GUÍA DE EJERCITACIÓN 2 MATRICES Y DETERMINANTES

Álgebra de Matrices sobre el Cuerpo de los Números Reales - Propiedades

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Nomenclatura: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}; A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right); a_{i,j} \in \mathbf{R};\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$

Matriz nula: $O \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}; O=((0))$ Matriz identidad: $I \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}; I=\left(\left(\delta_{i,j}\right)\right)$

Notación: Delta de Kronecker: $\delta_{r,t}=\begin{cases} 1 & r=t \\ 0 & r\neq t \end{cases}$ (si ambos subíndices son iguales, vale 1; sino 0)

Matriz escalar: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}, a \in \mathbf{R}; A=\left(\left(a\cdot\delta_{i,j}\right)\right)$ Matriz diagonal: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}; A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right); a_{i,j}=0 \quad \forall i\neq j$

Matriz triangular superior (inferior): $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}; A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right); a_{i,j}=0 \quad \forall i>j \quad (\forall i<j)$

Igualdad: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right), B=\left(\left(b_{i,j}\right)\right), A=B$ si $a_{i,j}=b_{i,j} \ \forall(i,j)$

a) Para la operación suma

Definición: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right), B=\left(\left(b_{i,j}\right)\right); A+B\overset{def}{=}\left(\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)\right) \quad \forall(i,j)$

a.1 Ley de composición interna: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \quad A+B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$

a.2 Propiedad conmutativa: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \quad A+B=B+A$

a.3 Propiedad asociativa: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall C \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \ A+(B+C)=(A+B)+C$

a.4 Elemento neutro: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \exists O \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}} \ / \ A+O=A$

a.5 Elemento opuesto: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \exists(-A) \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}} \ / \ A+(-A)=O,\ -A=\left(\left(-a_{i,j}\right)\right)$

b) Para la operación producto de un escalar por una matriz

Definición: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, k \in \mathbf{R}, A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right);\ k\cdot A\overset{def}{=}\left(\left(k\cdot a_{i,j}\right)\right) \ \forall(i,j)$

b.1 Ley de composición externa: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall k \in \mathbf{R},\ k\cdot A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$

b.2 Notación: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall k \in \mathbf{R},\ k\cdot A=A\cdot k$

b.3 Propiedad asociativa mixta: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall k \in \mathbf{R}, \forall p \in \mathbf{R},\ k\cdot(p\cdot A)=(k\cdot p)\cdot A$

b.4 Elemento neutro: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \exists 1 \in \mathbf{R} \ / \ 1\cdot A=A$

b.5 Observación: $k\cdot O=O \ \forall k \in \mathbf{R}$; $0\cdot A=O \ \forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$

c) Para ambas operaciones combinadas

Propiedades distributivas: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \forall k \in \mathbf{R}, \forall p \in \mathbf{R}$

c.1 $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$ **c.2** $(k+p)\cdot A=k\cdot A+p\cdot A$

d) **Para el producto de matrices y otras operaciones combinadas**

Definición: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}, A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right), B = \left(\left(b_{i,j}\right)\right); \quad A \cdot B \overset{def}{=} C \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times s}}$ tal que

$$C = \left(\left(c_{i,j}\right)\right) \quad c_{i,j} = \sum_{h=1}^{n}\left(a_{i,h} \cdot b_{h,j}\right) \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,s \,.$$

d.1 Propiedad asociativa: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}, C \in \mathbf{R}^{\mathbf{s\times q}}$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

d.2 Propiedad asociativa mixta: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}, k \in \mathbf{R}$, $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$

d.3 Propiedad predistributiva: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}, C \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

d.4 Propiedad postdistributiva: $B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, C \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}$, $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

d.5 Elemento neutro: $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \exists I \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \,/\, A \cdot I = A$; $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, \exists I \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times m}} \,/\, I \cdot A = A$

e) **Para la transposición**

Definición: $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right); A^T \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times m}}, A^T \overset{def}{=} \left(\left(a_{j,i}\right)\right) \quad \forall (i;j)$

e.1 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$, $\left(A^T\right)^T = A$

e.2 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}, k \in \mathbf{R}$, $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$

e.3 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$, $\forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$, $(A + B)^T = A^T + B^T$

e.4 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times n}}$, $\forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times s}}$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

e.5 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}, h \in \mathbf{N}$, $\left(A^h\right)^T = \left(A^T\right)^h$

f) **Para la inversa de matrices cuadradas**

Matriz inversa : $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0, \ \exists A^{-1} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \ / \ A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

