RESPUESTAS GUÍA DE EJERCITACIÓN 4 ESPACIOS VECTORIALES REALES

Ejercicio 1.

1.1) No
1.2) No
1.3) No, conjunto vacío
1.4) Si, plano coordenado *xy*
1.5) No
1.6) Si, plano que pasa por el origen
1.7) No, plano que no pasa por el origen
1.8) Si, recta que pasa por el origen
1.9) Si
1.10) No
1.11) No
1.12) Si, subespacio trivial: matriz nula

Ejercicio 2.
La cantidad de parámetros libres en cada subespacio, grado de libertad del conjunto o dimensión del subespacio es:

2.1) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ **2.2)** 1 **2.3)** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ **2.4)** $n-r(A)$

Ejercicio 3.
3.1) Si **3.2)** No **3.3)** Si

Ejercicio 4.
4.1) $k=0 \vee k=1$, infinitas soluciones. A es LD, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ resultan paralelos, pertenecen a la misma recta que pasa por el origen

4.2) $k=6$, solución única $\vec{v}=2\vec{v}_1+1\vec{v}_2$. A es LI, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ generan un plano al que pertenece $\vec{v}$

4.3) $k=0 \vee k=-\dfrac{3}{2}$, infinitas soluciones. A es LD, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ generan un plano que pasa por el origen

4.4) $k=1$, solución única $\vec{v}=1\vec{v}_1+1\vec{v}_2$. A es LI

4.5) $k=-2$, solución única $\vec{v}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\vec{v}_1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\vec{v}_2$. A es LI

4.6) Si $k\neq 0 \wedge k\neq h$, A es LI. Existe solución para $k=1$, $\vec{v}=1\vec{v}_1+0\vec{v}_2$
Si $k\neq 0 \wedge k=h$, A es LD. Sólo existe solución para $k=1$, infinitas soluciones
Si $k=0$, $\forall h$, A es LD. No hay solución

Ejercicio 5.
5.1.a) No **5.1.b)** No. Se puede eliminar uno cualquiera de los vectores y se sigue generando el mimo plano S que pasa por el origen, $S=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 / z=3x-2y\}$. Una base posible es el conjunto $B=\{(1,0,3);(0,1,-2)\}$, dim(S)=2. Un cambio podría ser $\vec{c}=(1,3,0)$, así A sería LI

5.2.a) LD si $a=-1 \vee b=-4$

5.2.b) $S_A=\left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & d\end{pmatrix}, \forall a, \forall d\in \mathbf{R}\right\}$, dim($S_A$)=2, $B_{SA}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

5.2.c) $S_A\cap S=\left\{\begin{pmatrix} w & -w \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \forall w\in \mathbf{R}\right\}$

5.2.d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

5.3.a) A es LI si $a\neq 1 \wedge a\neq -1 \wedge b\neq -a$
5.3.b) A genera un plano (dim 2) si: $(a=1 \wedge b\neq -1) \vee (a=-1 \wedge b\neq 1)$

5.4.a) $S_1=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 / y=0\}$, $\dim(S_1)=2$, $B_{S1}=\{(1,0,0);(0,0,-2)\}$

5.4.b) $S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,/ \begin{cases} y = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \right\}$, $\dim(S_2) = 1$, $B_{S2} = \{(2,0,2)\}$

5.4.c) $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x + y = 0\}$, $\dim(S_3) = 2$, $B_{S3} = \{(1,-1,0);(0,0,-3)\}$

Ejercicio 6.

6.1.a) *A* es LD ya una de las matrices se puede escribir como combinación lineal de las demás
6.1.b) *A* genera matrices donde $a_{2,2}$ es cero, y no se garantiza formar solamente matrices simétricas
6.1.c) No existe ningún vector del conjunto que genere el término lineal en x

6.2) $\dim(S_1)=2$, $B_{S1} = \{\vec{v}_1 = x^2 - x; \vec{v}_2 = 1\}$; $\dim(S_2)=1$, $B_{S2} = \{(-1,1,0,0)\}$;

$\dim(S_3)=3$, $B_{S3} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

6.3.a) $\dim(S_1)=3$ (matrices simétricas de orden 2); $\dim(S_2)=1$ (matrices antisimétricas de orden 2)

$B_{S1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $B_{S2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

6.3.b) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dfrac{x_2 + x_3}{2} \\ \dfrac{x_2 + x_3}{2} & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x_2 - x_3}{2} \\ -\dfrac{x_2 - x_3}{2} & 0 \end{pmatrix}, X_1 \in S_1, X_2 \in S_2$

$$X = X_1 + X_2 = \left[\frac{1}{2}\left(X + X^T\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(X - X^T\right)\right], X_1 \in S_1, X_2 \in S_2$$

$$X = X_1 + X_2 = \left[\frac{1}{2}\left(X + X^T\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(X - X^T\right)\right], X_1 \in S_1, X_2 \in S_2$$

Ejercicio 7.

