RESPUESTAS GUÍA DE EJERCITACIÓN 5 TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1.

1.1) Es transformación lineal (T.L.); se corresponde con una proyección sobre el eje vertical para luego efectuar una rotación en π/2 en sentido horario.

$$f:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R^2}\,/\,f(x_1,x_2)=(x_2,0);\ A\cdot X=F(X)\to\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Nu}(f)=\{(x_1,0)\ \forall x_1\in\mathbf{R}\}$ (todo el eje horizontal); $\dim(\mathrm{Nu}(f))=1; B(\mathrm{Nu}(f))=\{(1,0)\}$

$\mathrm{Im}(f)=\{(x_1,0)\ \forall x_1\in\mathbf{R}\}$ (todo el eje horizontal); $\dim(\mathrm{Im}(f))=1; B(\mathrm{Im}(f))=\{(1,0)\}$

1.2) No es T.L. Contraejemplo
$$\begin{cases}\vec{x}=(2,5)\,;\ \vec{y}=(3,4) \qquad \vec{x}+\vec{y}=(5,9)\\ f(\vec{x})+f(\vec{y})\neq f(\vec{x}+\vec{y})\\ (10,0)+(12,0)\neq(5\cdot 9,0)\\ (22,0)\neq(45,0)\end{cases}.$$

1.3) No es T.L. Contraejemplo
$$\begin{cases}\vec{x}=(2,5);\ \vec{y}=(3,4) \qquad \vec{x}+\vec{y}=(5,9)\\ f(\vec{x})+f(\vec{y})\neq f(\vec{x}+\vec{y})\\ (2-1,5+2)+(3-1,4+2)\neq(5-1,9+2)\\ (1,7)+(2,6)\neq(4,11)\\ (3,13)\neq(4,11)\end{cases}.$$

1.4) Es T.L.

$$f:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}\,/\,f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-6x_3,0,-4x_1+12x_3);\ \begin{pmatrix}2&0&-6\\0&0&0\\-4&0&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-6x_3\\0\\-4x_1+12x_3\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Nu}(f)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R^3}\,/\,x_1-3x_3=0\}=\{(3x_3,x_2,x_3)\ \forall x_2,\forall x_3\in\mathbf{R}\}$

$\dim(\mathrm{Nu}(f))=2; B(\mathrm{Nu}(f))=\{(0,1,0);(3,0,1)\}$

$\mathrm{Im}(f)=\{(\omega_1,0,-2\omega_1)\ \forall\omega_1\in\mathbf{R}\}$; $\dim(\mathrm{Im}(f))=1; B(\mathrm{Im}(f))=\{(1,0,-2)\}$

1.5) Es T.L.

$$f:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R}^3\,/\,f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,-x_1,x_1+x_2);\ \begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\-x_1\\x_1+x_2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Nu}(f)=\{(0,0)\}$; $\dim(\mathrm{Nu}(f))=0$

$\mathrm{Im}(f)=\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\mathbf{R^3}\,/\,\omega_1-\omega_2-2\omega_3=0\}=\{(\omega_1,\omega_1-2\omega_3,\omega_3)\ \forall\omega_1,\forall\omega_3\in\mathbf{R}\}$

$\dim(\mathrm{Im}(f))=1; B(\mathrm{Im}(f))=\{(1,1,0);(0,-2,1)\}$

1.6) No es T.L. Contraejemplo $\begin{cases} \vec{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix};\ \vec{y}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -5\end{pmatrix} \qquad \vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix} \\ f(\vec{x})+f(\vec{y})\neq f(\vec{x}+\vec{y}) \\ 5-(-6)+(-10)-(-7)\neq 0-4 \\ 11+(-3)\neq -4 \\ 8\neq -4 \end{cases}$.

1.7) Es T.L.

f: $\mathbf{R}^{2\times 2}\to \mathbf{R}^{2\times 2}$ / $f(X)=X-X^T$ con $X\in \mathbf{R}^{2\times 2}$. $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{2\times 2}$ isomorfo con (x_1,x_2,x_3,x_4).

