

Respuestas Trabajo Práctico 5. Variables aleatorias multidimensionales

Ej.1 a) $P(X > Y) = 0,0028$; $P(X = Y) = 0,9710$; $P(X < Y) = 0,0262$.

b)

| | | | |
|--------|------|------|------|
| x | 0 | 1 | 2 |
| $p(x)$ | 0,84 | 0,10 | 0,06 |

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| y | 0 | 1 | 2 |
| $p(y)$ | 0,8164 | 0,1160 | 0,0676 |

c) $E(X) = 0,22$; $E(Y) = 0,2512$; $\sigma_X = 0,54$; $\sigma_Y = 0,5686$.

d) $P(Y \leq X / X = 1) = 0,9900$; $P(Y \leq X / X \leq 1) = 0,9721$; e) $E(X - Y) = -0,0312$.

f) No son independientes.

g) $Cov(X, X) = 0,2916$; $Cov(Y, Y) = 0,3233$; $Cov(Y, X) = 0,2799$; $Corr(X, Y) = 0,9116$.

Ej.2 a) 0,15; b) 0,40; c) 0,22; d) 0,17; 0,46;

e)

| | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $P_X(x)$ | 0,19 | 0,30 | 0,25 | 0,14 | 0,12 |

| | | | | |
|----------|------|------|------|------|
| y | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P_Y(y)$ | 0,19 | 0,30 | 0,28 | 0,23 |

$E(X) = 1,7$; $E(Y) = 1,55$; $V(X) = 1,59$; $V(Y) = 1,0875$

f) No son independientes; $Cov(X, Y) = 0,695$; $Corr(X, Y) \approx 0,5285$;

g) $E[X + Y] = 3,25$; $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) = 4,0675$.

Ej.3 a)

| | | | | |
|--------|------|------|------|------|
| x | -2 | -1 | 1 | 2 |
| $p(x)$ | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 |

| | | |
|--------|-----|-----|
| y | 1 | 4 |
| $p(y)$ | 0,5 | 0,5 |

b) $E(X) = 0$; $E(Y) = 2,5$; $E(XY) = 0$; c) No son independientes ($Y = X^2$).

d)

| | | | |
|------------|------|------|------|
| $x + y$ | 0 | 2 | 6 |
| $p(x + y)$ | 0,25 | 0,50 | 0,25 |

$E(X + Y) = 2,5$ $V(X + Y) = 4,75$.

Ej.4 b)

| | | | | | | |
|-----|----------|-------|--------|--------|-------|----------|
| | | y | | | | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | $P_X(x)$ |
| | 1 | 1/4 | 1/12 | 0 | 0 | 1/3 |
| x | 2 | 3/16 | 1/8 | 1/48 | 0 | 1/3 |
| | 3 | 9/64 | 9/64 | 3/64 | 1/192 | 1/3 |
| | $P_Y(y)$ | 37/64 | 67/192 | 13/192 | 1/192 | |

c) Son independientes si $P_{XY}(x; y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) \quad \forall (x; y)$.

$P_{XY}(3; 3) \neq P_X(3) P_Y(3)$ pues $1/192 \neq 1/192 \cdot 1/3 \Rightarrow$ no son independientes.

d) $P_Y(y = 0) = 37/64 \approx 0,5781$.

e) A : es el evento que indica que aprobó el examen

$P(A) = P_{XY}(x = 1; y = 0) + P_{XY}(x = 2; y \leq 1) + P_{XY}(x = 2; y \leq 2) = 57/64 \approx 0,8906$.

f) $P_{Y|X=3}(x = 3; y = 2) = P_{XY}(x = 3; y = 2) / P_X(x = 3) = 3/64 / 1/3 \approx 0,1406$.

g) $P_{X|Y=2}(x=3; y=2) = P_{XY}(x=3, y=2) / P_Y(y=2) = 3/64 / 13/192 \approx 0,6923$.

h) $W = 10(X - Y) / X; R_W = \{0; 10/3; 5; 20/3; 10\}$

| | | | | | |
|------|------|------|-----|------|-------|
| w | 0 | 10/3 | 5 | 20/3 | 10 |
| P(w) | 7/64 | 3/64 | 1/8 | 9/64 | 37/64 |

$E(W) = 7,5; V(W) = 275/24 \approx 11,4583 \Rightarrow \sigma_W \approx 3,385$.

