Guía de Ejercitación 7. Prueba de Hipótesis

<u>Nomenclatura</u>

H_0: Hipótesis nula. H_1: Hipótesis alternativa (o de investigación).

Los cuatro resultados posibles de las decisiones en la prueba de hipótesis:

		La verdadera situación puede ser	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Acción	No rechazar H_0	Decisión correcta	Decisión incorrecta (error de tipo II)
	Rechazar H_0	Decisión incorrecta (error de tipo I)	Decisión correcta

La probabilidad de cada uno de los cuatro resultados posibles en la prueba de hipótesis:

		La verdadera situación puede ser	
		H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Acción	No rechazar H_0	$1-\alpha$ (Nivel de confianza)	β
	Rechazar H_0	α (Nivel de significación)	$1-\beta$ (Potencia de la prueba)

Error tipo I: rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera.
Error tipo II: no rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es falsa.
α = Nivel de significación = P(error de tipo I) = P(se rechaza H_0/H_0 es verdadera)
$1-\alpha$ = Nivel de confianza = 1 – P(error de tipo I) = P(no se rechaza H_0/H_0 es verdadera)
$\beta = P$(error de tipo II) = P(no se rechaza H_0/H_0 es falsa)
$1-\beta$ = Potencia de la prueba = 1 – P(error de tipo II) = P(se rechaza H_0/H_0 es falsa)

Pasos que es conveniente formalizar en una prueba de hipótesis:

1) Identificar el parámetro de interés en la situación del problema.
2) Plantear las hipótesis nula y alternativa.
3) Determinar el estadístico adecuado para la prueba (ver apéndice).
4) Determinar la región de rechazo de la hipótesis nula para el nivel de significación seleccionado α.
5) Calcular el valor del estadístico correspondiente a la muestra.
6) Tomar la decisión estadística sobre si H_0 debe ser o no rechazada, y establecer esta conclusión en el contexto del problema.

Nota. A menos que se indique lo contrario, en esta guía los problemas de control (ej. de procesos de producción, de aceptación de lotes de mercadería, …) tendrán una hipótesis *optimista* (esto es suponiendo en principio que el proceso productivo trabaja correctamente, que el lote cumple los requerimientos deseados). Los problemas de inversión con riesgo económico alto tendrán una hipótesis *pesimista*. En cambio, si en la compra de un nuevo equipo o en la modificación de un proceso, el objetivo es un abaratamiento de costos y no de lograr una mejora de rendimiento o de eficiencia, entonces la hipótesis a plantear puede ser optimista o pesimista.

Ejercicio 1. El control de recepción de las partidas de un tipo de hilo de coser industrial se realiza pesando una muestra de 9 ovillos de cada partida, rechazando la partida si el peso medio de la muestra resulta menor o igual a cierto valor crítico. El valor mínimo admisible del peso medio de los ovillos de toda la partida es de 250,0 gramos y se establece que la probabilidad máxima de rechazar una partida que cumple con dicha especificación es de 0,05. Se sabe, además, por disponer de extensos registros históricos, que el peso de un ovillo es una variable aleatoria con distribución normal y desvío estándar de 15,0 gramos.

a) Plantear la prueba de hipótesis adecuada a esta situación indicando claramente la hipótesis nula y la alternativa, el nivel de significación, la región de rechazo y la regla de decisión.

b) Indicar qué sucede con una partida de la que se extrajeron 9 ovillos cuyo peso promedio fue de 242,4 gramos.

c) Calcular el valor P correspondiente a situación dada en **b)**. Interpretar en términos del problema.

Nota: El **valor $\boldsymbol{P}$** (o nivel de significación a posteriori) es el mínimo nivel de significación al que H_0 sería rechazada cuando se utiliza un procedimiento de prueba especificado en un conjunto dado de información. Una vez que el valor P se haya determinado, la conclusión en cualquier nivel α particular resulta de comparar el valor P con α:

si $\alpha \geq P$, entonces se rechaza H_0 al nivel α; si $\alpha < P$, entonces no se rechaza H_0 al nivel α.

Ejercicio 2. El consumo diario de combustible en una planta industrial es una variable con distribución normal cuyo desvío estándar es de 23 litros. Se considera la posibilidad de introducir una modificación en el proceso tecnológico, que sólo se justificará si se logra obtener un consumo diario medio inferior a 200 litros. A efectos de tomar una decisión, se trabajó durante 5 días con el proceso modificado obteniéndose un consumo diario promedio de 180,0 litros.

a) ¿Se aconseja efectuar la modificación en el proceso con una máxima probabilidad de error de 0,05?

b) ¿Cuál es la probabilidad de considerar que no se justifica el nuevo proceso si el consumo diario medio real fuera 190 litros?

c) ¿Cuál es la probabilidad de considerar que no se justifica el nuevo proceso si el consumo diario medio real fuera 170 litros?

d) Estimar con un 80% de confianza un intervalo para el consumo diario medio de combustible con el proceso modificado.