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ x_2-x_3\\ -x_2+x_3\\ 0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Nu}(f)=\left\{X\in \mathbf{R}^{2\times 2} / X=X^T\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_2 & x_4\end{pmatrix}, \forall x_1,\forall x_2,\forall x_4\in \mathbf{R}\right\}$ (matrices simétricas de orden 2)

$\dim(\mathrm{Nu}(f))=3; B(\mathrm{Nu}(f))=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathrm{Im}(f)=\left\{X\in \mathbf{R}^{2\times 2} / X=-X^T\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0 & -x_3\\ x_3 & 0\end{pmatrix}, \forall x_3\in \mathbf{R}\right\}$ (matrices antisimétricas de orden 2)

$\dim(\mathrm{Im}(f))=1; B(\mathrm{Im}(f))=\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 2.

- $f_1(x,y)=(x,-y), A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, reflexión con respecto al eje *x*.
- $f_2(x,y)=(-x,y), A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, reflexión con respecto al eje *y*.
- $f_3(x,y)=(y,x), A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, reflexión con respecto a la recta $y=x$.
- rotación en π/4 alrededor del origen con sentido antihorario

$$f_4(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right),\quad A_4=\begin{pmatrix}\cos(\pi/4) & -\mathrm{sen}(\pi/4)\\ \mathrm{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

- composición de dos transformaciones: una rotación en π/4 alrededor del origen con sentido horario (g) y una reflexión con respecto al eje *y* (*h*), esto es $h\circ g \Rightarrow A_h\cdot A_g$.

$$f_5(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right),\quad A_5=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\pi/4) & -\operatorname{sen}(-\pi/4)\\ \operatorname{sen}(-\pi/4) & \cos(-\pi/4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}.$$

- $f_6(x,y)=\left(\frac{3}{2}x,y\right)$, $A_6=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, expansión en la dirección del eje x con factor $k=\frac{3}{2}$.
- $f_7(x,y)=\left(\frac{7}{8}x,y\right)$, $A_7=\begin{pmatrix}\frac{7}{8} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, compresión en la dirección del eje x con factor $k=\frac{7}{8}$.
- $f_8(x,y)=\left(x,\frac{3}{2}y\right)$, $A_8=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$, expansión en la dirección del eje y con factor $k=\frac{3}{2}$.
- $f_9(x,y)=\left(x+\frac{1}{2}y,y\right)$, $A_9=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, deslizamiento cortante o cizalladura en la dirección del eje x con factor $k=\frac{1}{2}$.

$f_{10}(x,y)=\left(x,\frac{1}{2}x+y\right)$, $A_{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, deslizamiento cortante o cizalladura en la dirección del eje y con factor $k=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.

Caso 1: $f(x,y)=(1{,}5x,1{,}5y)$, cambio de escala en un factor 1,5, $A=\begin{pmatrix}1{,}5 & 0\\ 0 & 1{,}5\end{pmatrix}$.

Caso 2: $f(x,y)=(-1{,}5x,-1{,}5y)$, cambio de escala en un factor 1,5 y rotación en π alrededor del origen, $A=\begin{pmatrix}-1{,}5 & 0\\ 0 & -1{,}5\end{pmatrix}$.

Caso 3: $f_i(x,y)=(-x,y)$, reflexión con respecto al eje y, $A_i=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$f_{ii}(x,y)=(-y,x)$, rotación en π/2 alrededor del origen con sentido antihorario, $A_{ii}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Caso 4: $f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$, rotación en π/4 alrededor del origen con sentido antihorario, $A=\begin{pmatrix}\cos(\pi/4) & -\operatorname{sen}(\pi/4)\\ \operatorname{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.

Caso 5: $f_i(x,y,z)=(-x,y,z)$, reflexión con respecto al plano coordenado (*yz*), $A_i=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$f_{ii}(x,y,z)=(-x,-y,z)$, rotación en π con respecto al eje *z* en sentido antihorario, $A_{ii}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.

Caso 1: a) Im(*f*): recta sobre la cual se proyecta; $\mathrm{Im}(f)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / y=x\}$.

Nu(*f*): recta que pasa por el origen y es perpendicular a aquella sobre la que se proyecta; $\mathrm{Nu}(f)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / y=-x\}$.

b) λ=0; $S_{\lambda=0}=\mathrm{Nu}(f)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / y=-x\}$.

λ=1; $S_{\lambda=1}=\mathrm{Im}(f)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / y=x\}$ (los vectores de este subespacio son invariantes).

