Álgebra y Geometría Analítica

Clase 28: Matriz asociada a una TL

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Unidad 5 – Clase 28

01 Breve Repaso de la clase anterior

02 Representación Matricial de una TL

03 Ejercicios de la guía

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES

Definición:

Una Transformación entre dos espacios vectoriales es una función que a cada elemento del primer EV le hace corresponder un elemento del segundo EV.

Características:

$f: V \to W$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V, \forall \vec{y} \in V : \vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$.

$f: V \to W$ es Subyectiva $\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in W : \exists \vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{y}$

$f: V \to W$ es biyectiva $\Leftrightarrow \forall f$ es inyectiva y subyectiva .

Por ser función, tiene su dominio y su codominio, con la particularidad de que éstos son espacios vectoriales.

Ejemplos:

Traslación, Traza de una matriz.

Repaso de Clases Anteriores

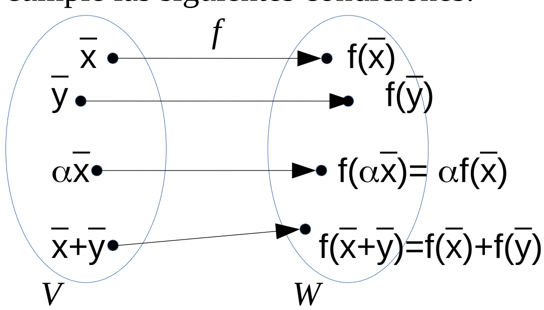
TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Definición:

Una Transformación $f: V \to W$ es TL si cumple las siguientes condiciones:

1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

2) $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$



Ambas condiciones pueden resumirse en: $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$

Generalizando: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{x}_i)$

CL de vectores de V

CL de vectores de W

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Propiedades:

1) $f(\vec{0_v})=\vec{0_w}$
2) $f(-\vec{x_v})=-f(\vec{x_v})$

Clasificación:

1) $f:V\to W$ es TL $\Rightarrow f$ es MORFISMO (Mantiene la forma ya que los escalares de la CL son los mismos).
2) Si f es inyectiva $\Rightarrow f$ es MONOMORFISMO.
   Si f es monomorfismo $\Rightarrow Nu(f)=\{\vec{0_v}\}$
3) Si f es subyectiva $\Rightarrow f$ es EPIMORFISMO.
   Si f es epimorfismo $\Rightarrow \operatorname{Im}(f)\equiv W$
4) Si $f:V\to V\wedge f$ es biyectiva $\Rightarrow f$ es ISOMORFISMO.
5) Si $f:V\to V\Rightarrow f$ es ENDOMORFISMO.
6) Si $f:V\to V\wedge f$ función biyectiva $\Rightarrow f$ es AUTOMORFISMO.

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Operaciones entre TL:

Dadas las siguientes transformaciones lineales: $f:V\to W\,,g:V\to W\,,h:W\to U$

1) SUMA: $(f+g):V\to W/\forall\,\vec{x}\in V:(f+g)(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x})$
2) DIFERENCIA: $(f-g):V\to W/\forall\,\vec{x}\in V:(f-g)(\vec{x})=f(\vec{x})-g(\vec{x})$
3) PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UNA TL: $\forall\,\vec{x}\in V\wedge\forall\,k\in\mathbb{R}:(kf)(\vec{x})=k\,f(\vec{x})$
4) COMPOSICIÓN: $h\circ f:V\to U/\forall\,\vec{x}\in V\,(h\circ f)(\vec{x})=h(f(\vec{x}))$
5) INVERSA: $f:V\to V\,,f$ es biyectiva $\Rightarrow\exists f^{-1}$(la TL inversa de f) / $\forall\,\vec{x}\in V$:
   $(f^{-1}\circ f)(\vec{x})=(f\circ f^{-1})(\vec{x})=\vec{x}$

Repaso de Clases Anteriores

TRANSFORMACIONES LINEALES (TL)

Núcleo de una TL:

$f : V \rightarrow W$

$Nu(f) = \{\vec{x} \in V \,/\, f(\vec{x}) = \vec{0}_w\}$

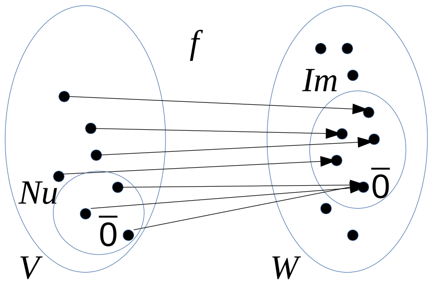


Imagen de una TL:

$f : V \rightarrow W$

$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in W \,/\, \exists \vec{x} \in V \,/\, f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

Teorema de la Dimensión:

Sea f: V → W una TL:

dim(Nu(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Definición:

Sea $f(\vec{x}) : V \rightarrow W$ una TL. La TL f puede expresarse matricialmente:

$\boxed{f(\vec{x}) = F\,.\,\vec{x}}$ donde F: es la matriz asociada a la TL f

Si: $f : V \rightarrow W$ con: $dim(V) = n \wedge dim(W) = m \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Es decir: la matriz F asociada a la TL f será de orden $m \times n$.

Si: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Si: $f : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^p \Rightarrow F \in \mathbb{R}^{p \times (n \times m)}$

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F utilizando las bases canónicas:

Cada columna de la matriz F asociada a la TL f está dada por los transformados de los vectores canónicos del primer espacio.

Es decir: la primer columna de F se obtiene tras aplicar *f* al primer vector de la base canónica. Luego se repite para la segunda columna. Se repite *n* veces (con *n*: dimensión del espacio de partida)

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F utilizando las bases canónicas: Ejemplo.

Sea: $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-3x_2+5x_4;x_1+x_2-2x_3-3x_4)$. Hallar F: la matriz asociada a f utilizando la base canonica de $\mathbb{R}^4$.

$B_{\mathbb{R}^4}=\{(1;0;0;0),(0;1;0;0),(0;0;1;0),(0;0;0;1)\}$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{F=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 5\\1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=F.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 5\\1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-3x_2+5x_4\\x_1+x_2-2x_3-3x_4\end{pmatrix}$$

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Cómo hallar F a partir de los transformados de una base del primer espacio (Teorema Fundamental de las TL: Extensión por linealidad)

Sea f: $R^n \rightarrow R^m$ pero no se conoce la expresión de *f*.
Se conoce B = $\{\bar{v}_1 ; \bar{v}_2 ; \dots \bar{v}_n\}$ una base de R^n.
Se conocen: $\bar{y}_i = f(\bar{v}_i)$ los transformados de la base B, con $\bar{y}_i \in R^m$.
La matriz *F* asociada a la TL puede hallarse como sigue:

- Hallamos los escalares α_i / la CL de B expresa a todo vector genérico del primer espacio ($\bar{x}$: vector genérico de R^n).
- Aplicando *f* miembro a miembro $\vec{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right)$ se obtiene $f: f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i)$
- Reemplazando: $f(\bar{v}_i) = \bar{y}_i$, se obtiene la TL y se puede presentar *F*: la matriz asociada a la TL.

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} ; f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} ; f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

1) Verificar que $B = \{(3;1;0)^T ; (1;0;1)^T ; (2;1;1)^T\}$ es LI $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = gen(B)$

$$det(B) = \begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{ B es LI}$$

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

2) Hallar los $\alpha_i/\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\vec{v}_1=\vec{x}$ $\qquad \alpha_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&1&2&|\;x_1\\1&0&1&|\;x_2\\0&1&1&|\;x_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&|\;x_1-3x_2\\1&0&1&|\;x_2\\0&1&1&|\;x_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&-2&|\;x_1-3x_2-x_3\\1&0&1&|\;x_2\\0&1&1&|\;x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&|\;-\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\1&0&1&|\;x_2\\0&1&1&|\;x_3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1&|\;-\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\1&0&0&|\;\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\0&1&0&|\;\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\\alpha_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\\alpha_3=\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