Ej.5 a)

| | | | | | |
|---|----|--------------------|-------------|---------------------|--------------------|
| | | y | | | P _X (x) |
| | | -3 | 0 | 2 | |
| x | -2 | 0,00 () | 0,00 () | 3/36 (11, 12) | 3/36 |
| | 0 | 3/36 (2, 3) | 6/36 (7) | 12/36 (8, 9, 10) | 21/36 |
| | 3 | 7/36 (4, 5) | 5/36 (6) | 0,00 () | 12/36 |
| | | P _Y (y) | 10/36 | 11/36 | 15/36 |

b) $P(A)=P(X>Y)=5/12; P(B)=P[(X>Y) \cup (Y>X)]=5/6; P(C)=P(X \leq 0)=2/3; P(D)=P(Y \geq 0)=13/18$.

c) 5/12; d) 23/33; e) sabiendo que el segundo jugador paga dinero, ¿cuál es la probabilidad de que el primer jugador cobre dinero? 7/10;

f) $E(X)=5/6; E(Y)=0; g) Cov(X,Y)=-2,083; Corr(X,Y) -0,628$.

Ej.6 a)

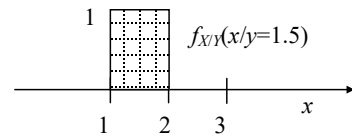
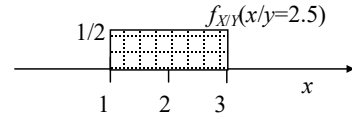
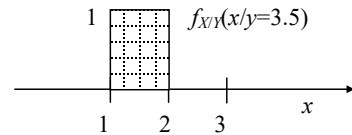
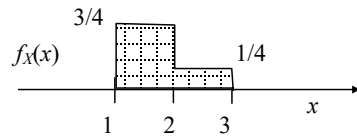
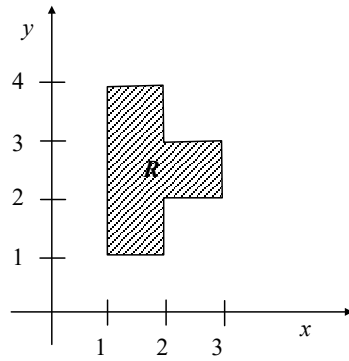
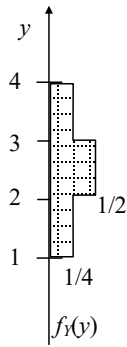
| | | | | | | |
|---|---|------------------------|-------------------------|------------------------|---------|--------|
| | | x | | | | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0 | 1,6x10 ⁻⁷ | 2,88x10 ⁻⁵ | 1,944x10 ⁻³ | 0,05832 | 0,6561 |
| | 1 | 2,56x10 ⁻⁶ | 3,456x10 ⁻⁴ | 0,015552 | 0,23328 | 0 |
| | 2 | 1,536x10 ⁻⁵ | 1,3824x10 ⁻³ | 0,031104 | 0 | 0 |
| | 3 | 4,096x10 ⁻⁵ | 1,8432x10 ⁻³ | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 4,096x10 ⁻⁵ | 0 | 0 | 0 | 0 |

b) $P(X=2; Y=1) = 0,015552; P(X=2) = 0,0486; c) P(Y=0 / X=3) = 0,20$.

d) $E(X) = 3,6; E(Y) = 0,32; W$: número de bits inaceptables $\Rightarrow E(W) = 0,08$.

e) $Cov(X,Y) = -0,2903; Corr(X,Y) = -0,8917; X$ y Y no son independientes.