Ejercicio 3. Una empresa fabricante de paneles solares recibe regularmente lotes de paneles para verificar su rendimiento. Según las especificaciones del contrato con los proveedores, el promedio de la pérdida de eficiencia de los paneles no debe superar 1 watt. En un lote reciente, se examinó una muestra de 10 paneles y se encontró que la pérdida media de eficiencia es de 1,06 watts. Se sabe, además, por pruebas anteriores, que las pérdidas de eficiencia se distribuyen normalmente con un desvío estándar de 0,1 watts.

a) Determinar si se puede aceptar el lote bajo el riesgo del 10% de rechazarlo indebidamente (nivel de significación 0,10).

b) Calcular la probabilidad de aceptar un lote cuya pérdida media de eficiencia sea de 1,05 watts.

c) Determinar el tamaño de muestra necesario para que la probabilidad de aceptar un lote con una pérdida media de 1,05 watts sea 0,12.

Ejercicio 4. El capataz de una planta de coque ha recibido varias quejas con respecto a la calidad del coque tamizado estándar nº 5. Se sugiere que la causa puede ser el factor de porosidad, X, medido en diferencias de peso en gramos entre coque seco y mojado. Los envíos se compraron con la afirmación del productor de que el factor de porosidad media es de 900 gramos. Desde el punto de vista del productor, tanto los factores de porosidad grandes como los pequeños son indeseables. Se sabe por experiencia previa que X, que puede suponerse normal, tiene un desvío estándar de 72 gramos. Habiéndose tomado una muestra al azar de tamaño 25 se obtuvo un factor de porosidad promedio de $922{,}00$ gramos.

a) Contrastar la hipótesis de que los envíos realmente concuerdan con la declaración del fabricante contra la alternativa al nivel de $0{,}05$.

b) ¿Ofrece la selección del tamaño muestral una buena protección contra el no rechazo de la hipótesis cuando en realidad el promedio verdadero es tan grande como 950 gramos o tan pequeño como 850 gramos?

Ejercicio 5. Una cadena de supermercados considera la posibilidad de cambiar sus máquinas registradoras por otras más modernas lanzadas al mercado recientemente. Se ha establecido la conveniencia de la inversión si se puede asegurar que el tiempo medio de atención por cliente en las cajas rápidas sea inferior a los 2 minutos. La probabilidad de tomar una decisión errónea en tal sentido se desea que valga $0{,}05$. Se sabe que, con las máquinas actuales, el desvío estándar del tiempo de atención en las cajas rápidas es de $0{,}6$ minutos, teniéndose razones fundadas para asumir que con las máquinas nuevas no ha de modificarse. Se realizó un ensayo con las máquinas nuevas, en el cual se atendieron 40 personas en 75 minutos.

a) ¿Cuál sería, con esta información, la decisión recomendada? Realizar un planteo, con su correspondiente justificación, que sustente dicha recomendación. Explicar en el contexto del problema los errores tipo I y tipo II.

b) Calcular el valor P de la decisión anterior.

c) ¿Cuál sería la probabilidad de comprar las nuevas máquinas si con ellas el tiempo medio de atención fuera de $1{,}8$ minutos? Considerar el planteo hecho en **a)**. ¿Es una probabilidad de error? Si lo fuese, ¿de qué tipo? ¿Es un valor de potencia?

d) ¿Cuál sería la probabilidad de cambiar las máquinas si el tiempo medio de atención con las nuevas máquinas fuera $1{,}8$ minutos? Considerar el planteo hecho en **a)**. ¿Es una probabilidad de error? Si lo fuese, ¿de qué tipo? ¿Es un valor de potencia?

Ejercicio 6. Un fabricante de fusibles asegura que con una sobrecarga del 20% sus fusibles se fundirán al cabo de $12{,}40$ minutos de valor medio (como mínimo). Para comprobar esta afirmación, una muestra de n=20 de los fusibles fue sometida a una sobrecarga de un 20% y los tiempos que tardaron en fundirse tuvieron una media muestral de $10{,}63$ minutos y un desvío estándar muestral de $2{,}48$ minutos. Si se supone que los datos constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal, ¿tienden a apoyar o refutar la afirmación del fabricante a un nivel de significación $0{,}01$? ¿Y a un nivel de significación $0{,}001$? Plantear la prueba de hipótesis correspondiente y determinar la región de rechazo.