No puede haber otro valor de λ pues esta transformación, salvo para los vectores que pertenecen a la recta $y=x$ implica cambio de dirección.

c) $f(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$; $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

Caso 2: a) Im(*f*)≡$\mathbf{R}^2$; Nu(*f*)=$\{\vec{0}_{\mathbf{R}^2}\}$.

b) λ=1; $S_{\lambda=1}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / y=x\}$ (los vectores que pertenecen a la recta sobre la que se refleja; subespacio invariante).

λ=–1; $S_{\lambda=-1}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / y=-x\}$ (los vectores que pertenecen a la recta que pasa por el origen y es perpendicular a aquella sobre la que se refleja; cada vector se transforma en su opuesto).

c) $f(x,y)=(y,x)$; $A=((a_{i,j}))=1-\delta_{i,j}=\begin{cases}a_{1,1}=a_{2,2}=0\\ a_{1,2}=a_{2,1}=1\end{cases}$.

Caso 3: a) Im(*f*): plano sobre el que se proyecta; $\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / y=0\}$.

Nu(*f*): recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano sobre el que se proyecta; $\mathrm{Nu}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / x=z=0\}$.

b) λ=0; $S_{\lambda=0}=\mathrm{Nu}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / x=z=0\}$.

λ=1; $S_{\lambda=1}=\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / y=0\}$ (los vectores de este subespacio son invariantes).

c) $f(x,y,z)=(x,0,z)$; $A=((a_{i,j}))=\delta_{i,j}-\delta_{2,2}=\begin{cases}1 \text{ si } (i=j=1)\vee(i=j=3)\\ 0 \text{ en otro caso}\end{cases}$.

Caso 4: a) Im(*f*): plano sobre el que se proyecta≡π.

Nu(*f*): recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano sobre el que se proyecta; $\vec{n}_\pi\cdot\vec{x}=0$.

b) $\lambda=0; S_{\lambda=0}=\mathrm{Nu}(f)$. $\lambda=1; S_{\lambda=1}=\mathrm{Im}(f)$.

c) $\pi\equiv x+y+z=0$.

Caso 5: a) $f(x,y,x)=(0,0,0)$ es transformación lineal;

$\mathrm{Im}(f)=\{\vec{0}_{\mathbf{R}^3}\}$, dim(Im($f$))$=0$; Nu($f$)=$\mathbf{R}^3$, dim(Nu($f$))$=3$.

b) Nu(f): el conjunto de todos los vectores paralelos a $\vec{v}_0$;

$\mathrm{Nu}(f)=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^3 / \vec{x}=\alpha\vec{v}_0 \;\; \forall\alpha\in\mathbf{R}\}$.

Im(f): plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\vec{v}_0$;

$\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / ax+by+cz=0\}$.

$$f(x,y,z)=(cy-bz,-cx+az,bx-ay);\; A=\begin{pmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{pmatrix}.$$

c) Si $\vec{v}_0=\vec{0}$, el único autovalor es $\lambda=0$ con $S_{\lambda=0}=\mathbf{R}^3$.

Si $\vec{v}_0\neq\vec{0}$, el único autovalor es $\lambda=0$ con $S_{\lambda=0}=$Nu(f).

Ejercicio 5.

5.1) r': $x-y=0$; **5.2)** r': $2x-7y=0$; **5.3)** r': $2x+y=0$; **5.4)** r': $x-2y=0$; **5.5)** r': $(8+5\sqrt{3})x+11y=0$

Ejercicio 6.

6.1) i. $\mathrm{Nu}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / x=y=0\}$; recta coincidente con el eje z.

$\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / z=0\}$; plano coordenado xy.

ii. $\lambda=0$; $S_{\lambda=0}=\mathrm{Nu}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / x=y=0\}$.

$\lambda=-1$; $S_{\lambda=-1}=\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / z=0\}$

iii. $$f(x,y,z)=(x\cos\theta-y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta+y\cos\theta,0); A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0\\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

iv. $$g(x,y,z)=(x,y,0); A_g=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$h(x,y,z)=(x\cos\theta-y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta+y\cos\theta,1); A_h=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0\\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(h\circ g)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=h\left(g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0\\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0\\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\,\mathrm{sen}\theta\\ x\,\mathrm{sen}\theta+y\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

6.2) i. Para $X=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$: $(f\circ g)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ es diferente de $(g\circ f)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\0\end{pmatrix}$.

