 \quad \text{Ecuación d}$$

Luego de reducir la ecuación d, se obtiene:

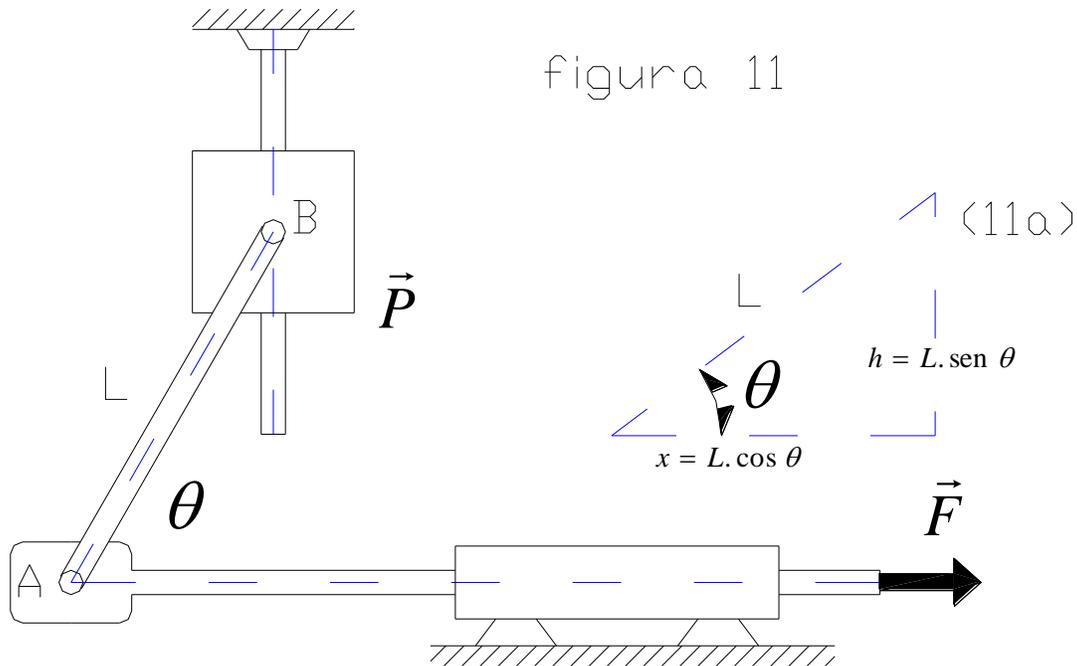
$$\text{tg } \theta = \frac{\vec{F}}{2\vec{P}} \quad \rightarrow \quad \theta = \text{arc tg } \frac{\vec{F}}{2\vec{P}}$$

Siendo  $\theta$  el ángulo buscado.

**Problema n.º 11:** La posición del peso  $P$  de la figura 11 está gobernada por la biela  $AB$ , unida en su parte inferior al vástago de un cilindro hidráulico fijo. Determinar la fuerza  $F$  que se deberá ejercer en el

vástago del émbolo del cilindro para mantener el peso en una posición particular bajo un cierto ángulo  $\theta$ , despreciando el rozamiento.

figura 11



**Solución**

El peso  $P$  se desplazará a lo largo de  $h$ , y la fuerza  $F$  los hará a lo largo de  $x$ . Esta situación queda indicada en la figura 11 a. Los diferenciales de estos desplazamientos son:

$$\text{Ecuaciones a} \begin{cases} \delta_x = -L \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta \\ \delta_h = L \cdot \text{cos } \theta \cdot \delta_\theta \end{cases}$$

De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, corresponde la siguiente ecuación:

$$\vec{F} \cdot \delta_x + \vec{P} \cdot \delta_h = 0 \quad \text{Ecuación b}$$

siendo los diferenciales de los desplazamientos:

$$\text{Ecuaciones c} \begin{cases} \delta_x = -L \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta \\ \delta_h = L \cdot \text{cos } \theta \cdot \delta_\theta \end{cases}$$

