UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

LABORATORIO DE FÍSICA I

TRABAJO DE LABORATORIO

PÉNDULO FÍSICO

2019

TRABAJO PRÁCTICO: PÉNDULO FÍSICO

Objetivos:

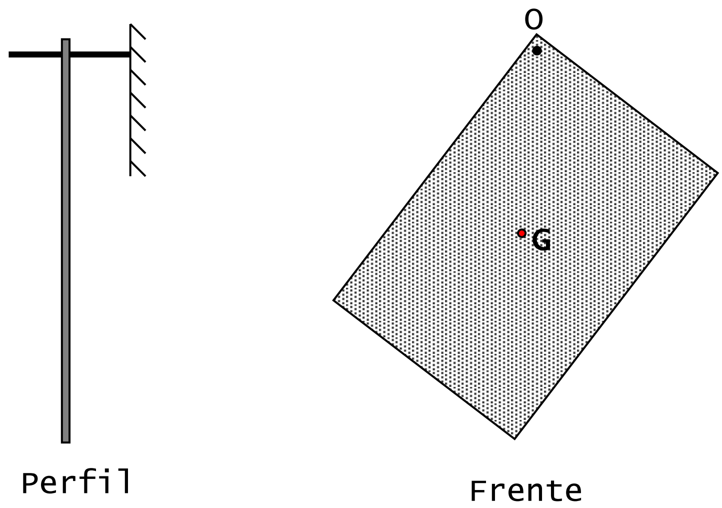
1. Determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo, y verificar ese valor con el calculado por fórmula.
2. Determinar experimentalmente el valor del radio de giro para un péndulo físico.
3. Analizar la relación entre la distancia a cada punto de suspensión y el período correspondiente.
4. Determinar experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad local.

MATERIALES:

1. Cuerpo regular de masa conocida.
2. Papel afiche blanco - cinta adhesiva - agitador plástico para café.
3. Barrera infrarroja con soporte – Interfase SPARKLINK. – Software CAPSTONE - Computadora.
4. Plomada.
5. Regla larga.
6. Balanza electrónica.
7. Material de dibujo.

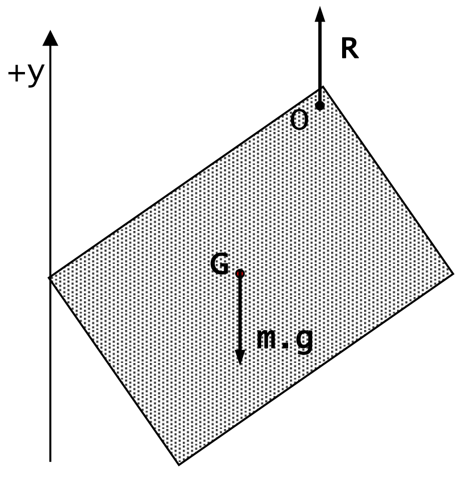
INTRODUCCIÓN TEÓRICA:

Consideremos una chapa delgada que se encuentra sostenida por un eje perpendicular a su superficie, y que puede oscilar libremente y sin fricción alrededor de él, tal y como muestra el dibujo.



Si apartamos a la chapa de su posición de equilibrio y luego la liberamos, en el instante en que la dejemos suelta comenzará a oscilar.

Las fuerzas actuantes sobre ella en el instante en que comienza a moverse pueden esquematizarse como muestra el dibujo, siendo *R* la reacción del eje sobre la chapa y el producto *mg* el peso de esta.



Como la chapa no sufre traslación alguna, en virtud de la 2ª Ley de Newton podemos escribir que:

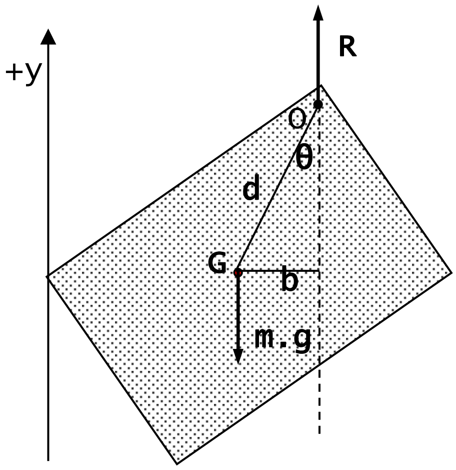
$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{R} - m\vec{g} = 0}$$

Pero comenzará un movimiento oscilatorio alrededor del eje *O*, por lo que el momento recuperador responsable lo podemos escribir como:

$$\boxed{\sum M_F^O = I_O\,\alpha}$$

Siendo I_0 el momento de inercia de la chapa con respecto al eje que pasa por *O*, y α la aceleración angular.

Como el momento recuperador respecto del punto de suspensión puede calcularse como $\sum M_F^0 = -mgb$, la ecuación correspondiente a la dinámica de rotación nos quedará:



$$-m\vec{g}\times b = I_0\alpha \Rightarrow \; -mg\times d\times sen\theta = I_0\alpha$$

Como $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ nos queda:

$$-mg\times d\times sen\theta = I_0\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ecuación que trabajada convenientemente nos quedará:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_0}\times sen\theta = 0}$$

Esta ecuación diferencial da un marco matemático a la oscilación de la chapa, pero no permite asociar este movimiento con el modelo correspondiente a un Movimiento Armónico Simple.

Sin embargo, si consideramos que para pequeñas amplitudes angulares ($\theta \leq 12º$) $sen\theta \cong \theta$ podemos aproximar en la ecuación diferencial de manera que nos quede:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_0}\times\theta = 0} \quad (1)$$

Que responde al modelo matemático de un Movimiento Armónico Simple.

Un cuerpo en oscilación como un péndulo físico entonces, **SE COMPORTA APROXIMADAMENTE COMO UN M.A.S. SOLAMENTE PARA PEQUEÑAS AMPLITUDES**, por lo que el modelo que vamos a estudiar debe limitarse a esta condición principal.