Ej.9 a) 1/4; b) 0,50; 0,25; c) y d) $f_X(x) = \begin{cases} 3/4 & 1 < x < 2 \\ 1/4 & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}; f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & 1 < y < 2 \\ 1/2 & 2 < y < 3 \\ 1/4 & 3 < y < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.



Funciones de densidad marginales (c)

Funciones de densidad condicionales (d)

Funciones de densidad condicionales:

$$f_{X|Y}(x/y=3,5) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, f_{X|Y}(x/y=2,5) = \begin{cases} 1/2 & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, f_{X|Y}(x/y=1,5) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{e) } E_{X|Y}(X/Y=y) = \begin{cases} 1,5 & 1 \leq y < 2 \vee 3 \leq y \leq 4 \\ 2 & 2 \leq y \leq 3 \\ \text{fuera de consideración} & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ej.10 a) $f_X(x) = 2(1-x)$ con $0 \leq x \leq 1$; $f_Y(y) = 2y$ con $0 \leq y \leq 1$; nula en otros casos.

b) No son independientes; c) 1/3; d) 1/4; e) 2/3; f) 1/3; g) 1/2; h) 1/4; i) 1/3; j) 1/2.

Ej.11. a) 0,40; b) 0,50; c) 0,045; d) 8/9; e) 0,596575

Ej.12. a) $E(X) = 3/4 = 0,75$; $E(Y) = 2/3 \approx 0,6667$; b) $f_{X,Y}(x \geq 0,5; y \geq 0,5) = 21/32 = 0,65625$.

c) A: evento de encontrarse si cada uno de ellos espera a lo sumo 15 minutos.

$$P(A) = 37/64 \approx 0,5781.$$

La región asociada con el evento A es el polígono cerrado formado por los vértices:

(0;0);(1/4;0);(1;3/4);(1;1);(3/4;1) y (0;1/4).

d) $E(|x-y|) = 1/4 = 0,25$.

$$\text{Ej.13. a) } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x;y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \rightarrow f_{X,Y}(x;y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P(X \leq 1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632121$; $P(Y \leq 1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632121$;

c) $P(X+Y \leq 2) = 1 - 3e^{-2} \approx 0,593994$

d) $P(1 \leq X+Y \leq 2) = (1 - 3e^{-2}) - (1 - 2e^{-1}) = 2e^{-1} - 3e^{-2} \approx 0,32975$.

$$\text{e) } F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} - te^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \text{ Derivando, } f_T(t) = \begin{cases} te^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ej.14. a) $f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ $x \geq 0$; $f_Y(y) = e^{-y}$ $y \geq 0$; b) no son independientes; c) 0,00082625.

d) $P(X \geq 2 \wedge Y \geq 2 / X \geq 1 \wedge Y \geq 1) = \frac{2}{3e^4} = 0,0122104$; e) $P(0 < X < 1 / Y = 0,5) = 0,393469$.

Ej.15. **a)** 0,0625; **b)** 0,4140625; **c)** $f_{Y/X}(y/x) = \frac{2y+2x}{1+2x}$ con $0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1$, nula en otro caso;

d) $E_{Y/X}(Y/x) = \frac{2+3x}{3+6x}$ $0 \leq x \leq 1$, nula en otro caso.

Ej.16. **a)** $\begin{pmatrix} 17/9 & -1/27 \\ -1/27 & 13/162 \end{pmatrix}$; **b)** -0,0951; **c)** $f(Y/X) = \frac{2(x+y)}{2x+1}$; $P(Y > 1/2 / X = 1) = \frac{7}{12}$.

d) $E(Y/X) = (3x+2)/(6x+3)$.

Ej.17. **a)** 0,1314; **b)** 0,0000; **c)** i. 1,088 litros; ii. 0,07%; iii. -0,903; **d)** i. 2581,5 g; ii. 11,31%.