3) Con los α_i armamos la CL igualada al vector genérico: $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\vec{v}_1=\vec{x}$

$$\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

4) Aplico f a ambos miembros

$$f\left[\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ sabiendo que: $\boxed{f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}; \boxed{f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}; \boxed{f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}}$

Por 1er condición de linealidad:

$$f\left[\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right]+f\left[\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]+f\left[\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Por 2da condición de linealidad:

$$\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Por Hipótesis:

$$\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{-1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right).\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Representación Matricial de TL

MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

Ejemplo: Hallar $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ sabiendo que: $f\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}; f\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

Multiplicando los escalares α_i por los vectores:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\ \frac{-1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}x_1-\frac{9}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2x_1+6x_2+2x_3\\ x_1-3x_2-x_3\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+3x_3\\ \frac{1}{2}x_1-\frac{5}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&3\\ \frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}}_{F}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$$

Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

1) Nula: $f: V \to W / f(\vec{x}) = 0_w$

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Identidad: $f: V \to V / f(\vec{x}) = I_v . \vec{x} = \vec{x}$

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

3) Contracción / estiramiento: $f: V \to V / f(\vec{x}) = E\,\vec{x}$

En $\mathbb{R}^2, f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ b\,x_2 \end{pmatrix}$

Si a = b > 1: estiramiento uniforme.
Si a = b y |a| < 1: contracción uniforme.
Si a ≠ 1: contracción / estiramiento en el eje x.
Si b ≠ 1: contracción / estiramiento en el eje y.

Nota:
Si se desea aplicar la misma TL a un conjunto de vectores, es posible hacerlo en una única operación.
Esto se logra multiplicando a la matriz de la transformación por una matriz que en sus columnas contenga a cada uno de los vectores.
Resulta en otra matriz donde los vectores transformados se presentan en las columnas.

Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

4) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Proyecciones ortogonales sobre los ejes:

a. Sobre eje x:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Sobre eje y:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c. Sobre eje z:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Proyecciones ortogonales sobre los planos coordenados:

a. Sobre plano xy:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Sobre plano yz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c. Sobre plano xz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

6) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Reflexiones respecto a los ejes:

a. respecto al eje x:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b. respecto al eje y:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c. respecto al eje z:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

7) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Reflexiones respecto de los planos coordenados:

a. Respecto al plano xy:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b. Respecto al plano yz:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c. Respecto al plano xz:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

8) Proyección ortogonal sobre un subespacio:

$f:V \to W / f(\vec{x})$ con $B_s=\{\vec{w}_1;\vec{w}_2;\ldots;\vec{w}_n\}$ base ortogonal de S.

$$f(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle \vec{x};\vec{w}_i\rangle}{\langle \vec{w}_i;\vec{w}_i\rangle}\vec{w}_i$$

9) Cizallante:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x;y)=(x+\alpha y;y)$ (de factor α en la dirección del eje x)

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x;y)=(x;y+\beta x)$ (de factor β en la dirección del eje y)

10) Rotación en el plano de ángulo α en sentido anti-horario:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -sen\,\alpha\\ sen\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

11) Rotación en el espacio de ángulo α en sentido anti-horario alrededor de un eje :

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

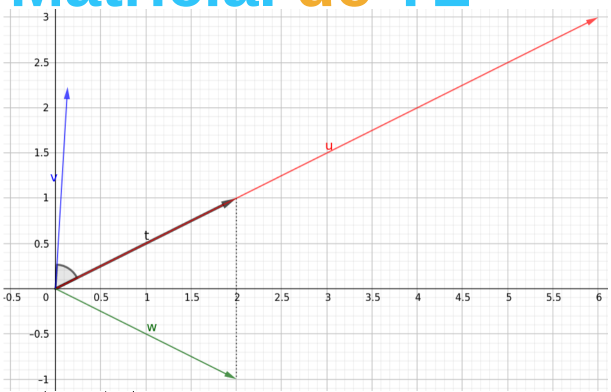
a) Alrededor de eje x: $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

b) Alrededor de eje y: $R=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) Alrededor de eje z: $R=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES



Ejemplo: Sea $\vec{t}=(2;1)$

a) Estirar el vector homogeneamente al triple.

b) Rotarlo $\frac{\pi}{3}$ en sentido antihorario.

c) Reflejarlo respecto del eje x

a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}=\vec{u}$

b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\vec{v}$

c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\vec{w}$

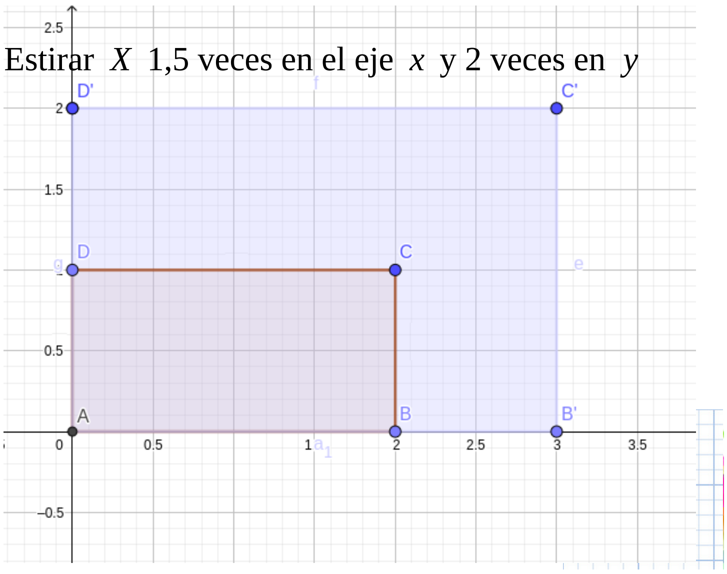
Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

Ejemplo:

Sea $X=\left\{\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Estirar X 1,5 veces en el eje x y 2 veces en y

$$E\,X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$



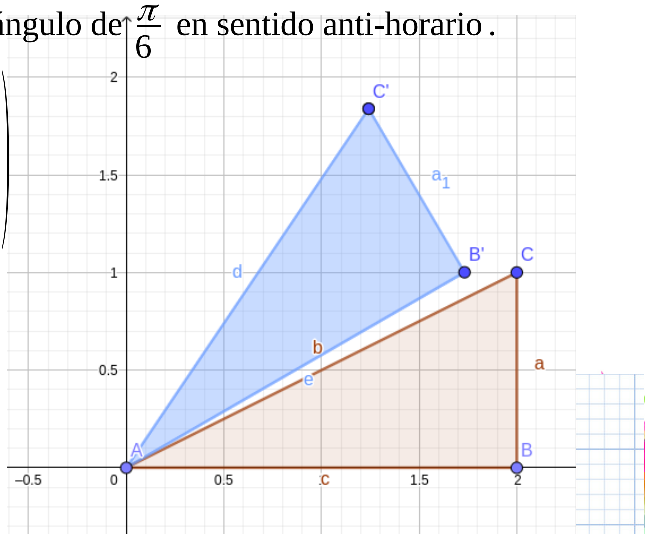
Representación Matricial de TL

ALGUNAS TL PARTICULARES

Ejemplo:

Sea $X=\left\{\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$. Rotar X un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ en sentido anti-horario.

$$R\,X=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}-\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$



Ejercicios de la Guía

Ejercicio 3: Hallar la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales considerando las bases canónicas.