Considerado entonces el movimiento como un M.A.S., podemos escribir la ecuación horaria para la posición angular como:

$$\theta = \theta_0.sen(\omega.t+\delta) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \theta_0.\omega.\cos(\omega.t+\delta) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\theta_0.\omega^2.sen(\omega.t+\delta)} \; (2)$$

Reemplazando en (1), por (2) la ecuación quedará:

$$-I.\theta_0.\omega^2.sen(\omega.t+\delta) + m.g.d.\theta_0.sen(\omega.t+\delta) = 0$$

La que será cero cuando $sen(\omega t+\delta) = 0$, ó cuando $-I.\omega^2 + m.g.d = 0$

De esta última solución, podemos deducir que:

$$I_0 = \frac{m.g.d}{\omega^2} \therefore I_0 = \frac{m.g.d.T^2}{4\pi^2}$$

Despejando T:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{m.g.d}}}$$

Expresión que nos permite calcular el período de oscilación de un péndulo físico.

Ya que el péndulo oscila alrededor de un eje que no coincide con el eje principal de inercia, aplicando el teorema de Steiner en la expresión anterior, resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + m.d^2}{m.g.d}} \quad (3)$$

Por otra parte, cualquiera sea la forma del cuerpo, siempre se puede encontrar una distancia al eje dado, a la cual se puede considerar concentrada toda la masa sin que se modifique por ello su momento de inercia. A esta distancia se la llama ***radio de giro*** (ρ) del cuerpo respecto a un eje dado.

Determinando entonces el momento de inercia respecto al eje principal, en función del radio de giro, la expresión resultará: $\mathbf{I_{CM} = m.\rho^2}$, con lo que el momento de inercia respecto del eje que pasa por O:

$\mathbf{I = m.d^2 + m.\rho^2}$**.** Reemplazando en (3):

$$T = 2.\pi\sqrt{\frac{\rho^2 + d^2}{g.d}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\rho^2}{d} + d}{g}} \quad (4)$$

Una de las propiedades que posee ρ, es que <u>el período T del péndulo es mínimo cuando</u> $\mathbf{d = \rho}$**.** Trazando una circunferencia de radio ρ, y centro en G, todos los puntos de ésta nos darán puntos de suspensión donde T posea el mínimo valor para ese péndulo.

Desarrollo:
PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO:

En el laboratorio encontrará un cuerpo regular, que puede ser, por ejemplo, chapa plástica perforada cortada con forma de rectángulo, o una regla plástica con agujeros a intervalos regulares; este será el cuerpo que utilizará como péndulo físico.

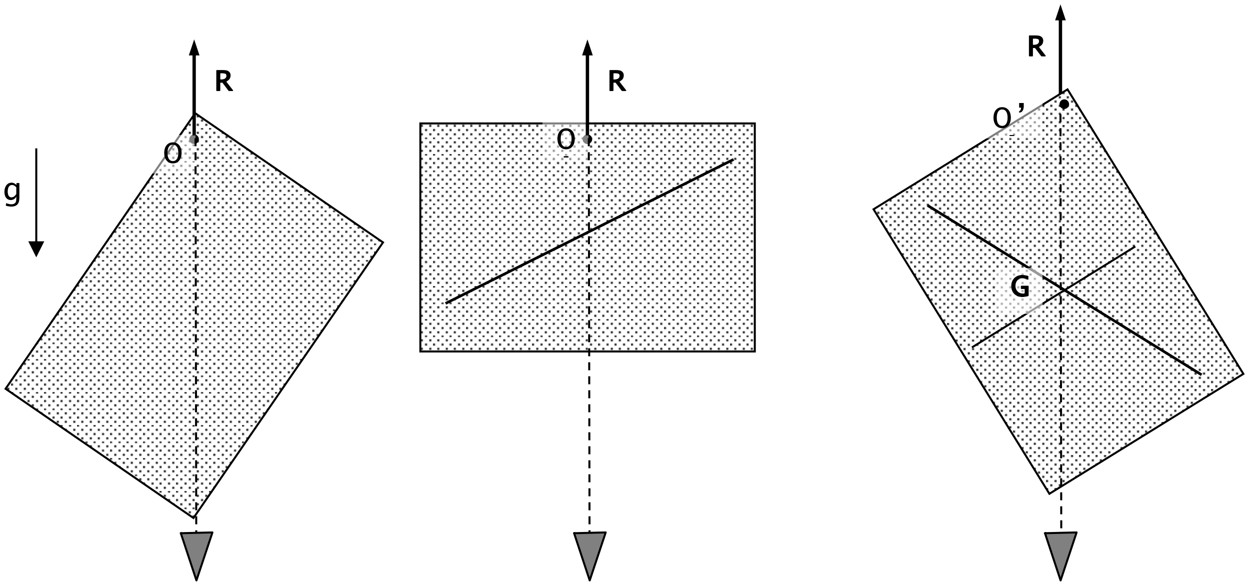
Utilizando la cinta métrica, mida los lados del cuerpo anotando sus valores con la correspondiente incerteza. Discuta con sus compañeros cuál es el mejor criterio por adoptar para tomar estos datos; una vez puestos de acuerdo, no olvide anotar esto en el informe posterior.

Lado a = (±) cm	Lado b = (±) cm

Mida la masa del péndulo con la balanza, anotando el valor correspondiente con su incerteza.

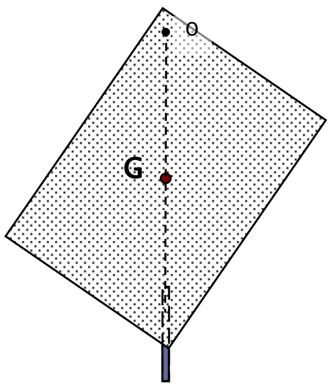
masa = (±) kg

Cuelgue el cuerpo del soporte, y del mismo sitio sujete la plomada, tal y como muestra el dibujo.



Marque sobre el mismo la línea que determina el hilo de la plomada.

Repita esta operación a partir de distintos puntos de sujeción: en la zona en que se corten estas líneas estará el centro de gravedad (G) del cuerpo[1].



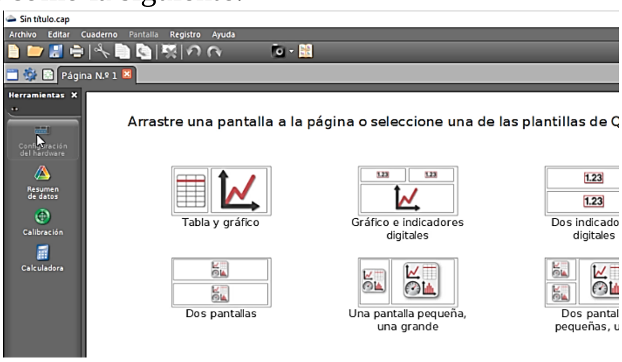
Tome el agitador plástico para café y, eligiendo una de las líneas marcadas para la determinación del centro de gravedad, pegue con cinta adhesiva el mismo, orientándolo según esta dirección, tal y como muestra el esquema.