A se denomina invertible, regular o no singular

f.1 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0$, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

f.2 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0$, $\forall k \in \mathbf{R} - \{0\}$, $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$

f.3 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0$, $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

f.4 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0, \forall h \in \mathbf{N}$, $\left(A^{-1}\right)^h = \left(A^h\right)^{-1}$

f.5 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0$, $\forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(B) \neq 0$, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

g) **Para el determinante de matrices cuadradas**

g.1 $O \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$, $\det(O) = 0$

g.2 $I \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$, $\det(I) = 1$

g.3 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$, A matriz triangular, $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \cdots \cdot a_{n,n}$

g.4 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$, $\det\left(A^T\right) = \det(A)$

g.5 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}, k \in \mathbf{R}$, $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$

g.6 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}, \forall B \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

g.7 $\forall A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}} \wedge \det(A) \neq 0$, $\det\left(A^{-1}\right) = [\det(A)]^{-1}$

g.8 Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n\times n}}$

- **g.8.a** al intercambiar entre si dos filas (o dos columnas) de $A \Rightarrow \det(A)$ cambia de signo
- **g.8.b** si A tiene dos filas (o dos columnas) iguales $\Rightarrow \det(A) = 0$

g.8.c si A tiene dos filas (o dos columnas) proporcionales $\Rightarrow \det(A) = 0$

g.8.d si A tiene una fila (o una columna) de ceros $\Rightarrow \det(A) = 0$

g.8.e si a los elementos de una línea de un determinante se le suman los elementos correspondientes de otra línea paralela, el determinante no se modifica el valor del determinante.

h) **Adjunto de un elemento de una matriz cuadrada y matriz Adjunta**

Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}}$, $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$.

h.1) Para cada elemento $a_{i,j}$ de A, se define como

menor complementario de $a_{i,j}$: $M_{i,j} = \det(m_{i,j}) \in \mathbf{R}$ donde $m_{i,j} \in \mathbf{R}^{\mathbf{(n-1)\times(n-1)}}$ es la submatriz que resulta de suprimir en A, la fila i-ésima y la columna j-ésima.

adjunto o cofactor de $a_{i,j}$: $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(m_{i,j}) \in \mathbf{R}$

h.2) Matriz adjunta (o de cofactores) de A: $Adj(A) = \left(\left(A_{i,j}\right)\right) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}}$

h.2.a) $Adj(A)^T = Adj(A^T)$ **h.2.b)** $A \cdot Adj(A)^T = Adj(A)^T \cdot A = \det(A) \cdot I$

i) **Falacias a evitar cuidadosamente**

Téngase presente que, en general:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$; obs.: cuando $A \cdot B = B \cdot A$ las matrices A y B se denominan conmutativas o conmutables.
- $A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow B = C$; obs.: $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$ sólo si $\exists A^{-1}$
- $A \cdot B = O \not\Rightarrow A = O \vee B = O$; $A^2 = O \not\Rightarrow A = O$
- $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$; $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

j) **Algunas matrices reales cuadradas especiales**

Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}}, A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$

- A es nilpotente de índice p si $\exists p \in \mathbf{N}_{>1} / A^p = O \wedge A^{p-1} \neq O$
- A es idempotente de índice p si $\exists p \in \mathbf{N}_{>1} / A^p = A \wedge A^{p-r} \neq A \quad r = 1, \cdots, p-2$
- A es involutiva de índice p si $\exists p \in \mathbf{N}_{>1} / A^p = I \wedge A^{p-r} \neq I \quad r = 1, \cdots, p-1$
- A es simétrica si $A^T = A$
- A es antisimétrica si $A^T = -A$
- si $\det(A) \neq 0$, A es ortogonal si $A^T = A^{-1}$ o equivalentemente si $A \cdot A^T = I$