Para $X=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$: $(f\circ g)\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$ es diferente de $(g\circ f)\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$.

ii. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$; $g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+y)/2\\(x+y)/2\\0\end{pmatrix}$; $(f\circ g)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x+y}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$; $(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/2\\x/2\\0\end{pmatrix}$.

O, en forma equivalente: $f(x,y,z)=(x,0,0)$; $g(x,y,z)=\left(\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x+y}{2},0\right)$;

$(f\circ g)(x,y,z)=\left(\dfrac{x+y}{2},0,0\right)$; $(g\circ f)(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2},0\right)$.

iii. $A_f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; $A_g=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

$A_{f\circ g}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A_f\cdot A_g$; $A_{g\circ f}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\1/2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A_g\cdot A_f$.

6.3) No son posibles : $g\circ h, f\circ g$. $(h\circ g)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2+x_3\\-3x_2+x_3\end{pmatrix}$; $(g\circ f)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_2\\0\\4x_1-8x_2\end{pmatrix}$;

$(f\circ h)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_3\\-2x_1-x_2+3x_3\\-2x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}$; $(h\circ f)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1-4x_2\\-2x_2\end{pmatrix}$.

Observación. Si en el par se pudiera utilizar una misma función, esto es la composición de una función consigo misma, sólo podría realizarse $g\circ g$.

6.4) $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3, x_2-x_3, x_3)$; $A_g=\left(A_f\right)^{-1}$.

6.5) Si se rota seis veces un ángulo $\theta=\pi/3$, se llega nuevamente al punto de partida. Esta situación indica que la potencia sexta de A será la matriz identidad de orden 2.

$A=\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}$; $A^6=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

6.6) Si al vector reflejado según el plano $\alpha\equiv x+y-z=0$, se le aplica nuevamente la transformación, o sea se lo vuelve a reflejar, se vuelve al punto de partida. Por lo tanto, la transformación resultante $f\circ f$ es la transformación identidad. Esto indica que $A^2=I$, es decir que A es involutiva.

$A=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&2/3\\-2/3&1/3&2/3\\2/3&2/3&1/3\end{pmatrix}$, $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. a)

$f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3 / f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3, 2x_2+3x_3, 3x_3)$

Autovalores: $\lambda=1$; $\lambda=2$; $\lambda=3$

$\lambda=1; S_{\lambda=1}=\{(x,0,0),\forall x\in\mathbf{R}\}; B=\{(1,0,0)\}\to B'_{S(\lambda=1)}=\{(1,0,0)\}$ base normalizada

$\lambda = 2; S_{\lambda=2} = \{(2y, y, 0), \forall y \in \mathbf{R}\}; B = \{(2,1,0)\} \to B'_{S(\lambda=2)} = \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)\right\}$

$\lambda = 3; S_{\lambda=3} = \left\{\left(\frac{5}{2}z, 3z, z\right), \forall z \in \mathbf{R}\right\}; B = \{(5,6,2)\} \to B'_{S(\lambda=3)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{65}}{13}, \frac{6\sqrt{65}}{65}, \frac{2\sqrt{65}}{65}\right)\right\}$

A es diagonalizable. Matriz de pasaje $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

No es posible hallar una matriz que diagonalice ortogonalmente a A. Esta matriz no es simétrica. Esto puede verse también fácilmente si se toma la base de autovectores y se la ortonormaliza

$$B_A = \{(1,0,0); (2,1,0); (5,6,2)\} \to B'_A = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\},$$

no se obtiene una base de autovectores que permita diagonalizar a A.

$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 / g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_2 + 4x_3)$

Autovalores: $\lambda = 2$ (multiplicidad 2); $\lambda = 3$

$\lambda = 2; S_{\lambda=2} = \{(x, 0, 0), \forall x \in \mathbf{R}\}; B = \{(1,0,0)\} \to B'_{S(\lambda=2)} = \{(1,0,0)\}$ base normalizada

$\lambda = 3; S_{\lambda=3} = \{(y, y, -2y), \forall y \in R\}; B = \{(1,1,-2)\} \to B'_{S(\lambda=3)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$

A no es diagonalizable.