Vamos ahora a configurar el software para tomar los períodos de oscilación con la barrera infrarroja:

a) Encienda la PC y conecte la interfase SPARKLINK a un puerto USB. Verifique que la barrera infrarroja se encuentre conectada correctamente a la interfase a través del conversor analógico - digital[2].

1 Interfase SPARKLINK

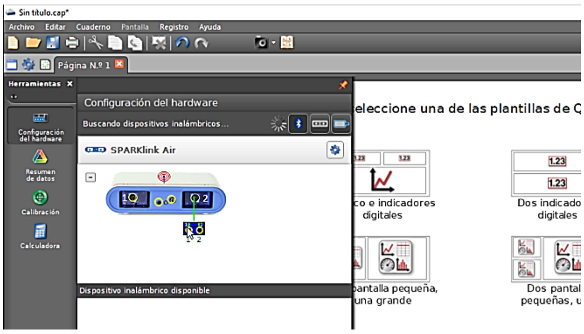
b) Inicie el software CAPSTONE en la PC. Se le abrirá una pantalla como la siguiente:



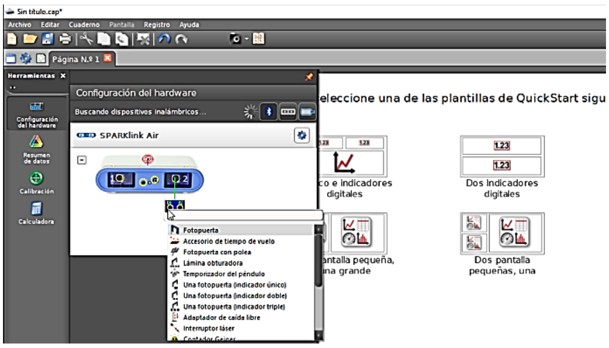
c) Cliquee en el ícono que se encuentra arriba a la izquierda, y que tiene como rótulo "Configuración de hardware", se desplegará una pantalla donde aparezca la imagen de la interfase junto con lo que el programa detecte conectado.

[1] *En el caso de la chapa plástica, o la regla graduada, el centro de gravedad puede ubicarse directamente en el centro geométrico del cuerpo, sin necesidad de ejecutar entonces estos pasos.*

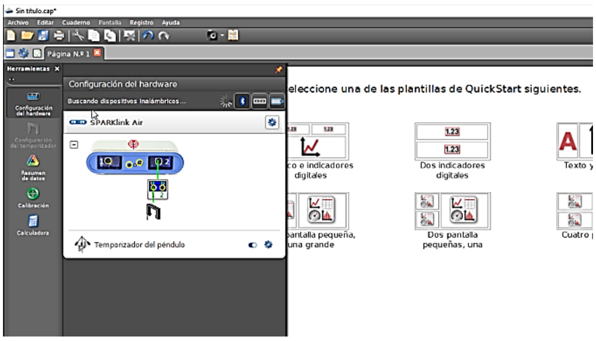
[2] *La barrera infrarroja es un sensor analógico, y por lo tanto requiere de un conversor para funcionar correctamente por intermedio de la interfase. Consulte con su docente en caso de advertir alguna anomalía.*



d) Verá que lo que CAPSTONE reconoce es el conversor analógico-digital. La barrera conectada a él deberá detectarse manualmente. Observe en cuál de los dos puertos del conversor se encuentra conectada físicamente el sensor (en nuestro ejemplo se encuentra en el puerto nº 1) y cliquee en la pantalla sobre ese puerto. Se le desplegará un menú con la lista de sensores que pudiere tener conectados. Elija de esa lista “Temporizador de péndulo”:



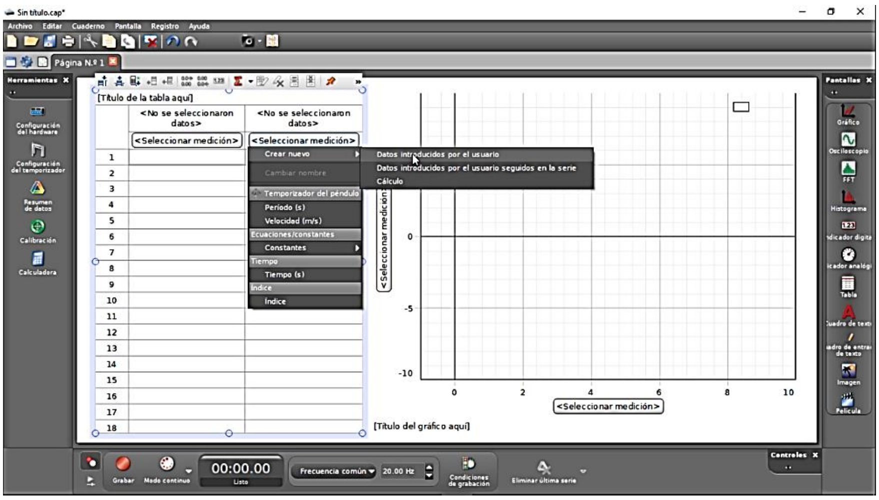
Aparecerá entonces el ícono de la barrera unida al conversor mediante una línea verde; esta línea indica que se ha detectado la conexión y que funciona correctamente[3].