Reemplazando las ecuaciones c en la ecuación b, resulta:

$$-\vec{F} \cdot L \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta + \vec{P} \cdot L \cdot \text{cos } \theta \cdot \delta_\theta = 0 \quad \text{Ecuación d}$$

De la ecuación d, surge el valor de la fuerza solicitado.

$$\vec{F} = \vec{P} \cdot \text{cotg } \theta$$

**Problema n° 12:** En la figura 12 se indica un mecanismo que sirve para conducir un peso  $P$  en dos guías verticales. Determinese el valor de la fuerza  $F$  necesaria para soportar  $P$  a un valor cualquiera  $h$ .

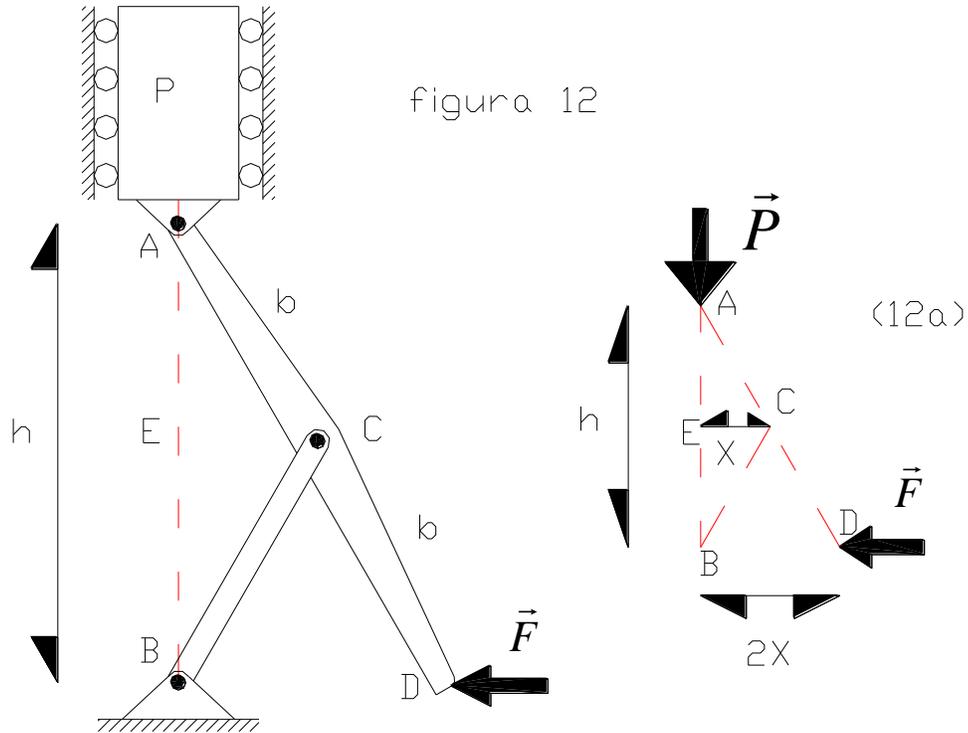


figura 12

**Solución**

El punto C se desplaza en la dirección X, lo mismo que la fuerza F, pero, según una magnitud 2X mientras que el vector representativo de P se desplaza en la dirección h, como indica la figura 12 a.

Podemos expresar X de la siguiente forma:

$$X = \sqrt{b^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} \quad \text{Ecuación a}$$

Y los desplazamientos diferenciales son:

$$\text{Ecuaciones b} \left\{ \begin{array}{l} \delta_h \\ \delta_x = -\frac{1}{4\sqrt{b^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}} \cdot h \cdot \delta_h \end{array} \right.$$

De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, se tiene:

$$\vec{F} \cdot 2 \cdot \delta_x + \vec{P} \cdot \delta_h = 0 \quad \text{Ecuación c}$$