Ejercicio 7. Se vende una marca especial de cemento en bolsas de 50 kilogramos. Se eligieron 11 de ellas al azar y sus pesos, en kg, resultan:

49,2	50,1	49,8	49,7	50,1	50,5	49,6	49,9	50,4	50,2	49,7

Si se supone que las bolsas pertenecen a una población normal, ¿son los resultados obtenidos congruentes con la presunción de que el valor medio poblacional es $50kg$? Tomar como nivel de significación $\alpha = 0{,}10$.

Ejercicio 8. El ajuste de profundidad de determinado taladro de columna es de 2" (2 pulgadas). Se supone que la profundidad media μ de todos los agujeros barrenados por esta máquina es 2", considerándose nocivo que difiera por exceso o por defecto de dicho valor. Para comprobar esta hipótesis sobre el valor medio, se midió una muestra aleatoria de $n = 100$ agujeros barrenados por esa máquina y se encontró un promedio muestral $2{,}005"$ con un desvío estándar muestral $0{,}030"$. A un nivel de significación $\alpha = 0{,}10$,

a) ¿se puede rechazar la hipótesis nula en base a los datos aportados por la muestra? Plantear claramente todos los pasos de la prueba de hipótesis y justificar los supuestos bajo los cuales se trabaja.

b) Calcular la probabilidad de concluir que la media poblacional no es diferente de $2"$ cuando en realidad es $2{,}004"$.

Ejercicio 9. Una empresa de transporte desconfía de la afirmación de que la vida útil promedio de ciertos neumáticos es al menos de 28000 millas. Para verificar la afirmación se colocan $n = 40$ de estos neumáticos en sus camiones y se obtiene de esta muestra una vida útil promedio de 27463 millas con un desvío estándar de 1348 millas.

a) ¿Qué conclusión puede extraerse respecto de lo afirmado si la probabilidad del error del tipo I es a lo sumo $\alpha = 0{,}01$? Plantear claramente todos los pasos de la prueba de hipótesis y justificar los supuestos bajo los cuales se trabaja.

b) Calcular la probabilidad de concluir la afirmación es falsa si en realidad la duración media de los neumáticos es de 29500 millas.

Ejercicio 10. Las arenas que se usan en pozos de *shale gas* y *shale oil* (energías para el futuro) deben ser muy bien seleccionadas, tener sus granos esféricos, gran uniformidad y alta resistencia a la compresión. Uno de los ensayos que se realizan para ver si son aptas consiste en someterlas a presiones de 10000 psi y analizar la cantidad de material perdido (medida con la pérdida del radio del grano en mm). Las arenas de buena calidad tienen en las pruebas de resistencia a la compresión varianzas de esa variable menores a $0{,}50$. Si así no fuese constituye un problema serio en el proceso.

Se realizan pruebas a 16 muestras de arena y se obtuvo una varianza muestral de $0{,}17$. ¿Hay evidencias significativas para afirmar que la arena muestreada puede ser utilizada en los pozos de *shale gas* y *shale oil*? Plantear la prueba de hipótesis correspondiente detallando parámetro de interés, hipótesis nula y alternativa, interpretación en el contexto del problema de los errores tipo I y tipo II; indicar el estadístico de prueba y su distribución –agregar, de ser necesario, suposiciones que se hagan para que este planteo sea posible. Justificar la conclusión con un cálculo y una explicación adecuados.

Nota. Se puede ver una explicación del tema en https://youtu.be/TVZ0DOZ59SA, video realizado por el Instituto Argentino del Gas y del Petróleo.

Ejercicio 11. Se ha observado que la variabilidad del peso de las fichas que se utilizan en máquinas expendedoras automáticas afecta el comportamiento de las mismas. Para que las máquinas expendedoras funcionen correctamente el desvío estándar de las fichas deber ser menor que $60\,mg$. Los pesos, en gramos, de 14 fichas de una muestra entre las que están en uso son:

4,07	4,10	4,12	4,13	4,13	4,14	4,15	4,24	4,26	4,24	4,25	4,20	4,20	4,28

Se supone que el peso de los cospeles es una variable aleatoria con distribución normal.

a) A un nivel de significación de 0,05, ¿es aconsejable tomar alguna medida preventiva sobre las fichas que se usan? Realizar el planteo de las hipótesis nula y alternativa, presentar el estadístico de prueba y tomar la decisión para dar la respuesta solicitada.

b) ¿Cuál es el valor P correspondiente a la muestra tomada?