Cliquee nuevamente sobre “Configuración de hardware y la ventana se cerrará.

e) En la pantalla que se muestra ahora, verá una serie de opciones para abrir la ventana de trabajo. Cliquee sobre el ícono superior izquierdo que tiene el rótulo “Tabla y gráfico”. Aparecerá ahora en la pantalla una ventana con una tabla en la parte izquierda, y un sistema de ejes con su correspondiente cuadrícula en la parte derecha. Deberemos entonces configurar la tabla para poder ingresar los datos obtenidos experimentalmente. Comenzaremos con la columna derecha, allí grabaremos los datos de las diferentes distancias, medidas desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad del cuerpo, a las cuales pondremos a oscilar al péndulo.

f) Cliquee sobre “Seleccionar medición”. Se desplegará un menú. Elija allí: “Crear

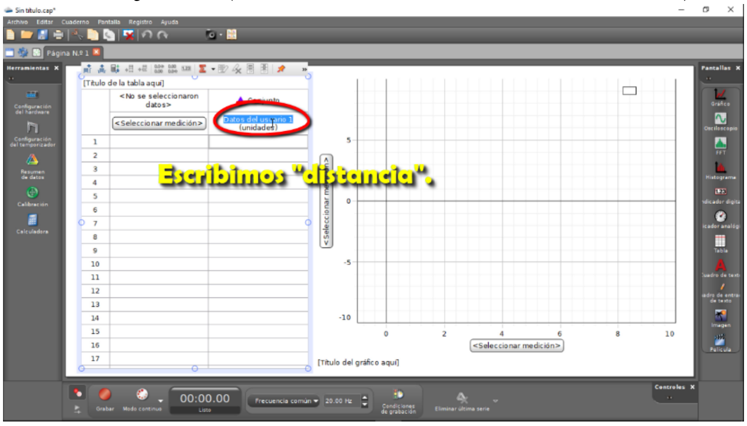


nuevo” y luego “Datos introducidos por el usuario”.

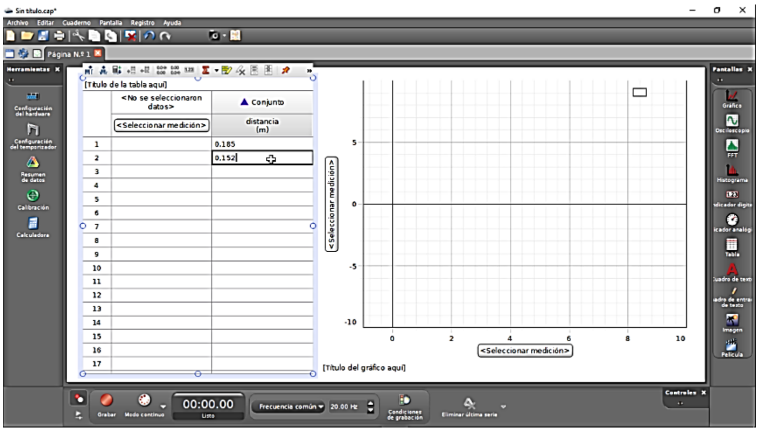
g) Se le habilitará un cuadro donde podrá poner el nombre de lo que está grabando allí. Escriba “distancia”.

[3] *Si no fuese así, la línea entre el sensor y el conversor sería roja. Si esto ocurre, consulte con su docente.*

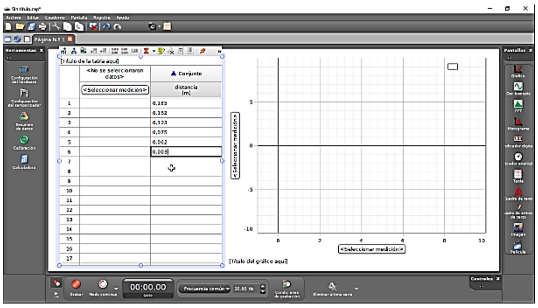
h) Para escribir la unidad, cliquee sobre “Conjunto” (arriba de donde escribió “distancia”) y elija “cambiar nombre”. Luego cliquee sobre “(unidades) y elija “cambiar nombre”. Escriba entonces la unidad en que medirá las distancias; en nuestro ejemplo, trabajamos en metros.



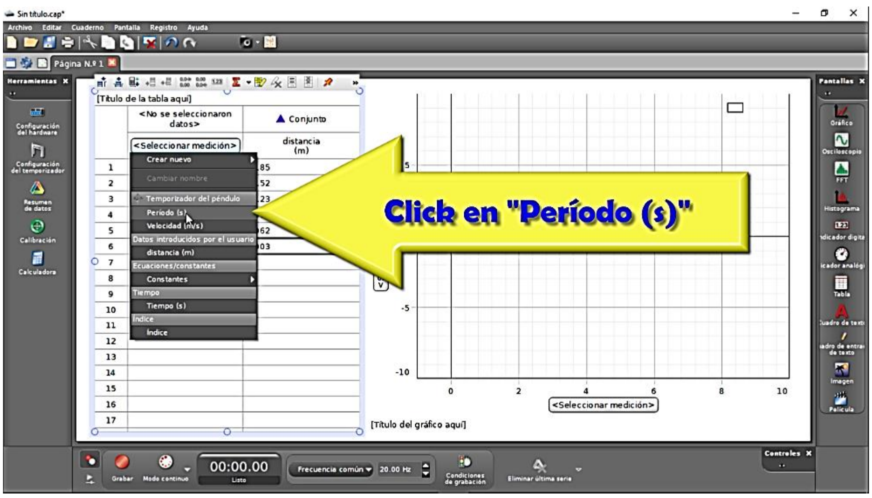
i) Ya estamos en condiciones de ingresar manualmente los valores de las diferentes distancias a las que pondremos a oscilar a nuestro péndulo. Cliquee sobre la primera casilla de la columna correspondiente, mida la distancia del punto elegido más lejano al centro de gravedad y escriba el valor de esta medición en ese casillero.



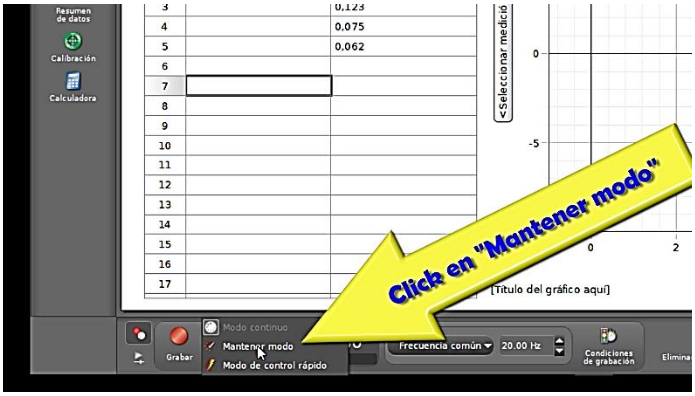
j) Mida el resto de las distancias de los futuros puntos de suspensión al centro de gravedad, y complete la tabla.