Observar que si se ortonormaliza la base de autovectores, deja de ser una base de autovectores

$$B_A = \{(1,0,0); (1,1,-2)\} \to B'_A = \left\{(1,0,0); \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

$h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 /\ h(\vec{x}) = proy_\pi(\vec{x})$ proyección del vector $\vec{x}$ sobre el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$

$$h(\vec{x}) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right)$$

Autovalores: $\lambda = 1$ (multiplicidad 2); $\lambda = 0$

$\lambda = 1; S_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0\}; B = \{(-1,1,0); (1,1,-2)\} \to$

$B'_{S(\lambda=1)} = \left\{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$ base ortonormalizada

$\lambda = 0;\ \ S_{\lambda=0} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = y = z\}; B = \{(1,1,1)\} \to B' = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

Base de autovectores ortonormal

$B = \left\{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

A es diagonalizable. Matriz de pasaje $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

A es diagonalizable ortogonalmente. Matriz de pasaje $P=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.b)

i. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$; ecuación característica: $\lambda^2-3\lambda+2=0$.

Autovalores $\lambda_1=1;\lambda_2=2$. Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=1}=(-1,1)$, $S_{\lambda=1}=\{(x,-x),\forall x\in\mathbf{R}\}$;

$\vec{v}_{\lambda=2}=(-2,1)$, $S_{\lambda=2}=\{(-2y,y),\forall y\in\mathbf{R}\}$.

Es diagonalizable. $P=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D=P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ii. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda+3$; no existen autovalores reales ($\exists\, \lambda\notin\mathbf{R}$).

No es diagonalizable.

iii. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; polinomio característico $P(\lambda)=\lambda^2-25$; ecuación característica: $\lambda^2-25=0$.

Autovalores $\lambda_1=5;\lambda_2=-5$. Autovectores: $\vec{v}_{\lambda=1}=(1,2)$, $S_{\lambda=5}=\{(x,2x),\forall x\in\mathbf{R}\}$;

$\vec{v}_{\lambda=2}=(-2,1)$, $S_{\lambda=2}=\{(-2y,y),\forall y\in\mathbf{R}\}$.

$$D=P^{-1}\cdot B\cdot P=P^T\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

iv. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ecuación característica $(5-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda+5)=0$.

Autovalores $\lambda_1=\lambda_2=5$; $\lambda_3=1$. Autovectores $\vec{v}_{\lambda=1}=(1,1,0)$; $B\left(S_{\lambda=5}\right)=\{(-1,1,0);(0,0,1)\}$ base ortogonal.

Ortonormalizando los autovectores para hallar la matriz de pasaje ortogonal:

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D=P^{-1}\cdot F\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

vi. $G=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ecuación característica $\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=0$.

Autovalores $\lambda_1=2$. Autovectores $\vec{v}_{\lambda=2}=(1,1,-3)$. No existe la matriz de pasaje P.

Conceptualización e integración. Trabajo con parámetros.

Ejercicio 8.

8.1) i. Sí es suficiente;

$f(2,0,2) = f[(1,-1,2) + (1,1,0)] = f(1,-1,2) + f(1,1,0) = (0,3,1) + (1,2,-1) = (1,5,0)$.

ii. No. $\{(1,-1,2);(1,1,0)\}$ no es base de $\mathbf{R}^3$.

Es posible hallar los transformados de los vectores: $(a;b;c) \,/\, -a+b+c=0$.

8.2) No. $(-2,2,-4) = (-2)\cdot(1,-1,2) \ \wedge \ f(-2,2,-4) \neq (-2)\cdot f(1,-1,2)$

8.3) Si: $\{(1,-1,2);(1,1,-4);(1;0;-2)\}$ es base de $\mathbf{R}^3$. $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = \left(0,-2y+\frac{1}{2}z,x\right)$

8.4) $\{(1,-1);(1,1)\}$ es base de $\mathbf{R}^2$.

$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2 : \vec{x} = \alpha\cdot(1,-1) + \beta\cdot(1,1)$ y esta combinación lineal es única, por ser combinación lineal de vectores de una base.

Luego: $f(\vec{x}) = \alpha.\cdot f(1,-1) + \beta\cdot f(1,1)$, que es también combinación lineal única.