Obs: siendo A una matriz ortogonal, se dice propia si $\det(A) = 1$ o impropia si $\det(A) = -1$

k) **Algunas matrices complejas**

Sea $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{m \times n}}$, $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$; es decir que $a_{i,j} \in \mathbf{C}$; $i = 1,2,\cdots,n$; $j = 1,2,\cdots,m$; $n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}$

k.1) Matriz transpuesta de A: $A^T \in \mathbf{C}^{\mathbf{n \times m}}$, $A^T \stackrel{def}{=} \left(\left(a_{j,i}\right)\right) \ \forall (i; j)$

k.2) Matriz conjugada de A: $\overline{A} \in \mathbf{C}^{\mathbf{m \times n}}$, $\overline{A} \stackrel{def}{=} \left(\left(\overline{a_{i,j}}\right)\right) \ \forall (i; j)$ donde $\overline{a_{i,j}}$ es el complejo conjugado de $a_{i,j}$

k.3) Matriz transpuesta conjugada de A: $A^* \in \mathbf{C}^{\mathbf{n \times m}}$, $A^* \stackrel{def}{=} \left(\left(\overline{a_{j,i}}\right)\right) \ \forall (i; j)$

k.4) Si $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{n \times n}}$ se tienen las siguientes matrices cuadradas complejas especiales:

- A es hermítica si $A^* = A$
- A es antihermítica si $A^* = -A$
- A es unitaria si $A^* = A^{-1}$ o equivalentemente $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$
- A es normal si $A \cdot (A^*)^T = (A^*)^T \cdot A$

Ejercicio 1.

Identificación de los elementos de una matriz mediante sus coordenadas o índices de ubicación. Generalizaciones a matrices de orden arbitrario.

Dada la matriz $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{R}^{3\times3}$, marcar sobre ella los elementos $a_{i,j}$ tales que:

i) $i = 2$; **ii)** $j = 3$; **iii)** $i = j$; **iv)** $i < j$; **v)** $i \geq j$; **vi)** $i \neq j$; **vii)** $i = j+1$; **viii)** $i = j-1$; **ix)** $i + j = 4$.

Ejercicio 2.

Construcción de una matriz dada leyes de formación de sus elementos en función de condiciones sobre los índices de ubicación de sus elementos. Empleo de distintos tipos de presentación para las leyes. Generalizaciones.

2.1) Construir la matriz $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{R}^{2\times3}$ según las definiciones dadas en cada caso:

2.1.a) $a_{i,j} = i^2 - 2j - 3$; **2.1.b)** $a_{i,j} = \begin{cases} i-j & \text{si } i < j \\ i+j & \text{en otro caso} \end{cases}$;**2.1.c)** $a_{i,j} = 3\delta_{i,j} - 1$.

2.2) Construir la matriz $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{R}^{4\times5}$ según las definiciones dadas en cada caso:

2.2.a) $a_{i,j} = (-1)^{i+j}$; **2.2.b)** $a_{i,j} = \begin{cases} i-j & \text{si } i \leq j \\ i+j & \text{en otro caso} \end{cases}$; **2.2.c)** $a_{i,j} = \delta_{i,3} + \delta_{j,4} + \delta_{i+j,6}$.

Notación: $\delta_{r,t}$ Delta de Kronecker, si ambos índices son iguales, vale 1; sino 0.

Ejercicio 3.

Recodificación de información, de distinta índole, en forma matricial. Valoración del empleo de matrices como medios eficientes para cubrir dicho objetivo. Creación de códigos propios.

Interpretar y completar las siguientes matrices.

3.1) Sea M la matriz de comunicación que representa a la red esquematizada en la figura 1, consistente de 6 nodos los cuales pueden o no transmitir información entre sí, construida con la siguiente convención:

* se establece una relación biunívoca entre el nombre del nodo y la sucesión de los números naturales, correspondiendo: **A**↔1, **B**↔2, **C**↔3, **D**↔4, **E**↔5, **F**↔6.

* $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ envía información al nodo } j \text{, con } i \neq j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

Por ejemplo: $m_{2,3} = 1$; $m_{3,2} = 0$; $m_{4,4} = 0$

Escribir la matriz M.

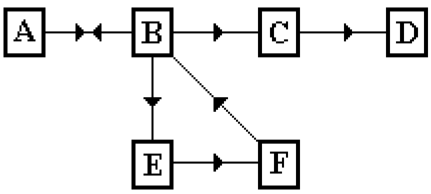
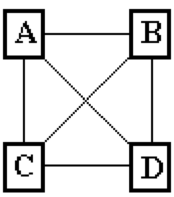


Figura 1. Gráfico del sistema de comunicación

3.2) Sea M la matriz de comunicación entre cuatro puntos de una ciudad escrita con la misma convención que en el ejercicio 3.1). Indicar en el esquema de la figura 2 mediante flechas el sentido de circulación de las calles que los vinculan. En la eventualidad de no tener conexión alguna, eliminar la traza correspondiente.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2. Esquema de los cuatro puntos de la ciudad y matriz de circulación asociada

3.3) Sea conocida la red de calles que se muestra en la figura 3 (a).