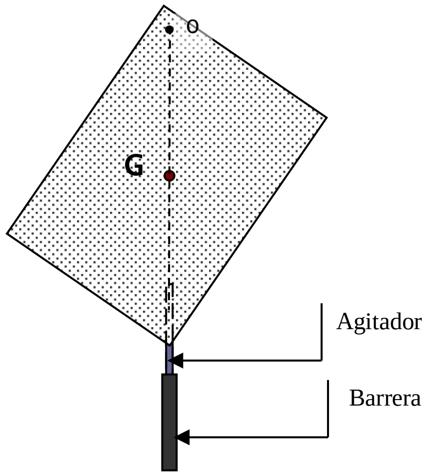
k) Configuraremos ahora la columna izquierda de la tabla. Cliquee sobre “Seleccionar medición” en la columna de la izquierda. Se le desplegará un menú; en él elegiremos la opción “Período (s)”.



l) Falta entonces elegir el modo en que introduciremos los datos tomados por intermedio del sensor, Para ello vamos a cliquear sobre el ícono que dice “Modo continuo” que se encuentra abajo a la izquierda, al lado del botón rojo de grabación y, del menú que se despliegue elegiremos “Mantener modo”. Ya estamos listos para comenzar a tomar los períodos.



m) Cuelgue el péndulo del soporte, enganchándolo del primer agujero (el más lejano al centro de gravedad) y deje que tome la posición de equilibrio. Coloque la barrera infrarroja de manera que el haz quede interrumpido; se dará cuenta de que esto ocurre porque el LED del conversor analógico – digital queda encendido.



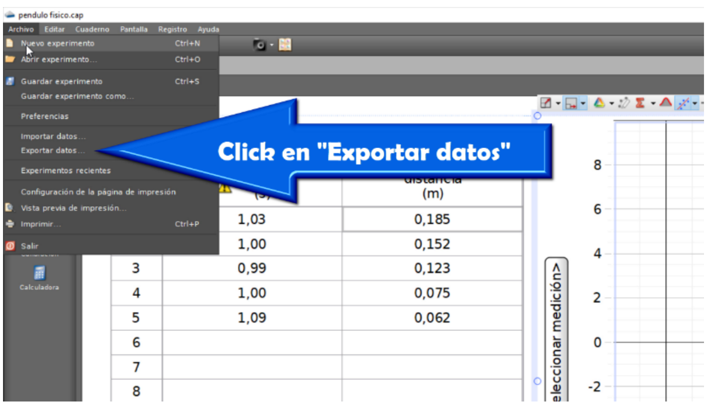
Aparte el péndulo un ángulo pequeño de su posición de equilibrio, suelte y cliqueando primero sobre la primera casilla de la columna izquierda, ponga en marcha la recolección de datos cliqueando sobre el botón inferior izquierdo que contiene un círculo rojo con la leyenda “vista previa”; el sistema comenzará a mostrar los períodos registrados por la barrera. Se dará cuenta de que el sistema en oscilación se estabilizó porque el valor que se muestre en la casilla no fluctuará. Grabe ese valor haciendo click en “mantener muestra”.

Grabado el dato, se activará la casilla inmediatamente inferior.

Cambie el péndulo a la siguiente perforación elegida, ajuste la barrera infrarroja procediendo de igual manera que antes y, poniendo a oscilar el péndulo registre el nuevo período siguiendo el mismo procedimiento.

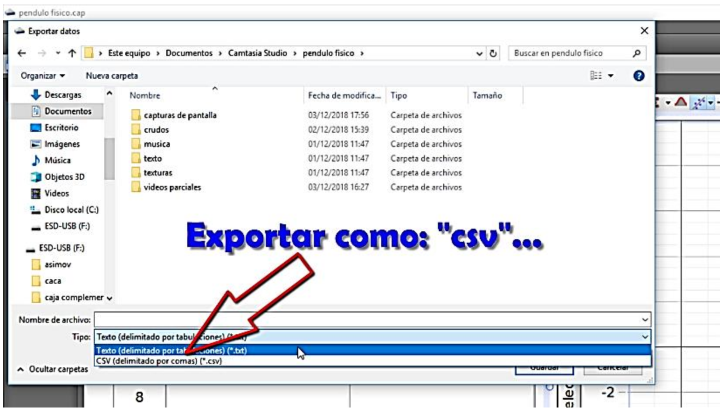
Repita los mismos pasos hasta completar el ingreso de todos los períodos correspondientes a las distancias de oscilación correspondientes.

n) Como el análisis deberemos hacerlo con Microsoft Excel®, debemos exportar los datos obtenidos en un formato compatible con este programa. Diríjase a la barra de herramientas que se encuentra en la parte superior de la ventana; a la izquierda, cliquee sobre “archivo”. Se desplegará un menú; elija “exportar datos”.



o) Se abrirá entonces una ventana en la cual podrá elegir en qué lugar quiere guardar los datos exportados. La extensión con la que graba los datos por defecto es “Texto delimitado por tabulaciones (.txt)”. Cliquee allí y de las opciones que se le presenten elija “CSV delimitado por comas (.csv)”.

Podrá luego abrirlo con Excel para hacer el análisis.



Análisis de los datos:

Determinación de la aceleración de la gravedad, el radio de giro y cálculo de I_{CM} del cuerpo.

De acuerdo con el marco teórico desarrollado anteriormente, el período de un péndulo físico, para pequeñas amplitudes puede calcularse como: $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{m \cdot g \cdot d}}}$, siendo $\boldsymbol{I_o}$ el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje que pasa por el punto de suspensión llamado en este caso "o", y $\boldsymbol{d}$ la distancia existente entre dicho punto de suspensión y el centro de gravedad del cuerpo.

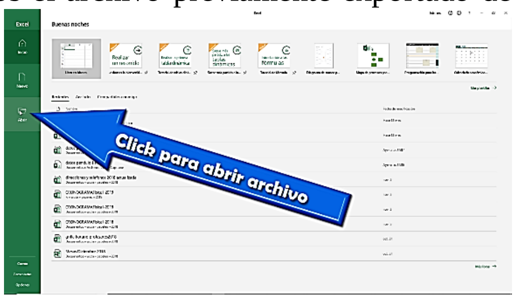
Como, de acuerdo con el teorema de Steiner, $\boldsymbol{I_o = I_{CM} + md^2}$, y a su vez, el momento de inercia con respecto al eje que pasa por su centro de masa puede calcularse como $\boldsymbol{I_{CM} = m\rho^2}$, donde ρ es el radio de giro para ese péndulo, entonces:$T = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}(\rho^2+d^2)}{\cancel{m}gd}}$, de donde, despejando convenientemente obtenemos:

$$\boldsymbol{T^2 d = \frac{4\pi^2}{g} d^2 + \frac{4\pi^2}{g} \rho^2} \ (\mathbf{5})$$