Ejercicio 12. La varianza del índice de refracción de una clase de cristales se sabe, por experiencia, que es $\sigma^2 = 1{,}26 \times 10^{-4}$. La empresa rechaza una entrega de dichos cristales si en un ensayo de 20 cristales la varianza muestral es mayor o igual a $2{,}00 \times 10^{-4}$. Suponiendo que los valores

muestrales pueden considerarse como una muestra aleatoria de una población normal, ¿cuál es la probabilidad de que la entrega sea rechazada a pesar de que $\sigma^2 = 1{,}26 \times 10^{-4}$?
Al contestar, indicar a qué tipo de prueba de hipótesis corresponde esta regla de decisión, cuáles son las hipótesis nula y alternativa, el cuál es el estadístico de prueba.

Ejercicio 13. Una empresa manufacturera ha declarado que el 90% de los artículos de cierto proceso son no defectuosos. Se implementa un proceso que se supone aumentará el porcentaje de no defectuosos. Una muestra de 100 artículos producidos con el nuevo proceso dio por resultado 7 artículos defectuosos. ¿Apoya esta evidencia muestral que el nuevo proceso es significativamente mejor a un nivel 0,05?

Ejercicio 14. Una empresa productora de bebidas gaseosas iniciará una campaña publicitaria televisiva si encuentra pruebas significativas de que el porcentaje de televidentes que ven programas deportivos en forma continuada es superior al 60%. A efectos de tomar una decisión se analiza una muestra de 500 televidentes comprobando que 325 de ellos ven programas deportivos en forma continuada, y se establece en un 10% el riesgo máximo de iniciar la campaña cuando el porcentaje no supera el 60%.

a) A la luz de los datos obtenidos, ¿se aconseja iniciar la campaña?
b) ¿Cuál es la probabilidad de no iniciar la campaña cuando el porcentaje de televidentes es del 66%? ¿Es una probabilidad de error o de acierto? Si fuese de error, ¿de qué tipo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de iniciar la campaña cuando dicho porcentaje es del 68%? ¿Es una probabilidad de error o de acierto? Si fuese de error, ¿de qué tipo?
d) ¿A cuántos encuestados más deberá consultarse si de desea mantener el nivel de significación de la prueba y llevar a 0,03 la probabilidad de que se decida no iniciar la campaña aun cuando el porcentaje de televidentes sea del 66%?

Ejercicio 15. El dueño de un supermercado mayorista cambiará sus máquinas registradoras por unas nuevas si estas le permiten ahorrar en promedio más de 3 minutos en cada operación. Está dispuesto a correr el riesgo, con probabilidad 0,01, de comprar las nuevas máquinas si el ahorro es solo de 3 minutos. Se sabe que el tiempo empleado en cada operación, con las registradoras actuales, se distribuye normalmente con un desvío estándar de 0,55 minutos. Se supone además que este tiempo no cambiará, tanto en su distribución normal como en su desvío estándar, con las nuevas registradoras. Una muestra de 25 operaciones con las registradoras actuales produjo una media de 6 minutos. Se hizo una prueba con las máquinas nuevas obteniéndose una media de 2,5 minutos con 16 operaciones. ¿Qué se aconsejaría al dueño del supermercado? Justificar.

EJERCICIOS MISCELÁNEOS QUE INCLUYEN PRUEBA DE HIPÓTESIS

Ejercicio 16. La calibración de una balanza debe verificarse al pesar 25 veces un espécimen de prueba de $10\,kg$. Se supone que los resultados de diferentes pesadas, $\{X_1;\ X_2;\ldots;\ X_{25}\}$, son variables aleatorias con idénticas distribución e independientes entre sí y que el peso en cada intento está normalmente distribuido con $\sigma = 0{,}200\,kg$. Sea μ el valor medio de lectura de peso de la balanza.

a) ¿Cuáles hipótesis deben plantearse? Justificar.
b) Si la balanza debe recalibrarse cuando $\bar{X} \geq 10{,}1032\,kg$ o $\bar{X} \leq 9{,}8968\,kg$, ¿cuál es la probabilidad de que la recalibración se realice cuando en realidad no es necesaria? ¿A qué tipo de error corresponde esa probabilidad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la recalibración se considere innecesaria cuando de hecho $\mu = 10{,}1\ kg$? ¿Cuál cuando $\mu = 9{,}8\ kg$? ¿A qué tipo de error corresponde esas probabilidades?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que se considere necesaria la recalibración cuando $\mu = 10{,}2\ kg$? ¿Constituye este resultado una probabilidad de error? Explicar.

e) Sea $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. ¿Para qué valor c es la región de rechazo de la parte (b) equivalente a la región de dos colas, ya sea $z \geq c$ o $z \leq -c$?

f) Si el tamaño de la muestra fuera sólo 9 en lugar de 25, ¿cómo se alteraría el procedimiento de la parte b) para que $\alpha = 0{,}05$?

g) Mediante el uso de la parte **f)**, ¿qué se concluye de los siguientes datos muestrales? Datos:
$9{,}981 \quad 10{,}006 \quad 10{,}107 \quad 9{,}888 \quad 9{,}793 \quad 9{,}728 \quad 10{,}439 \quad 10{,}214 \quad 10{,}190$
todos en kg.