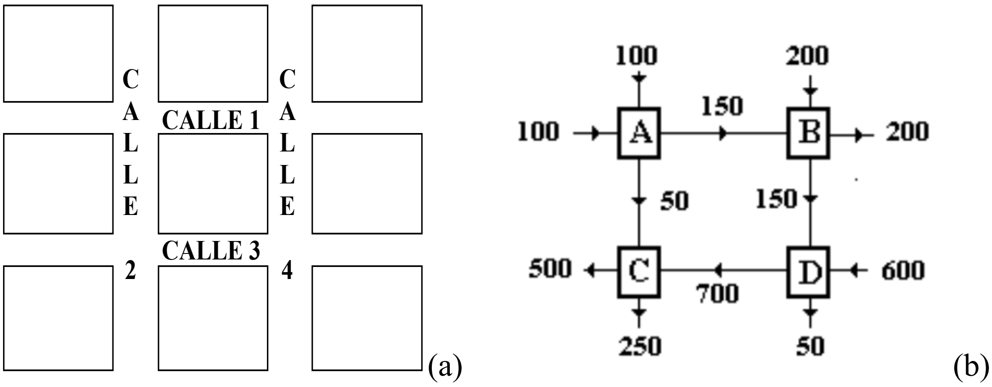


Figura 3. (a) Red de calles, (b) esquema de información del tráfico

La figura 3 (b) corresponde al esquema de información de tráfico de dicha zona. Cada calle tiene un sólo sentido de circulación representado por el sentido de las flechas en 3 (b). Los números en dicho croquis indican la cantidad de coches/hora que pasan por el segmento de calle donde están ubicados. Crear una matriz de tráfico correspondiente, es decir una matriz que contenga exactamente la información que el esquema pero escrita en un cuadro de valores numéricos, explicando la manera de interpretarla esto es dar las pautas del código de lecto-escritura.

Ejercicio 4.

Operaciones elementales entre matrices. Inducción de hipótesis a partir de resultados particulares.

Dadas las siguientes matrices pertenecientes a $\mathbf{R}^{2x2}$, realizar las operaciones pedidas:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}2 & 5/2\\ -3/2 & 2\end{pmatrix}.$$

4.1) Calcular la combinación lineal: $3{\cdot}A-2{\cdot}B+C$

4.2) Hallar los números reales α y β que verifiquen la igualdad: $\alpha{\cdot}A+\beta{\cdot}B=D$

4.3) Obtener: $A{\cdot}C-C{\cdot}A$. ¿Es necesario realizar este cálculo o el resultado será, sin lugar a duda, la matriz nula? ¿Qué resultado espera para $C{\cdot}A-A{\cdot}C$?

4.4) Determinar la relación: $A{\cdot}B-B{\cdot}C^2$

4.5) Calcular: B^2; B^3; B^4; C^2; C^3; C^4. Inducir una hipótesis para B^n y C^n, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Ejercicio 5.

Destreza en el manejo de la factibilidad de operaciones matriciales en relación con el orden de las mismas. Formulación de justificaciones para validar deducciones basadas en una información dada.

Analizar los siguientes enunciados y resolver la consigna propuesta.

5.1) Si A y B son matrices tales que las operaciones A+B y $A{\cdot}B$ son realizables, entonces tanto A como B son matrices cuadradas y son del mismo orden. Probar la afirmación anterior.

5.2) Si $A\cdot B\in\mathbf{R}^{nxn}$, ¿esta información es suficiente para garantizar que el producto $B\cdot A$ se puede realizar? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, ¿qué orden tiene dicho producto? En caso negativo, dar ejemplos numéricos donde se visualice la situación.

5.3) Si tanto $A{\cdot}B$ como $B{\cdot}C$ son realizables, ¿también lo es $(A{\cdot}B){\cdot}C$?. Explicar.