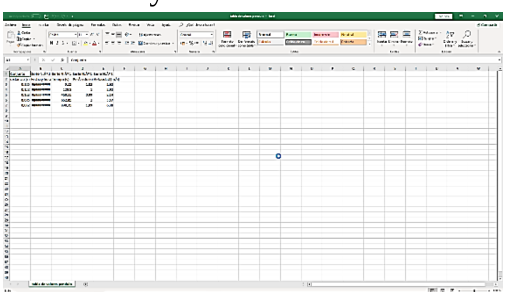
Si llamamos $\boldsymbol{x}\ a\ d^2, e\ \boldsymbol{y}\ a\ T^2 d,$ la ecuación anterior nos queda como $\boldsymbol{y = \frac{4\pi^2}{g} x + \frac{4\pi^2}{g} \rho^2,}$ la gráfica que de ella se obtenga responderá a una función lineal donde la pendiente se corresponderá con $\frac{4\pi^2}{g}$, y la ordenada al origen con $\frac{4\pi^2}{g}\rho^2$.

De la gráfica podremos obtener, por lo tanto, el valor de la aceleración de la gravedad local y del radio de giro. Para ello procederemos como sigue:

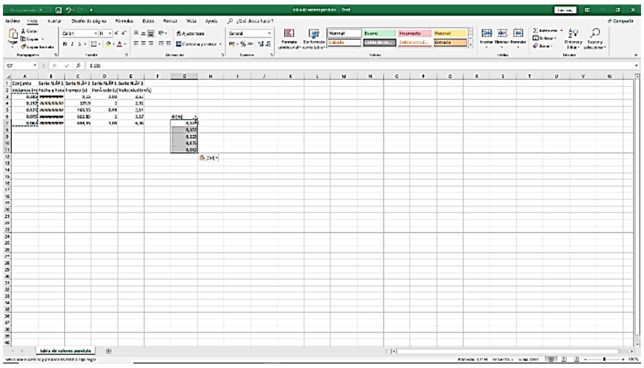
a) Iniciamos Microsoft Excel® y abrimos el archivo previamente exportado de CAPSTONE.



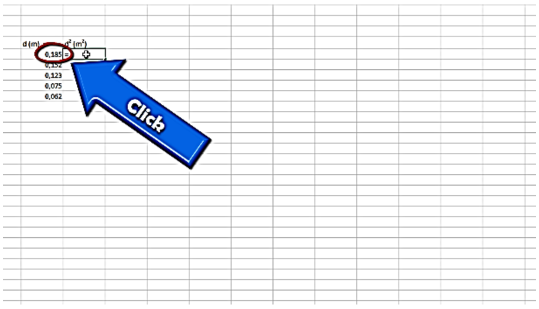
b) En la pantalla se mostrará una tabla con los datos exportados. Como El archivo abierto tiene extensión ***.csv***, Excel recomendará guardarlo primero como Libro de Excel, de manera de trabajarlo mejor. Guárdelo con esa extensión y entonces los datos mostrados se verán así:

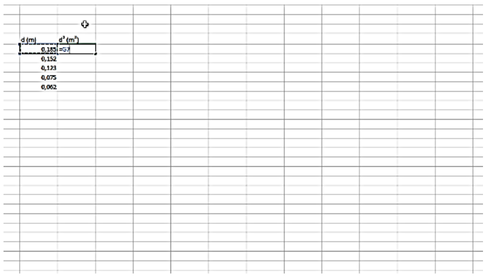


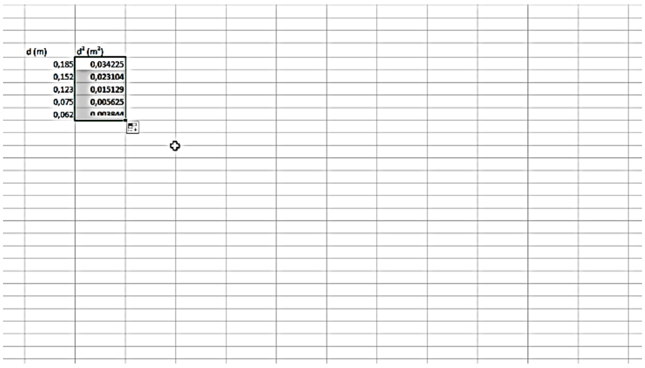
c) Configuramos la tabla con los valores a graficar. En una columna con título “***d (m)***”, copiaremos las distancias de los puntos de suspensión al centro de gravedad del péndulo, que se encuentran en la columna exportada llamada “distancia”. Para ello seleccionamos la columna y luego presionamos “***CTRL c***”; nos posicionamos directamente debajo de “***d (m)***” y presionamos “CTRL ***v***”. Se habrá copiado esta columna.



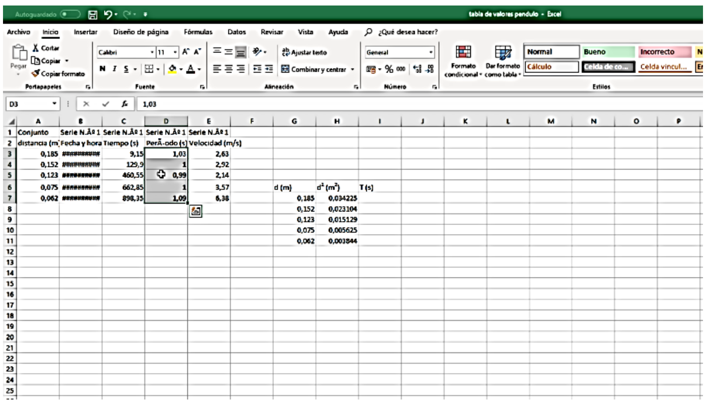
d) La siguiente columna nos servirá para grabar el cuadrado de las distancias. Le pondremos como título “***d***^{2}”. Posicionándonos en la celda inmediatamente inferior a este título presionaremos “***SHIFT =***”; en la casilla se mostrará el signo igual. Para elevar al cuadrado cada distancia, cliqueamos sobre el primero de los valores, y veremos que a continuación del igual se mostrará la ubicación de esta distancia. Para elevar al cuadrado presionamos “***SHIFT*** ^”, y luego escribimos “***2***”. Damos “***ENTER***” y aparecerá en esa casilla el valor de la primera distancia elevada al cuadrado. Cliqueamos sobre esa celda y, apoyando el puntero del mouse sobre el vértice inferior derecho de la misma, con el botón izquierdo apretado arrastramos hacia abajo. Se mostrarán todas las distancias elevadas al cuadrado.