$f(x;y) = (4x-2y,-x-3y)$.

8.5) Existe la transformación lineal f, pero no es única: $\{(1,-1,2);(1,1,-4);(0,-2,6)\}$, no es base para $\mathbf{R}^3$ (Observación: $(0,-2,6) = (1,-1,2)-(1,1,-4)$.

Para definir alguna transformación lineal, basta con completar el conjunto $\{(1,-1,2);(1,1,-4)\}$, a una base para $\mathbf{R}^3$ y determinar el transformado de dicho vector.

Ejemplo 1: si $\begin{cases} f(1,-1,2) = (0,3,1) \\ f(1,1,-4) = (0,-4,1) \\ f(1,0,0) = (0,0,0) \end{cases} \Rightarrow f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \ / \ f_1(x,y,z) = \left(0,-2y+\frac{1}{2}z,-3y-z\right)$.

Ejemplo 2: si: $\begin{cases} f(1,-1,2) = (0,3,1) \\ f(1,1,-4) = (0,-4,1) \\ f(0,1,0) = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow$

$$f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f_2(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}x+y+\frac{1}{3}z, x+y+\frac{3}{2}z, \frac{4}{3}x+y+\frac{1}{3}z\right).$$

Ejercicio 9.

9.1) dim(Nu(f))=1 si $k=0 \vee k=-3/2$.

9.2) Por ejemplo, $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x_1,x_2,x_3) = (-x_1-x_2-x_3, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3)$.

9.3) $a=1 \wedge b=-1$; **9.4)** Por ejemplo, $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \,/\, f(x_1,x_2) = (-2x_1+x_2, -4x_1+2x_2)$.

Ejercicio 10.

10.1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; el polinomio característico es: $P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda$ y los autovalores que se obtienen resolviendo la ecuación característica, $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18.\lambda = 0$, son:

$$\lambda_1 = 0 \ \wedge \ \lambda_2 = 3 \ \wedge \ \lambda_3 = 6.$$

Los subespacios asociados son: $S_{\lambda=0} = \left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \,/\, \vec{x} = \alpha(-2,2,1), \forall\alpha \in \mathbf{R}\right\}$

$$S_{\lambda=3} = \left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \,/\, \vec{x} = \beta(1,2,-2), \forall\beta \in \mathbf{R}\right\}$$

$$S_{\lambda=6} = \left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \,/\, \vec{x} = \delta(2,1,2), \forall\delta \in \mathbf{R}\right\}$$

10.2) La transformación lineal es: $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = (3x+y\,,\,y+3z\,,\,y-z)$ y la correspondiente matriz asociada, utilizando la base canónica para $\mathbf{R}^3$, resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.3) i. La afirmación es verdadera dado que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores linealmente independientes, con un mismo autovalor, igual a cero, por lo cual se transforman en el vector nulo del segundo espacio, y $\{\vec{u}\,;\vec{v}\}$, es una base para el núcleo de la transformación lineal, que tendrá dimensión dos. Es posible agregar otro vector, linealmente independiente con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cuyo transformado también sea el vector nulo, con lo cual la dimensión para el núcleo será tres.

ii. El conjunto $\{(1,1,0);(0,1,1)\}$, debemos completarlo a una base para $\mathbf{R}^3$. Para completar a la base, debemos elegir vectores: $(a,b,c)/\,a-b+c \neq 0$.

Si el vector elegido es $(a,b,c) = (1,0,1) \to f(1,0,1) = (1,1,0)$ y para esta elección la transformación lineal es:

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\,,\,\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\,,0\right).$$

Ejercicio 11.

i. Ecuación Característica: $(1-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda) = 0$; autovalores: $\lambda_1 = 1$ (doble); $\lambda_2 = 3$ (simple).
La matriz sólo diagonaliza para $k=1$. $B = \{(1,0,0);\ (0,1,-2);\ (1,0,2)\}$.

ii. Ecuación Característica: $(\lambda-1) \cdot [-(\lambda^2-1)] = 0$; autovalores: $\lambda_1 = 1$ (doble); $\lambda_2 = -1$ (simple)
La matriz sólo diagonaliza para $k=0$. $B = \{(1,0,2);\ (0,1,-1);\ (0,1,1)\}$.