5.4) Sea A una matriz triangular superior de orden n, tal que su cuadrado da por resultado la matriz nula. ¿Necesariamente los elementos de la diagonal de A ($a_{i,i}$ con i = 1, ..., n) deben ser iguales a cero? Explicar.

Ejercicio 6.

Planteo y resolución de ecuaciones presentadas como relaciones entre matrices. Búsqueda y presentación de todas las respuestas posibles.

6.1) Hallar todas las matrices A diagonales de orden 2 tales que verifiquen la igualdad

$$A^2+2A-8I=O,$$

donde O es la matriz nula de orden 2.

6.2) Dada la matriz A, averiguar para que valores de $\alpha \in \mathbf{R}$, la matriz M es diagonal siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha-1 \end{pmatrix} \qquad M = A^2 + 2\cdot A - 11\cdot I.$$

6.3) Hallar todas las matrices triangulares superiores X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.

Identificación de las características de matrices cuadradas especiales. Trabajo con casos generales. Aproximación al concepto de grados de libertad de una estructura.

Calcular la cantidad máxima de elementos arbitrarios que posee una matriz $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ si:

7.1) A es una matriz cualquiera **7.2)** A es diagonal **7.3)** A es escalar

7.4) A es simétrica **7.5)** A es antisimétrica **7.6)** A es triangular superior

Ejercicio 8.

Demostraciones empleando propiedades generales de las operaciones matriciales y características particulares de las matrices dadas.

Demostrar cada uno de los siguientes ítems.

8.1) Sean A y $B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ conmutativas (o conmutables) entonces:

8.1.a) $(A + B)\cdot(A - B) = A^2 - B^2$ **8.1.b)** $(A + B)$ y $(A - B)$ son conmutativas.

8.2) Dada una matriz cualquiera $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{mxn}}$, la operación $(A^T\cdot A)$ es siempre realizable y su resultado es una matriz simétrica.

8.3) Sea B una matriz cualquiera de orden n, entonces $(B - B^T)$ es antisimétrica.

8.4) Sean A y $B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$, conmutables, donde A es simétrica y B es antisimétrica, entonces $(A \cdot B)$ es antisimétrica.

8.5) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ es antisimétrica y $B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxm}}$ entonces $(B^T\cdot A\cdot B)$ es antisimétrica.

8.6) Sean A y $B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$. Si A es idempotente de índice 2, entonces $B = 2\cdot A - I$ es involutiva de igual índice.

Ejercicio 9.

Destreza en el uso de las propiedades de los determinantes.

Sin desarrollar los determinantes, demostrar las siguientes identidades, mencionar las propiedades utilizadas.

9.1) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

9.2) $$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ b_1 - c_1 & b_2 - c_2 & b_3 - c_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

9.3) $$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9.4) $$\begin{vmatrix} z & 1 & x+y \\ y & 1 & x+z \\ x & 1 & y+z \end{vmatrix} = 0$$

9.5) $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = b_1 \cdot b_2$$

9.6) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & 0 & c & d \\ -a & -b & 0 & d \\ -a & -b & -c & 0 \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

9.7) $$\begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & 1 + a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & 1 + a_3 & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & 1 + a_4 \end{vmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

9.8) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 1 & a & a & a \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)^3$$

Ejercicio 10.

Destreza en el cálculo de determinantes. Utilización de propiedades para abreviar la resolución numérica.

Calcular los siguientes determinantes, indicando las propiedades usadas.

10.1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **10.2)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Ejercicio 11.

Condiciones de existencia y cálculo de matrices inversas.

Hallar, en caso de ser posible, las inversas de las siguientes matrices. En caso de no existir, indicar el porque.

11.1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **11.2)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ **11.3)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

11.4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ **11.5)** $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.6) **a)** $F \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ con F una matriz escalar; **b)** $G \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ con G una matriz diagonal. Generalizar estos dos últimos resultados para matrices con las mismas características que las dadas pero de orden n.

Ejercicio 12.

Combinaciones de distintas operaciones entre matrices. Cálculo de parámetros para que se cumplan condiciones establecidas.

12.a) ¿Para qué valores de $k \in \mathbf{R}$, M^2 es una matriz simétrica? M es tal que

$$M + 4 \cdot A^{-1} = B^T \cdot C + D,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} k & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

12.b) Si $M = P^{-1} \cdot A \cdot P$ donde $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} h & h+3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,

i) hallar todos los valores $h \in \mathbf{R}$ para los cuales M resulta una matriz antisimétrica;
ii) hallar todos los valores $h \in \mathbf{R}$ para los cuales M resulte una matriz no inversible.