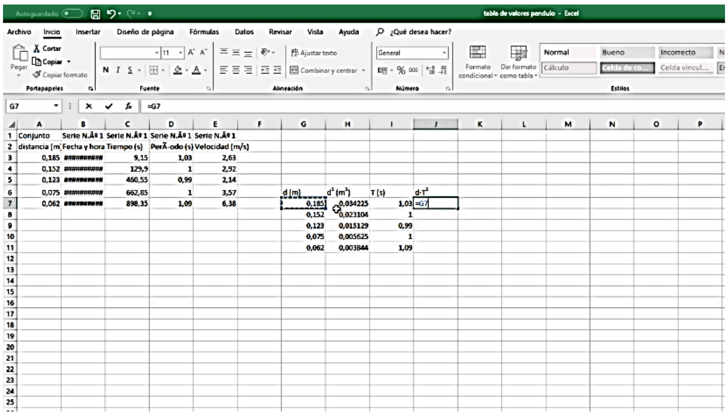




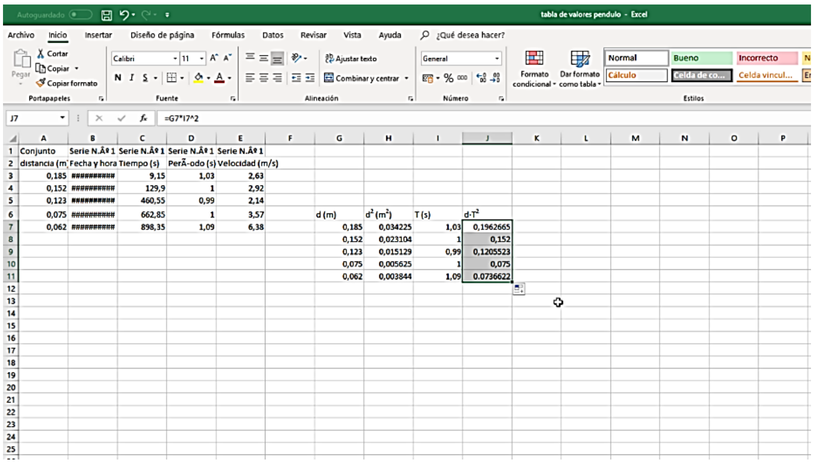
e) En la siguiente columna copiaremos los valores obtenidos de los períodos correspondientes. Escribimos como título “***T(s)***”. Repetimos el procedimiento descripto en el apartado (c) sólo que esta vez seleccionaremos la columna que muestra los períodos dentro de los datos exportados.



f) Utilizaremos la columna de al lado para mostrar los resultados de hacer la cuenta "dT^2". Escribiremos esto como título. Posicionándonos en la celda inmediatamente inferior, apretamos "***SHIFT =***" y luego cliqueamos sobre la casilla que contiene el primer valor de la distancia;

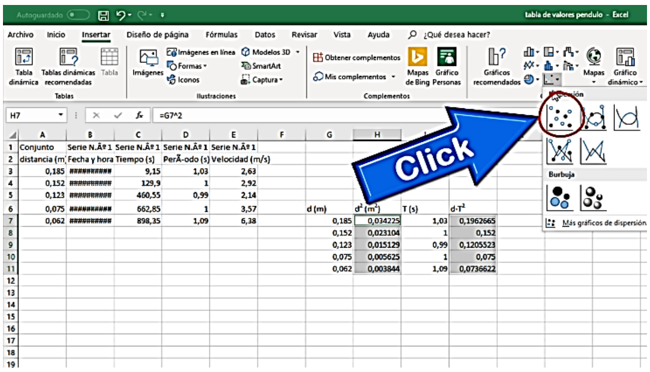


a continuación, escribimos "*****", luego cliqueamos sobre la primera casilla que contiene el dato del primer período y seguidamente "***SHIFT ^***", luego escribimos "**2**". Damos "***ENTER***" y aparecerá en esa casilla el valor de la primera distancia elevada al cuadrado. Cliqueamos sobre esa celda y, apoyando el puntero del mouse sobre el vértice inferior derecho de la misma, con el botón izquierdo apretado arrastramos hacia abajo. Todas las casillas mostrarán el resultado de hacer $\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{T}^2$ para cada uno de los pares de valores.



g) Para construir el gráfico, seleccionamos la columna que contiene a "$\boldsymbol{d}^2$" y a la columna que contiene a "dT^2" . [4]

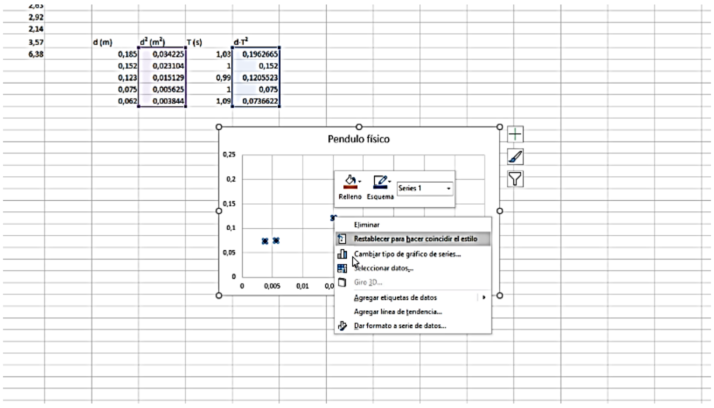
h) En la barra de herramientas de la parte superior de la pantalla, cliquear sobre "***insertar***" y en el menú que se despliegue cliquear sobre "***gráfico***"; se desplegarán una serie de opciones de gráficos que Excel puede construir; elegir "***Dispersión x-y***".