Ejercicio 17. Una empresa de arquitectura especializada en edificaciones sustentables ha estado estudiando la eficiencia energética de sus sistemas de climatización. En una evaluación previa, se determinó que el consumo promedio de energía por día de un sistema de climatización estándar para un edificio de tamaño medio es de $11{,}2\ kWh$, con un desvío estándar de $1{,}3\ kWh$, valores que se consideran representativos para toda la población de sistemas similares. La empresa está considerando la implementación de un nuevo sistema de climatización que promete reducir el consumo de energía diario. Para validar esta afirmación, se realiza una prueba preliminar con el nuevo sistema. En la prueba, se registró un consumo promedio de $10{,}6\ kWh$ durante 10 días de operación. Se asume que el desvío estándar del consumo de energía no ha cambiado con el nuevo sistema.

a) Determinar si el resultado de la prueba es suficiente para considerar que el nuevo sistema de climatización es más eficiente que el sistema estándar, dado un riesgo del 5% de rechazar el sistema cuando no produce la reducción deseada. Hacer el planteo y agregar los supuestos adicionales necesarios para su validez.

b) Calcular la probabilidad de aceptar el nuevo sistema cuando el consumo medio diario es realmente de $10{,}5\ kWh$.

c) Determinar cuántos días adicionales de prueba serían necesarios para que la probabilidad de aceptar el nuevo sistema, cuando el consumo medio diario es de $10{,}5\ kWh$, sea de 0,90.

Ejercicio 18. En una curtiembre, el consumo diario de uno de los productos químicos principales es variable con una media de 580 litros y un desvío estándar de 100 litros. El jefe de producción ha propuesto una modificación en una de las etapas del proceso, que implicará mayores costos, pero que se justificaría si se lograra disminuir en forma significativa el consumo medio. Si no se obtuviera resultado alguno, el riesgo de realizar la modificación se establece en un 2%. Por otra parte, si se lograse una disminución del 10%, se desea tener una probabilidad de 0,95 de implementar la modificación.

a) Indicar la hipótesis nula apropiada a esta situación, calcular el tamaño de la muestra a tomar, indicar la condición de rechazo y la regla de decisión correspondiente.

b) Calcular la probabilidad de implementar la modificación si con ella se obtiene una disminución del 5% en el consumo diario medio. ¿Es una probabilidad de error o de una decisión correcta? ¿Es un valor de potencia?

Ejercicio 19. Un torno automático produce una pieza cuya longitud tiene distribución Normal con un desvío estándar de $0{,}1\ cm$. Si el torno está bien ajustado, el valor medio es de $2\ cm$, pero cuando la herramienta de corte adopta una posición incorrecta, dicho promedio se altera, aumentando o disminuyendo, sin llegar a modificarse el desvío estándar; en ese caso debe corregirse la posición de la herramienta. Una muestra de 10 piezas arrojó una longitud media de $2{,}04\ cm$.

a) Si se establece en 0,10 la probabilidad de concluir erróneamente que el torno está desajustado, ¿cuál sería la conclusión? Hacer el planteo de la prueba de hipótesis y definir la región de rechazo de la hipótesis nula.

b) Si el torno estuviera desajustado y la longitud media fuera de $1{,}95\ cm$, ¿cuál sería la probabilidad de no efectuar el ajuste?

c) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra si se desea reducir la probabilidad de **b)** a 0,20?

Ejercicio 20. Una cadena de supermercados ha recibido reiterados reclamos de sus clientes porque perciben un menor contenido en los envases de $400\ m$l del *shampoo* comercializado con la marca propiedad de la cadena. Se tomó una muestra de envases y se midieron los contenidos, obteniendo los siguientes datos (en ml):

379 420 364 374 361 386

¿Es fundado el reclamo de los clientes? Hacer un planteo adecuado e indicar el nivel justo de significación. ¿Qué supuestos es necesario? ¿Son razonables en el contexto de la problemática que se trata?