Ejercicio 13.

Aplicación del concepto de matriz inversa. en matrices de orden n-ésimo.

13.1) Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$, inversible, tal que $A^2 + 2 \cdot A - 8 \cdot I = O$; demostrar que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A + 2I).$$

13.2) Sea A una matriz cuadrada de orden n, no singular (inversible), que verifica la siguiente igualdad: $aA^2 + bA + cI = O$, donde a, b y c son números reales con $c \neq 0$. Hallar los números λ y μ para los cuales se verifica que: $A^{-1} = \lambda A + \mu I$.

Ejercicio 14.

Identificación de matrices ortogonales.

14.1) Verificar si las siguientes matrices son ortogonales. En caso afirmativo clasificarlas en propias o impropias.

$$A=\begin{pmatrix}12/13 & 5/13\\ -5/13 & 12/13\end{pmatrix} \qquad\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

14.2) ¿Qué valores deben tomar a, b, $c \in \mathbf{R}$ para que $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}$ sea ortogonal?

14.3) ¿Qué condiciones deben cumplir los elementos de una matriz diagonal de orden n para ser ortogonal?

Ejercicio 15.

Demostraciones basadas en propiedades generales de las operaciones matriciales y características particulares de las matrices.

Realizar las siguientes demostraciones, dejando indicadas claramente las hipótesis, tesis y propiedades utilizadas en cada desarrollo.

15.1) Sean $A, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ matrices inversibles. Si A y B son conmutativas, entonces sus inversas también lo son.

15.2) Sean $A, C, D \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ tales que verifican $A=C^{-1}\cdot D\cdot C$, entonces $A^k=C^{-1}\cdot D^k\cdot C \quad k\in\mathbb{N}$.

15.3) Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ simétrica e inversible, entonces A^{-1}es simétrica.

15.4) Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

15.5) Sean $A, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ ortogonales, entonces $(A\cdot B)$ es ortogonal

15.6) Sean $A, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$. Si A es antisimétrica y B es ortogonal, entonces $M=B^{-1}\cdot A\cdot B$ es antisimétrica.

15.7) Sean $D, E, F \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$. Si D es ortogonal, E es simétrica y $F=E\cdot D$, entonces $E^2=F\cdot F^T$.

Ejercicio 16.

Adquisición del concepto de rango. Análisis de la variación del rango de una matriz de acuerdo a los distintos valores de un parámetro contenido en la misma.

Resolver según lo pedido en cada ítem.

16.1) Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ y el de $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

16.2) Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}\alpha & 5\alpha & -\alpha\\ 2\alpha & \alpha & 10\alpha\\ -\alpha & -2\alpha & -3\alpha\end{pmatrix}$ para los distintos valores de $\alpha \in \mathbf{R}$.

16.3) ¿Para qué valores de α, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 10 & \alpha\\ 4 & 8 & 18 & \alpha+6\\ 10 & 18 & 40 & 17\\ 1 & 7 & \alpha+16 & 3\end{pmatrix}$ es 2?

Ejercicio 17.

Análisis de la validez de proposiciones. Integración de conocimientos. Demostraciones y búsqueda de contraejemplos.

Justificar si son verdaderas o falsas, cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera, demostrarla. Si es falsa, proponer un contraejemplo.

17.1) Si $A, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{2x2}} \;\wedge\; A\cdot B=O \;\wedge\; A+B=\mathrm{I} \;\Rightarrow\; A^2=A$.

17.2) Si A, B $\in \mathbf{R}^{\mathbf{2x2}} \;\wedge\; \det(A-\mathrm{B})=0 \;\Rightarrow\; \det(A)=\det(B)$.

17.3) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{3x3}} \;\wedge A=-A^{\mathrm{T}} \Rightarrow\; \det(A)=0$.

17.4) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{3x3}} \;\wedge A=A^{\mathrm{T}} \Rightarrow\; (-A)$ es antisimétrica.

17.5) Si $k=3 \wedge A \in \mathbf{R}^{\mathbf{3x3}} \;\wedge\; \det(A)=2 \;\Rightarrow\; \det[(k\cdot A)^{-1}]=-1/54$.