7.1) *A* es base de un plano que pasa por el origen. *B* es base de una recta que pasa por el origen.
Si la recta está incluida en el plano, *C* es LD y por tanto no constituye una base de $\mathbf{R}^3$ ($\vec{v}_3$ resulta combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$)
Si la recta no está incluida en el plano, *C* es un conjunto de tres vectores LI y, por tanto, constituye una base de $\mathbf{R}^3$

7.3.a) Si $\lambda=0$, $\lambda\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$ $\dim(S_1)=2$, *B* es LD
Si $\lambda \neq 0$, $\lambda\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \perp$ a los otros dos vectores, $\dim(S_2)=3$, *B* es LI

7.3.b) Si $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = 0 \Rightarrow (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = \vec{0}$, $\dim(S_2)=2$, *C* es LD
Si $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \neq 0 \Rightarrow (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = k\vec{v}_2$, $\dim(S_2)=2$, *C* es LD
Si $\lambda \neq 0$, $\lambda\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \perp$ a los otros dos vectores, $\dim(S_2)=3$, *B* es LI

7.3.c) Si $\lambda=1$, $D = \{\vec{v}_1; 2\vec{v}_1\}$ es LD, $\dim(S_3)=1$
Si $\lambda \neq 1$, *D* es LI, $\dim(S_3)=2$

7.5) Si $\{\vec{a};\vec{b}\}$ es LD $\Rightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \lambda\vec{a}) \times \vec{c} = \vec{0} \times \vec{c} = \vec{0} \quad \forall \vec{c}$

7.6) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$

Ejercicio 8

8.1. **a)** V, al agregar otro vector siguen generando $\mathbf{R}^3$ pero pierden la independencia
b) V
c) V
d) F, no se puede asegurar, podría resultar LD o LI. Por ejemplo:
$\{\vec{v}_1 = \hat{\imath}; \vec{v}_2 = 2\hat{\imath}; \vec{v}_3 = \hat{k}\}$ es LD y $\{\vec{v}_1 = \hat{\imath}; \vec{v}_2 = 2\hat{\imath}\}$ es LD

$\{\vec{v}_1=\hat{\imath};\vec{v}_2=\hat{k};\vec{v}_3=2\hat{\imath}\}$ es LD y $\{\vec{v}_1=\hat{\imath};\vec{v}_2=\hat{k}\}$ es LI

e) F, no se puede asegurar. Por ejemplo:

$\{\vec{v}_1=\hat{\imath};\vec{v}_2=\hat{k};\vec{v}_3=\hat{\jmath};\vec{v}_4=2\hat{\imath}\}$ es SG y $\{\vec{v}_1=\hat{\imath};\vec{v}_2=\hat{k},\vec{v}_3=\hat{\jmath}\}$ es base de $\mathbf{R}^3$

$\{\vec{v}_1=\hat{\imath};\vec{v}_2=2\hat{\imath};\vec{v}_3=\hat{k};\vec{v}_4=\hat{\jmath}\}$ es SG y $\{\vec{v}_1=\hat{\imath};\vec{v}_2=2\hat{\imath};\vec{v}_3=\hat{k}\}$ no es base de $\mathbf{R}^3$

8.2) V; **8.3)** F; **8.4)** V; **8.5)** V; **8.6)** F; **8.7)** F

Ejercicio 9

9.1) $k=1 \vee k=-4$

9.2) $\dim(S)=2$; $B_S=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times 2} / x_1+x_2-2x_4=0\wedge -2x_2+x_3+2x_4=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-x_2+2x_4 & x_2\\ 2x_2-2x_4 & x_4\end{pmatrix},\forall x_2,\forall x_4\in\mathbf{R}\right\}$$

Ejercicio 10.

10.1) $B_{S1}=B_{S2}=B_{S3}=\{(1,0,1,1);(0,1,1,-1)\}$; **10.2)** $\vec{v}_1=(8,2);\vec{v}_2=(-5,-1)$

Ejercicio 11.

11.1) $\|\vec{x}\|_1=8;\|\vec{x}\|_2=\sqrt{29};\|\vec{x}\|_\infty=5$

11.2) $B_S=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

Ejercicio 12.

12.1) $<\vec{u},\vec{v}>=15$; **12.2)** $<p,q>=-4$

Ejercicio 13.

13.4) La única respuesta es $a=4/5$

13.5) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

14.6) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ (por ejemplo)

Ejercicio 14.

14.1) $\{(1,1,0);(0,1,1)\}\to B_S=\left\{\hat{v}_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);\hat{v}_2=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$

Aclaración: la respuesta dada no es la única válida debido a que hay infinitas bases posibles

14.2) $\vec{a}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\hat{v}_1+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\hat{v}_2$.

14.3) $proy_S\vec{b}=<\vec{b},\hat{v}_1>\hat{v}_1+<\vec{b},\hat{v}_2>\hat{v}_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

(Aclaración: esta respuesta es única, cualquiera sea la base elegida)

14.4) $<\left(\frac{7}{3},-\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right),(x_1,x_1+x_3,x_3)>=0,\forall x_1\in\mathbf{R}\wedge\forall x_2\in\mathbf{R}$ **15.5)** $d(P,\pi)=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

14.6) $S^\perp=\{(x_1,x_{21},x_{31})\in\mathbf{R}^3 / x_1+x_2=0\wedge x_2+x_3=0\}=\{(x_1,-x_1,x_1),\forall x_1\in\mathbf{R}\}$

14.7) $\vec{p}=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\in S,\vec{h}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\in S^\perp$. **14.8)** $proy_S(\overline{P_0P_1})=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.