RESPUESTAS GUÍA EJERCITACIÓN 2 MATRICES Y DETERMINANTES

Ejercicio 1.

$$A=((a_{i,j}))\in \mathbf{R}^{3\times 3},\quad A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix}$$

i) $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{\mathbf{2},1} & a_{\mathbf{2},2} & a_{\mathbf{2},3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \to i=2$ **ii)** $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,\mathbf{3}}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,\mathbf{3}}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,\mathbf{3}}\end{pmatrix} \to j=3$ **iii)** $\begin{pmatrix} a_{\mathbf{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{\mathbf{2,2}} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{\mathbf{3,3}}\end{pmatrix} \to i=j$

iv) $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{\mathbf{1,2}} & a_{\mathbf{1,3}}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{\mathbf{2,3}}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \to i<j$ **v)** $\begin{pmatrix} a_{\mathbf{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{\mathbf{2,1}} & a_{\mathbf{2,2}} & a_{2,3}\\ a_{\mathbf{3,1}} & a_{\mathbf{3,2}} & a_{\mathbf{3,3}}\end{pmatrix} \to i\geq j$ **vi)** $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{\mathbf{1,2}} & a_{\mathbf{1,3}}\\ a_{\mathbf{2,1}} & a_{2,2} & a_{\mathbf{2,3}}\\ a_{\mathbf{3,1}} & a_{\mathbf{3,2}} & a_{3,3}\end{pmatrix} \to i\neq j$

vii) $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{\mathbf{2,1}} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{\mathbf{3,2}} & a_{3,3}\end{pmatrix} \to i=j+1$ **viii)** $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{\mathbf{1,2}} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{\mathbf{2,3}}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \to i=j-1$ **ix)** $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{\mathbf{1,3}}\\ a_{2,1} & a_{\mathbf{2,2}} & a_{2,3}\\ a_{\mathbf{3,1}} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \to i+j=4$

Ejercicio 2.

2.1) **a)** $A=\begin{pmatrix} -4 & -6 & -8\\ -1 & -3 & -5\end{pmatrix}$; **b)** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$; **c)** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

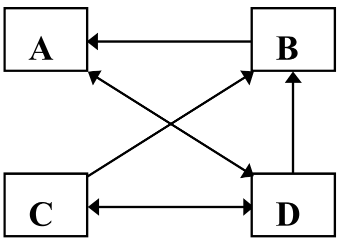
2.2) **a)** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; **b)** $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4\\ 3 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 4 & 5 & 0 & -1 & -2\\ 5 & 6 & 7 & 0 & -1\end{pmatrix}$; **c)** $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5}\end{pmatrix}$$

$\delta_{i+j,6}=1$ $\delta_{i,3}=1$ $\delta_{i,4}=1$

Ejercicio 3.

3.1) $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; **3.2)**



Ejercicio 4.

4.1) $\begin{pmatrix}7 & 1\\ 9 & 6\end{pmatrix}$; **4.2)** $\alpha=-1/2 \wedge \beta=3$; **4.3)** $A\cdot C-C\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$; $C\cdot A-A\cdot C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$

4.4) $\begin{pmatrix}-7 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; **4.5)** $B^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \forall\, n\in\mathbf{N}$; $C^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}, \forall\, n\in\mathbf{N}$

Ejercicio 6.

6.1) $S=\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\right\}$; **6.2)** $\alpha=0 \;\vee\; \alpha=2$

6.3) $S=\left\{\begin{pmatrix}3 & -5/7\\ 0 & 4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 0 & 4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3 & 5/7\\ 0 & -4\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 7.

7.1) n^2; **7.2)** n; **7.3)** 1; **7.4)** $\dfrac{n.(n+1)}{2}$; **7.5)** $\dfrac{n.(n-1)}{2}$; **7.6)** $\dfrac{n.(n+1)}{2}$

Ejercicio 9.

9.7) Sugerencia. Primer paso: $F_1 \leftarrow F_1+F_2+F_3+F_4$. Segundo paso: $C_j \leftarrow C_j - C_1,\, j=2,3,4$

Ejercicio 10.

10.1) 0; **10.2)** –166

Ejercicio 11.

11.1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; **11.2)** $B^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{a-4} & -\dfrac{2}{a-4}\\ -\dfrac{2}{a-4} & \dfrac{1}{a-4}\end{pmatrix}$ con $a\neq 4$, para $a=4$ el det(B)=0 y, por lo tanto, no existe B^{-1}; **11.3)** no existe C^{-1} pues C no es una matriz cuadrada

11.4) $D^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$; **11.5)** $E^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11 & -38\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

11.6) **a)** Si $F=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, para $a\neq 0$ $F^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{a} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a}\end{pmatrix}$. Con $a=0$, no existe F^{-1}

11.6) **b)** Si $G=\begin{pmatrix}d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{pmatrix}$, para $d_1d_2d_3\neq 0$ $G^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{d_1} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{d_2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{d_3}\end{pmatrix}$.

Si algún elemento de la diagonal es nulo, $\exists\, i=1, 2, 3$ tal que $d_i=0$, no existe G^{-1}

Ejercicio 12.

12.a) $k=-8$; **12.b.i)** $h=0$; **12.b.ii)** $h=-3$

Ejercicio 13.

13.2) $\lambda = -a/c \wedge \mu = -b/c,\ c \neq 0$

Ejercicio 14.

14.1) A es una matriz ortogonal propia pues $A^{-1} = A^T, \det(A) = 1$; B no es ortogonal

14.2) Deben satisfacerse las siguientes condiciones: $\Rightarrow a = 0 \wedge (c = 1 \vee c = -1) \wedge (b = 1 \vee b = -1)$, lo que conduce a las siguientes posibles matrices M: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

14.3) $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}} \Rightarrow a_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{i,i} = 1 \vee a_{i,i} = -1 & i = j \end{cases}$

Ejercicio 16.

16.1) El rango de A es 2 y el rango de B es 3

16.2) Si $\alpha = 0$ el rango de la matriz A es cero y si $\alpha \neq 0$ el rango de la matriz A es 2

16.3) $\alpha = 1$

Ejercicio 19.

17.1) V; **17.2)** F; **17.3)** V; **17.4)** F; **17.5)** F; **17.6)** F; **17.7)** F; **17.8)** V; **17.9)** F

Miscelánea

M1.a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$P^n = \begin{cases} I & n \text{ es par} \\ P & n \text{ es impar} \end{cases},\ Q^n = \begin{cases} I & n \text{ es par} \\ Q & n \text{ es impar} \end{cases}.$$

M2.a) $X^2 = B \cdot A^T$; **M2.b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

M4 $A \cdot (I - A)^n = A$

Aplicaciones

A1.b) $V_1 = \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,31 \\ 0,22 \end{pmatrix};\ V_2 = \begin{pmatrix} 0,422 \\ 0,265 \\ 0,313 \end{pmatrix}; \ldots;\ V_{k \to \infty} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A2. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$; **f)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **g)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, **i)** $A = \begin{pmatrix} a & d & e & 0 \\ d & b & f & 0 \\ e & f & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g \end{pmatrix}$; **j)** $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$