17.6) Si $A, B \in \mathbf{R}^{\mathbf{2x2}} \;\wedge\; \det(A)=\det(B) \;\Rightarrow\; \det(A+B)=2\det(A)$.

17.7) Si A es una matriz diagonal de orden 2 y todos los elementos de la diagonal principal se diferencian entre sí, cualquier matriz triangular de orden 2 es conmutativa con A.

17.8) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}} \;\wedge A$ es nilpotente de índice 2 ($A^2=O$), entonces A no es inversible.

17.9) Si el determinante de una matriz de orden 2 es igual a 1 ó a -1, entonces la matriz es ortogonal.

Miscelánea

M1 Sean P, Q, A y S matrices de orden 5 tales que cumplen con la condición

$$S = A + PAQ + P^2AQ^2 + P^3AQ^3 + P^4AQ^4 + P^5AQ^5,$$

siendo Q la matriz opuesta de P y $P = ((p_{i,j}))$ con $p_{i,j} = \delta_{i,6-j}$.

M1.a) Hallar las potencias naturales de P y de Q, esto es $P^n, Q^n, n \in \mathbf{N}$.

M1.b) Demostrar que $(PSQ - S)$ da por resultado la matriz nula de orden 5.

M2 Sean $A, B, X \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ matrices inversibles tales que verifican la igualdad

$$B^{-1} \cdot X = \left[X \cdot \left(A^T\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

M2.a) Despejar, usando propiedades de las operaciones matriciales, X^2 de la igualdad dada en función de A, B, sus respectivas inversas y/o traspuestas.

M2.b) Escribir las matrices A y B sabiendo que n=2, $A = \left(\left(a_{i,j}\right)\right)$ es simétrica con $a_{i,j} = 3i - 2j \quad i \le j$, $B = \left(\left(b_{i,j}\right)\right)$ es triangular superior con $b_{i,j} = i + j$ en los elementos no nulos. Bajo estas condiciones, evaluar numéricamente a la matriz X^2 despejada en el ítem anterior.

M3 Demostrar que es imposible que una matriz $A\in\mathbf{R}^{nxn}$ invertible ($\exists A^{-1}$) resulte nilpotente (A es nilpotente de índice p, si existe $p\in\mathbf{N}$ tal que $A^p=O$, donde O es la matriz nula de orden n).

M4 Sea $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ tal que $A^2 = O$ (matriz nula de orden n), hallar $A \cdot (I - A)^n$ donde I es la matriz identidad de orden n y $n \in \mathbf{N}_{\ge 2}$. Mencionar las propiedades usadas.

Aplicaciones

A1 Matriz de Probabilidad

Una matriz de probabilidad P es toda matriz cuadrada que cumple las siguientes dos propiedades:
i) cada uno de sus elementos es no negativo ($p_{i,j} \ge 0$)
ii) la suma de los elementos de cada columna, o de cada fila según se defina, es exactamente igual a 1.

Considerar un caso en el cual se hacen inspecciones a intervalos regulares sobre el funcionamiento de máquinas en un sistema y se registran los resultados. Cada máquina tiene tres estados posibles: funciona correctamente (B↔1), necesita reparaciones (R↔2) o no funciona definitivamente (M↔3). Una estadística basada en estos registros determinó la siguiente matriz P de probabilidad donde cada elemento $p_{i,j}$ (llamado probabilidad de transición) es la probabilidad que tiene cada máquina que se halle en el estado j en una observación dada, de hallarse en el estado i en la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Verificar que P es una matriz de probabilidad e interpretar correctamente cada uno de sus elementos.

Si P es una matriz de transición y V_k es el vector de estado en el período de observación k-ésimo, entonces V_{k+1} es el vector de estado en el siguiente período de observación y está dado por:

$$P \cdot V_{k-1} = V_k \text{ donde } k \in \mathbf{N} \text{ y } V_0 \text{ es el estado inicial.}$$

b) Si V_0, siendo $(V_0)^T = (0{,}5\ 0{,}4\ 0{,}1)$, representa el estado actual del funcionamiento de las máquinas determinado en una inspección, hallar el estado V_1 en que se encontrará en la próxima inspección. ¿Y en la siguiente, V_2? ¿Y a largo plazo?