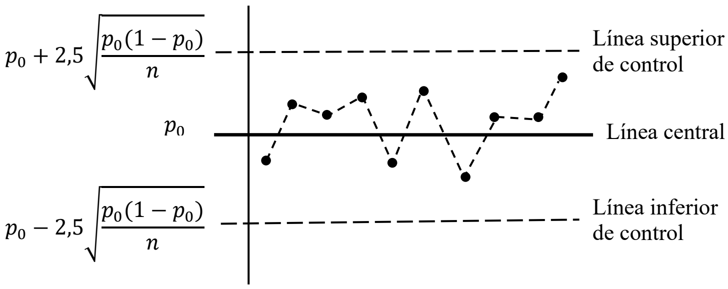
Ejercicio 21. En un experimento para determinar la efectividad de un nuevo medicamento, se ensaya en 400 pacientes que sufren la afección que este medicamento dice curar. Si más de 300 pero menos de 340 pacientes se curan se concluye que el medicamento tiene una efectividad del 80%.

a) Determinar la probabilidad de cometer error de tipo I.

b) ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error de tipo II si el nuevo medicamento tiene una efectividad del 70%?

Ejercicio 22. A fin de controlar la proporción de unidades defectuosas de artículos producidos en serie, los ingenieros de control de calidad toman, de una población de tamaño N, grandes muestras al azar de tamaño n, a intervalos regulares y trazan las proporciones de unidades defectuosas en las nuestras en un diagrama de control como el de la figura. El proceso se considera bajo control cuando la proporción poblacional de defectuosos es p_0 y la proporción muestral de defectuosos se ubica entre los límites superior e inferior del control 3-sigma dados por

$$p_0 + 2{,}5\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \text{ y } p_0 - 2{,}5\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}.$$



a) ¿Con qué prueba de hipótesis se vincula este gráfico de control? Detallar cuál es el estadístico de prueba y que distribución tiene; cuáles son las hipótesis nula y alternativa. Especificar todas las condiciones que debe cumplir n para que este planteo sea válido y comentar el porqué de cada una.

b) ¿Qué significado tienen los errores tipo I y II, respectivamente en esta prueba de hipótesis?

c) ¿Cuál es el valor del nivel de significación α de la prueba?

d) Tomando en cuenta la prueba de hipótesis para $p_0 = 0{,}08$ y $n = 100$, ¿cuál es la probabilidad de no considerar un proceso fuera de control cuya proporción poblacional de defectuosos sea $p_1 = 0{,}085$?

Problemas de Planteo Conceptual

Problema A. Se recibe una caja con 10 unidades de una pieza y se desea ensayar la hipótesis

H_0: "las diez piezas son buenas",

extrayendo una única unidad de la caja. La condición de rechazo, obvia, es que la pieza extraída sea defectuosa. Si la pieza extraída es buena, no se puede rechazar la hipótesis nula.

a) Escribir una hipótesis alternativa H_1 razonable en el contexto del problema planteado.

b) Calcular la probabilidad de cometer error de tipo II (β) para las alternativas de que haya 1, 2, … , K piezas defectuosas en la caja con K = 1; 2; … ; 10.

c) Graficar $\beta(K)$.

Problema B. Se tienen 3 cajas. La Caja 1 contiene 2 bolillas azules y 2 rojas; la Caja 2 contiene 3 bolillas azules y 1 roja; la Caja 3 está inicialmente vacía. Se extraen al azar de manera independiente una bolilla de la Caja 1 y una bolilla de la Caja 2, y se las coloca en la Caja 3. Se proponen dos hipótesis relativas a la Caja 3.

H_0: las dos bolillas son azules; H_1: al menos una de las bolillas no es azul.

El criterio para decidir entre una u otra hipótesis es el siguiente: se hacen dos extracciones con reposición de la Caja 3, y no se rechaza H_0 en caso de que en cada una las dos extracciones se obtenga una bolilla azul; se rechaza H_0 en caso contrario.

a) Hallar las probabilidades correspondientes a los eventos: en la Caja 3 hay 2 bolillas azules, hay una bolilla de cada color, hay 2 bolillas rojas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar H_0 cuando H_1 es verdadera? ¿Esta decisión corresponde a un error o a un acierto? Si es a un error, ¿de qué tipo de error se trata?

c) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera? ¿Esta decisión corresponde a un error o a un acierto? Si es a un error, ¿de qué tipo de error se trata?

Problema C. Las piezas producidas por dos máquinas de herramientas se encuentran en el almacén de un taller metalúrgico. La dimensión principal de una de estas piezas es una variable aleatoria normal con parámetros $\mu_1 = 10{,}20\,mm$ y $\sigma_1 = 0{,}45\,mm$ para la máquina 1, y $\mu_1 = 10{,}40\,mm$ y $\sigma_2 = 0{,}55\,mm$ para la máquina 2.