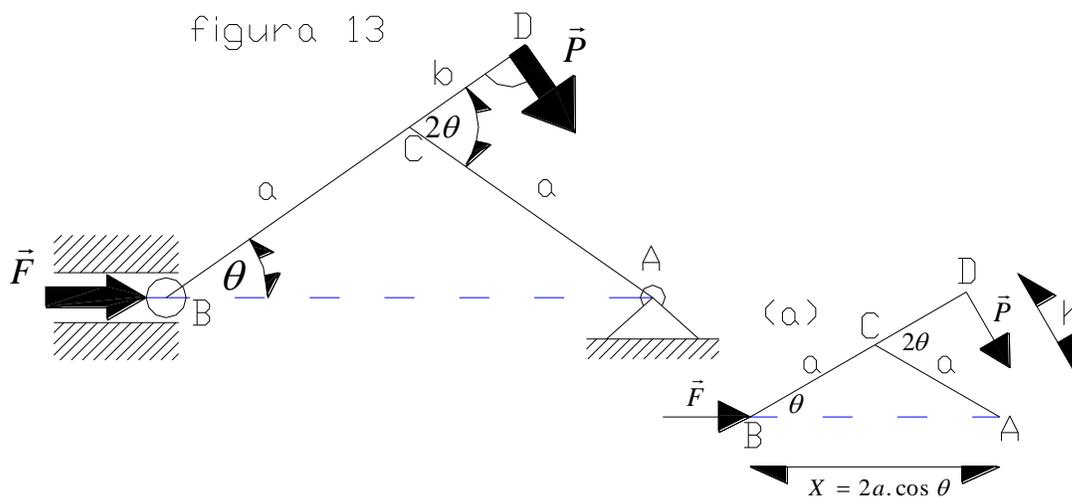
Reemplazando las ecuaciones b en la ecuación c, resulta:

$$-\frac{2\vec{F} \cdot h}{4\sqrt{b^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}} \delta_h + \vec{P} \cdot \delta_h = 0 \quad \text{Ecuación d}$$

De la ecuación d, surge el valor de F buscado, luego de efectuar ciertas operaciones algebraicas, resulta:

$$\vec{F} = \vec{P} \cdot \sqrt{\left(\frac{2b}{h}\right)^2 - 1}$$

**Problema n.º 13:** En el sistema mostrado en la figura 13, hay aplicada una fuerza  $P$  normal a la barra  $CD$ . Determinése la fuerza  $F$  que es necesario aplicar en  $B$  para mantener el equilibrio del sistema cuando la barra  $CD$  forma un ángulo  $\theta$  con la manivela  $AC$ .



**Solución**

Siendo las direcciones de desplazamientos de  $F$  y  $P$ , de acuerdo a la figura 13 a, respectivamente:

$$\text{Ecuaciones a} \begin{cases} X = 2a \cdot \cos \theta \\ h = b \cdot \theta + a \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta = b \cdot \theta + \frac{a}{2} \text{sen}(2\theta) \end{cases}$$

Por el principio de los trabajos virtuales, se tiene:

$$\vec{P} \cdot \delta_h + \vec{F} \cdot \delta_x = 0 \quad \text{Ecuación b}$$

Los diferenciales de los desplazamientos son:

$$\text{Ecuaciones c} \begin{cases} \delta_x = -2a \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta \\ \delta_h = (b + a \cdot \cos 2\theta) \delta_\theta \end{cases}$$

Reemplazando las ecuaciones c en la ecuación b, resulta:

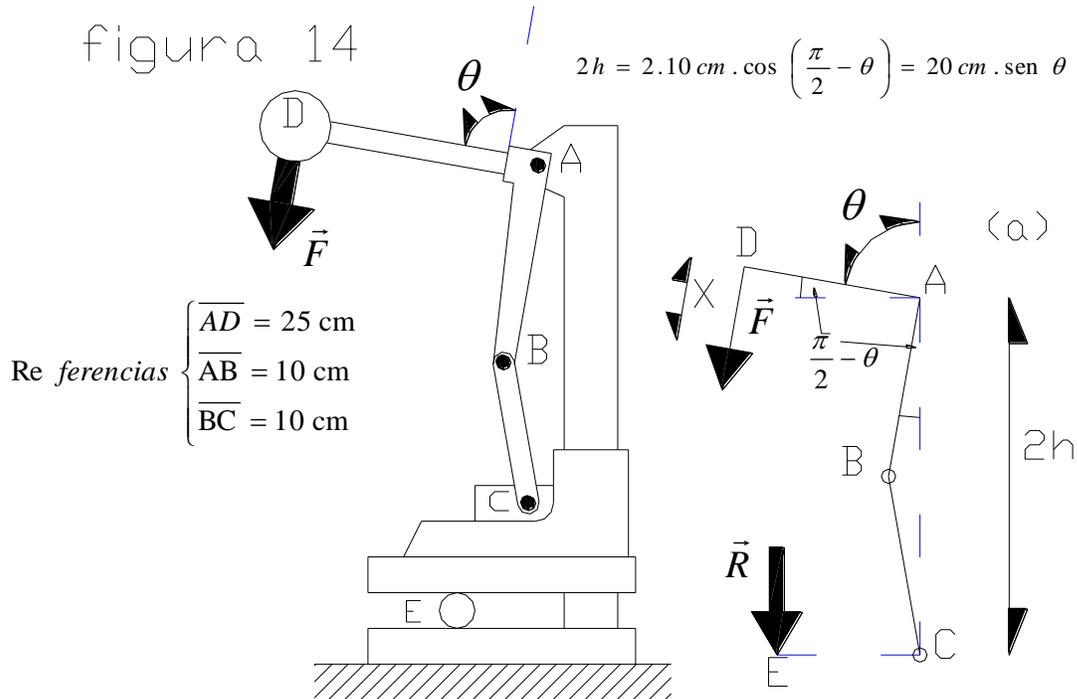
$$\vec{P} \cdot (b + a \cdot \cos 2\theta) \delta_\theta - \vec{F} \cdot 2a \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta = 0 \quad \text{Ecuación d}$$

De la ecuación d surge el valor de  $F$  necesario.

$$\vec{F} = \frac{P}{2 \cdot \text{sen } \theta} \left( \frac{b}{a} + \cos 2\theta \right)$$

**Problema n.º 14:** La figura 14 muestra una prensa que presiona un rodillo. Determinar la fuerza  $F$  que se deberá aplicar a la palanca  $D$  para obtener una compresión  $R$  del rodillo para un ángulo cualquiera  $\theta$ .

figura 14



25

Referencias

$$\begin{cases} \overline{AD} = 25 \text{ cm} \\ \overline{AB} = 10 \text{ cm} \\ \overline{BC} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

**Solución**

De la figura 13 a se obtienen las direcciones de los desplazamientos de  $F$  y  $R$  respectivamente:

Ecuaciones a

$$\begin{cases} X = 25 \text{ cm} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = 25 \text{ cm} \cdot \cos \theta \\ h = 2.10 \text{ cm} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = 20 \text{ cm} \cdot \text{sen } \theta \end{cases}$$

Los diferenciales correspondientes son:

Ecuaciones b

$$\begin{cases} \delta_x = -25 \text{ cm} \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta \\ \delta_h = 20 \text{ cm} \cdot \cos \theta \cdot \delta_\theta \end{cases}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, resulta:

$$\vec{F} \cdot \delta_x + \vec{R} \cdot \delta_h = 0 \quad \text{Ecuación c}$$

Reemplazando las ecuaciones b en la ecuación c, resulta:

$$\vec{F} \cdot (-25 \text{ cm} \cdot \text{sen } \theta \cdot \delta_\theta) + \vec{R} \cdot (20 \text{ cm} \cdot \cos \theta \cdot \delta_\theta) = 0 \quad \text{Ecuación d}$$

De la ecuación d, surge el valor de la fuerza  $F$  siguiente:

$$\vec{F} = \frac{4}{5} \vec{R} \cdot \text{cotg } \theta$$