A2 Formas Cuadráticas – Expresión matricial

Las ecuaciones de segundo orden tienen diferentes expresiones matriciales para indicar la misma relación.

Hallar la matriz simétrica A que hace equivalente las ecuaciones dadas con la correspondiente relación matricial, según se detalla en el siguiente cuadro.

	ecuación	expresión matricial	X^T
a	$x^2+4y^2-3=0$	$X^T\cdot A\cdot X=0$	$(x \quad y \quad 1)$
b	$x^2+4y^2-3=0$	$X^T\cdot A\cdot X=3$	$(x \quad y)$
c	$x^2+4y^2-2xy-3=0$	$X^T\cdot A\cdot X=0$	$(x \quad y \quad 1)$
d	$x^2+4y^2-2xy-3=0$	$X^T\cdot A\cdot X=3$	$(x \quad y)$
e	$x^2+2y^2-3z^2+2xy-10=0$	$X^T\cdot A\cdot X=0$	$(x \quad y \quad z \quad 1)$
f	$x^2+2y^2-3z^2+2xy-10=0$	$X^T\cdot A\cdot X=10$	$(x \quad y \quad z)$
g	$x^2+2y^2-3z^2+2xy-6xz-8yz-10=0$	$X^T\cdot A\cdot X=0$	$(x \quad y \quad z \quad 1)$
h	$x^2+2y^2-3z^2+2xy-6xz-8yz-10=0$	$X^T\cdot A\cdot X=10$	$(x \quad y \quad z)$
i	$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=g$	$X^T\cdot A\cdot X=0$	$(x \quad y \quad z \quad 1)$
j	$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=g$	$X^T\cdot A\cdot X=g$	$(x \quad y \quad z)$

A3 Matrices elementales

Una matriz de orden n se denomina matriz elemental si la misma se puede obtener efectuando una sola operación elemental en las líneas (vertical u horizontal) de la matriz identidad del mismo orden (multiplicar una línea por una constante no nula; intercambiar dos líneas paralelas entre sí de lugar; sumarle a una línea una línea paralela diferente multiplicada previamente por una constante). En general operaremos con matrices elementales que efectúan operaciones por filas, salvo que se diga lo contrario.

a) Dadas las siguientes matrices elementales, identificar las operaciones con que se obtuvieron.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\8&1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&1&5\\2&-7&-1\\3&4&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\2&-7&3\end{pmatrix}$.

Encontrar las matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que:

$$E_1A=B\,,\ E_2B=A\,,\ E_3A=C \text{ y } E_4C=A\,.$$

c) La matriz F es tal que $FB=C$, con B y C definidas en el ítem b. Dar una expresión de F como combinación de operaciones entre todas o algunas de las matrices elementales del ítem b). Justificar la respuesta con una presentación adecuada pero no realizar los cálculos numéricos correspondientes.

d) Conclusión general. Si una matriz elemental E opera por filas, ¿cuál es el efecto que produce multiplicar a una matriz A por la izquierda por la matriz E?

e) Si una operación elemental en las filas se ejecuta en una matriz elemental I para obtener una matriz elemental E, entonces existe una segunda operación en las filas que, al ser efectuada en E, produce nuevamente I. Con este criterio completar la siguiente tabla.

Operaciones en las filas de I que producen E	Operaciones en las filas de E que reproducen I
Multiplicar la fila i por $c\neq 0$	
Intercambiar las filas i y j	
Sumar la fila i multiplicada por c a la fila j	

Las operaciones en la columna derecha de la tabla se denominan **operaciones inversas** de las operaciones correspondientes en la columna derecha.

f) Si A es una matriz de orden n inversible, entonces A se puede expresar como un producto de matrices elementales. Esto permite determinar un método para calcular la matriz inversa de A. Para ello es necesario encontrar una sucesión de operaciones elementales en las filas que reduzca A a la matriz identidad I y luego efectuar esta misma sucesión de operaciones en I para obtener A^{-1}. Esto se representa simbólicamente para una matriz inversible A:

$$\text{Si } E_k \cdots E_2 E_1 A = I \Rightarrow A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 \wedge A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

i. Encontrar las matrices E_1 y E_2 tales que $E_2 E_1 A = I$

ii. Escribir A^{-1} como producto de dos matrices elementales.

iii. Escribir A como un producto de dos matrices elementales.

g) Con el procedimiento descrito en el ítem **f**, encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.