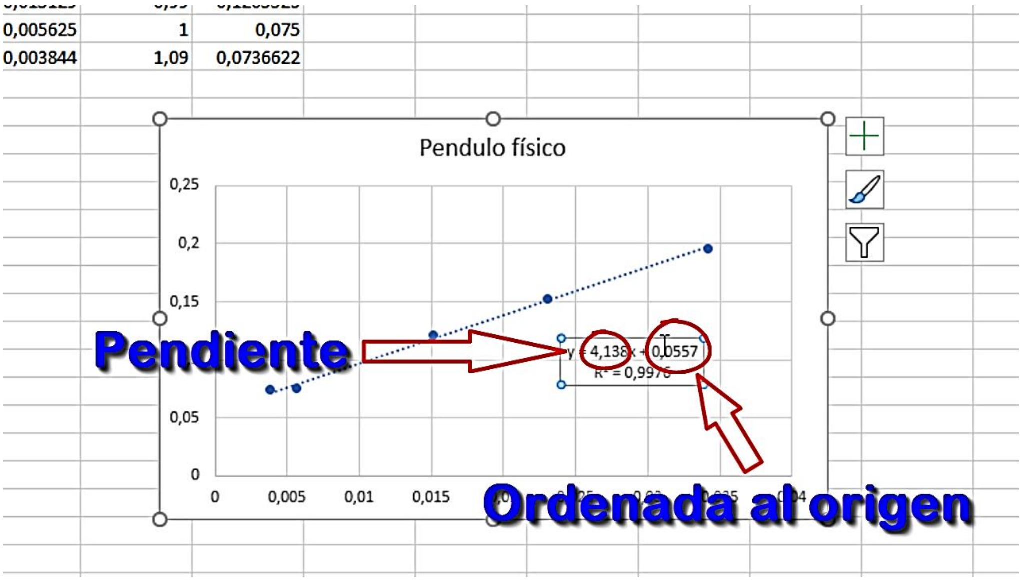


i) En la misma hoja de Excel se mostrará el gráfico. Si todo se hizo bien, se podrá

[4] *Excel, cuando construye el gráfico, toma los valores correspondientes al eje "x" como los de la primera columna, y los de la segunda columna los coloca sobre el eje "y", por lo que es* **MUY IMPORTANTE** *que las columnas se seleccionen en el* **orden correcto**.

apreciar que los puntos parecen estar alineados; el software tiene también una herramienta para análisis de gráfico. Posicionándonos en uno de los puntos representados, cliqueamos con botón derecho y del menú que se despliega elegimos "***Agregar línea de tendencia***". Al costado se abrirá una ventana con las distintas opciones de interpretación de curvas, en este caso nos quedaremos con la opción "***lineal***" por lo que tildaremos esa. Tildaremos además las casillas que tienen la leyenda "***Presentar ecuación en el gráfico***" y "***Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico***". Dando ***ENTER*** se mostrará en el área del gráfico la mejor función lineal que se ajuste a nuestra colección de puntos experimentales, junto con el valor del coeficiente de correlación "R^2". De la ecuación obtenemos entonces el valor de la pendiente de la recta, que nos permitirá calcular la aceleración de la gravedad local, y la ordenada al origen, de la cual obtendremos el radio de giro para nuestro péndulo.





Determinación la aceleración de la gravedad local:

De acuerdo con la ecuación $\boldsymbol{T^2 d = \frac{4\pi^2}{g} d^2 + \frac{4\pi^2}{g} \rho^2}$ desarrollada anteriormente, al representar gráficamente $dT^2 = f(d^2)$, obtenemos una recta cuya pendiente $\left(\frac{4\pi^2}{g}\right)$ nos permitirá calcular el valor de la aceleración de la gravedad. Tome como dato el valor de la pendiente obtenido de esta construcción gráfica y su posterior ajuste, y calcule el valor de "$\boldsymbol{g}$".

Determinación del radio de giro:

De la misma ecuación, la ordenada al origen $\left(\frac{4\pi^2}{g}\rho^2\right)$ nos permitirá calcular el radio de giro $\boldsymbol{\rho}$. Tome como dato el valor de la ordenada al origen que muestra la ecuación correspondiente al ajuste del gráfico experimental realizado con Excel, y calcule el valor del radio de giro.

Determinación del Momento de Inercia del péndulo, con respecto al eje que pasa por su centro de masa:

a) A partir de datos obtenidos experimentalmente:

Tal y como se muestra en la teoría desarrollada anteriormente, el momento de inercia baricéntrico de cualquier cuerpo, siempre se puede calcular como: $\boldsymbol{I_{CM} = m\rho^2}$. Con el valor del radio de giro obtenido en el punto anterior, determine $\boldsymbol{I_{CM}}$.

b) A partir de la expresión desarrollada en la teoría[5]:

Para una chapa rectangular, el momento de inercia correspondiente al eje que pasa por el centro de masa puede calcularse como:

$$I_{CM} = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$$

Con los valores medidos de longitud y masa, calcule el valor de I_{CM} con su correspondiente incerteza y compare con el obtenido experimentalmente; ¿son físicamente iguales?

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Reese, Ronald Lane ;"Física Universitaria"; (Editorial Thompson; México D.F.; México; 2002).
[2] Resnick, Robert; Halliday, David; Krane, Kenneth S.; "Física, volumen uno"; (Editorial CECSA; México D.F.; México; 1998).
[3] Alonso, M.; Finn, E.J.; "Física"; (Editorial Addison – Wesley Iberoamericana; Wilmington; U.S.A.; 1995).
[4] Hewitt, Paul; "Física Conceptual"; (Editorial Addison – Wesley Iberoamericana; Wilmington; U.S.A.; 1995).
[5] Roederer, Juan; "Mecánica Elemental"; (Editorial Eudeba; Buenos Aires; Argentina; 1986)
[6] Tipler, Paul; "Física"; (Editorial Reverté; Barcelona; España; 1993)
[7] Fernandez, José – Galloni, Ernesto; "Trabajos Prácticos de Física" (Centro de Estudiantes "La línea Recta" ; Buenos Aires; 1963)
[8] Gil, Salvador – Rodríguez, Eduardo; "Física Re-Creativa" (Editorial, Prentice - Hall; 2001)

RECURSOS EN INTERNET:

- http://fisicarecreativa.com/guias/pendulo2.pdf Página con un muy buen apunte sobre péndulo físico, además de una propuesta experimental para este dispositivo.
- http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/pendulo/pendulo.htm Simulación interactiva de un péndulo físico acompañada de una pequeña introducción teórica.

[5] *La deducción de la expresión que permite calcular el momento de inercia respecto al eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular al plano de la chapa, podrá encontrarla en un archivo guardado en el Campus Virtual.*