Se ha recibido un pedido por 2500 piezas y se preparó con todas la piezas producidas por una misma máquina, perdiéndose el dato de que máquina era. Para recuperar esa información se decide realizar una prueba de hipótesis sobre la dimensión media de las piezas del pedido preparado basado en la dimensión media de las piezas de una muestra. Diseñar la prueba de tal manera que la probabilidad de decidir que las piezas son de una máquina cuando en realidad no lo son, es la misma para ambas máquinas. Determinar el tamaño de la muestra necesario para que la probabilidad de cometer cualquiera de los errores indicados no supere a 0,05. Escribir la regla de decisión.

Nota: Entender que las dos opciones de valores medios poblacionales que se informan son consideradas como un conjunto exhaustivo de lo que se puede dar en realidad.

Prueba de hipótesis para la proporción poblacional *p* basado en una muestra pequeña (fuera de programa)

Problema D. En un proceso de manufactura el parámetro de interés es la proporción p de artículos del total de producidos que no cumplen con condiciones especificadas. Se considera que si p no supera un valor $p_0 = 0{,}10$. el proceso es aceptable, mientras que si p resultara mayor que p_0 el proceso debe corregirse. Se toma una muestra al azar de 20 artículos provenientes del proceso de manufacturación y se inspeccionan. Si la cantidad de artículos que no cumplen con lo especificado en la muestra supera el valor 3, se determina que el proceso está fuera de control y se detiene.

- **a)** Detallar la prueba de hipótesis que conduce a esta región de rechazo.
- **b)** ¿Quién parece formular este ensayo de hipótesis: el encargado usual de la línea o un inspector "mal predispuesto" con el sector?
- **c)** Determinar el nivel de significación del ensayo.
- **d)** Trazar la curva de operación.
- **e)** Analizar las modificaciones que se producirían si la región de rechazo de H_0 establece que, si hay más de 4 artículos entre los 20 seleccionados se interfiere con el proceso.

Problema E. Se sabe que una gran remesa de voltímetros contiene cierta proporción p de defectuosos. Para probar H_0: $p = 0{,}2$ contra H_1: $p > 0{,}2$ se usa el siguiente método. Se obtiene una muestra de tamaño 5 y se cuenta X, el número de voltímetros defectuosos. Si $X \leq 1$, no se rechaza H_0, si $X > 4$, se rechaza H_0; y si $X = 2{,}3$ ó 4 se obtiene una segunda muestra de tamaño 5. Sea Y el número de instrumentos defectuosos en la segunda muestra. Se rechaza H_0 si $Y \geq 2$ y no se rechaza en caso contrario. Se supone que el lote muestreado es suficientemente grande de modo que pueda suponerse que X y Y son variables aleatorias independientes distribuidas binomialmente.

- **a)** ¿Cuál es la probabilidad de error tipo I?
- **b)** ¿Cuál es la probabilidad de error tipo II si $p_1 = 0{,}5$?

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

- **Prueba de Hipótesis para la media de una población normal con desvío estándar conocido.**

Sea una prueba de hipótesis de nivel de significación α para la media μ de una población normal con desvío estándar conocido σ a partir de una muestra de tamaño n. Si la hipótesis nula es

$$H_0: \mu = \mu_0,$$

la probabilidad $\beta = \beta(\mu_1)$, con μ_1 consistente con H_1, de cometer error tipo II está dada por las expresiones resumidas en la siguiente tabla para los distintos casos de hipótesis alternativa.

Hipótesis alternativa	Probabilidad $\beta(\mu_1)$ del error tipo II
$H_1: \mu > \mu_0$	$P\left(\bar{X} < \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ / \mu_1 > \mu_0\right)$ $\Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
$H_1: \mu < \mu_0$	$P\left(\bar{X} > \bar{x}_c = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ / \mu_1 < \mu_0\right)$ $1 - \Phi\left(-z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$P\left(\mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / \mu_1 \neq \mu_0\right)$ $\Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

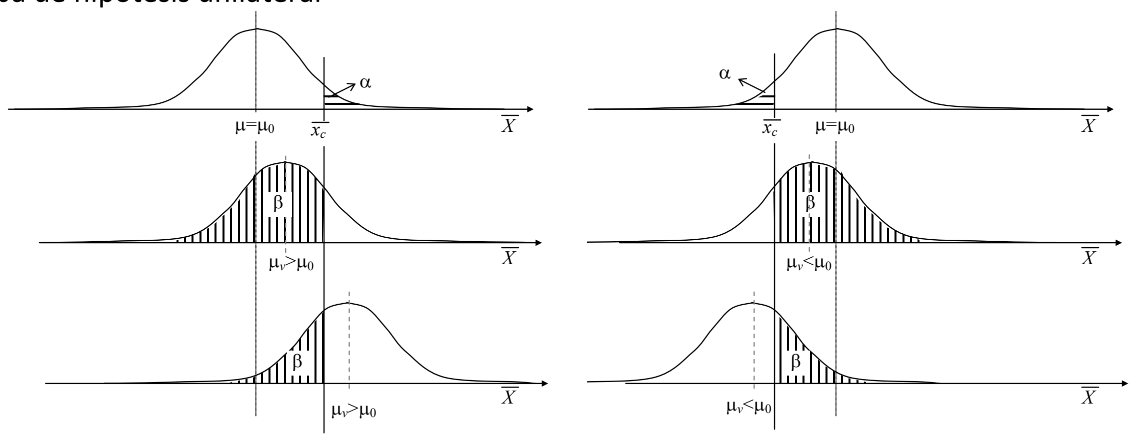
Nomenclatura.:

Z variable normal estándar; $\Phi(z) = P(Z \leq z_\alpha)$; $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow P(Z > z_\alpha) = \alpha$.

El tamaño muestral n para que la prueba mantenga su nivel de significación α y tenga un valor $\beta(\mu_1) = \beta$, en el parámetro alternativo μ_1 es:

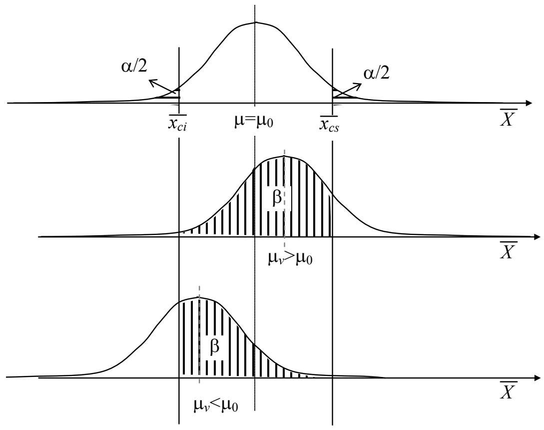
$n = \left[\frac{\sigma\left(z_\alpha + z_\beta\right)}{\mu_0 - \mu_1}\right]^2$	para una prueba unilateral (cola superior o inferior)
$n = \left[\frac{\sigma\left(z_{\alpha/2} + z_\beta\right)}{\mu_0 - \mu_1}\right]^2$	para una prueba bilateral (solución aproximada)

Prueba de hipótesis unilateral



$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$ $\qquad$ $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu < \mu_0$

Prueba de hipótesis bilateral



$$H_0: \mu = \mu_0; \ H_1: \mu \neq \mu_0$$

- **Prueba de Hipótesis para proporción población para una muestra grande.**

Sea una prueba de hipótesis de nivel de significación α para una muestra grande de tamaño n en relación con la proporción poblacional p que cumple determinada característica. Si la hipótesis nula es

$$H_0: p = p_0,$$

la probabilidad $\beta = \beta(p_1)$, con p_1 consistente con H_1, de cometer error tipo II está dada por las expresiones resumidas en la siguiente tabla para los distintos casos de hipótesis alternativa.

Hipótesis alternativa	Probabilidad $\beta(p_v)$ del error tipo II
$H_1: p > p_0$	$P\left(\frac{X}{n} < \left(\frac{x}{n}\right)_c = p_0 + z_\alpha \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} \ / \ p = p_1\right)$ $\Phi\left(\frac{p_0 - p_1 + z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)\,/\,n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)\,/\,n}}\right)$
$H_1: p < p_0$	$P\left(\frac{X}{n} > \left(\frac{x}{n}\right)_c = p_0 - z_\alpha \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} \ / \ p = p_1\right)$ $1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p_1 - z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)\,/\,n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)\,/\,n}}\right)$
$H_1: p \neq p_0$	$P\left(\left(\frac{x}{n}\right)_{ci} < \frac{X}{n} < \left(\frac{x}{n}\right)_{cs} \ / \ p = p_1\right)$ $\left(\frac{x}{n}\right)_{ci} = p_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}; \ \left(\frac{x}{n}\right)_{cs} = p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\Phi\left(\frac{p_0 - p_1 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}\right)$ $- \Phi\left(\frac{p_0 - p_1 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}\right)$

El tamaño muestral n para que la prueba mantenga su nivel de significación α y tenga un valor $\beta = \beta(p_1)$, en el parámetro alternativo p_1 es:

$n = \left[\dfrac{z_{\alpha} \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta} \cdot \sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0}\right]^2$	Para una prueba unilateral (superior o inferior)
$n = \left[\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta} \cdot \sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0}\right]^2$	Para una prueba bilateral (solución aproximada)

Observación:

Estos procedimientos de prueba son válidos siempre que $np_0 \geq 5$ y $n(1-p_0) \geq 5$.