1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2)=(x_1+x_2, 2x_1+2x_2)$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ F=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$$

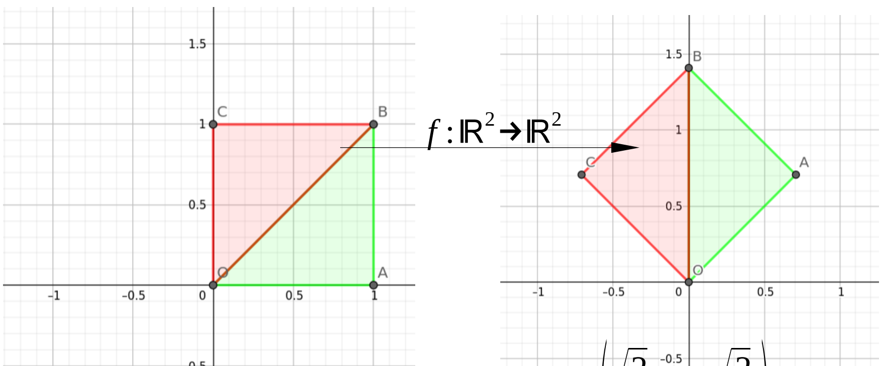
2) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1+x_2-3x_4; 2x_1-2x_3+x_4)$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ F=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4: Dada la región D, identificar la TL que modifica D a f(D)

Caso 4:



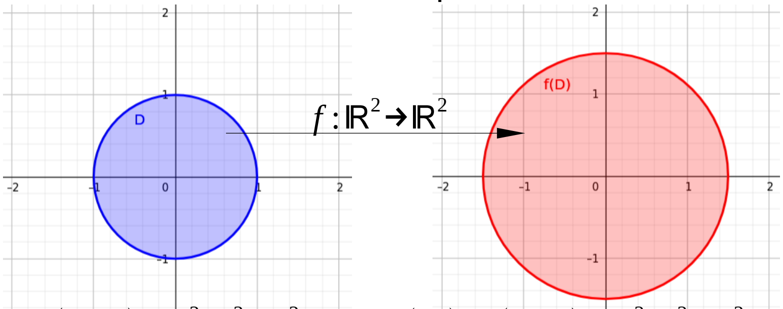
$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -sen\frac{\pi}{4}\\ sen\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Rotación de D en un ángulo de $\frac{\pi}{4}$

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4: Proponer en cada caso una TL que informe la región indicada en el espacio vectorial de la derecha en el de la izquierda

Caso I)



$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad f(D) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2{,}25\}$

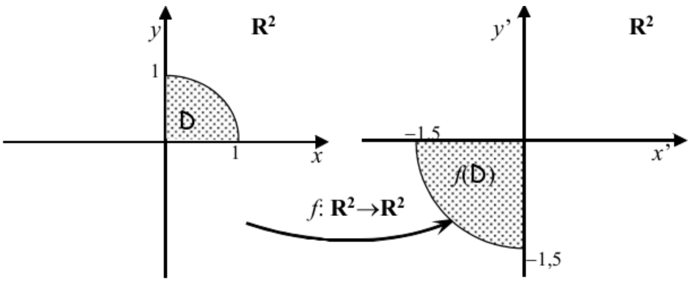
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(Estiramiento o escalado uniforme de factor 1,5)

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4: Proponer en cada caso una TL que informe la región indicada en el espacio vectorial de la derecha en el de la izquierda

Caso II)



$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ $\quad f(D) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1{,}5 \wedge x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$

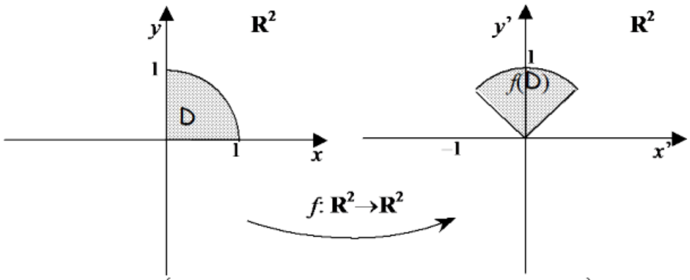
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 0 \\ 0 & -1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(Estiramiento o escalado uniforme de factor –1,5
o bien escalado uniforme y simetría central)

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4: Proponer en cada caso una TL que informe la región indicada en el espacio vectorial de la derecha en el de la izquierda

Caso IV)



$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

$$f(D) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -\sqrt{2}/2 \leq x \leq \sqrt{2}/2 \wedge y \geq |x|\}$$

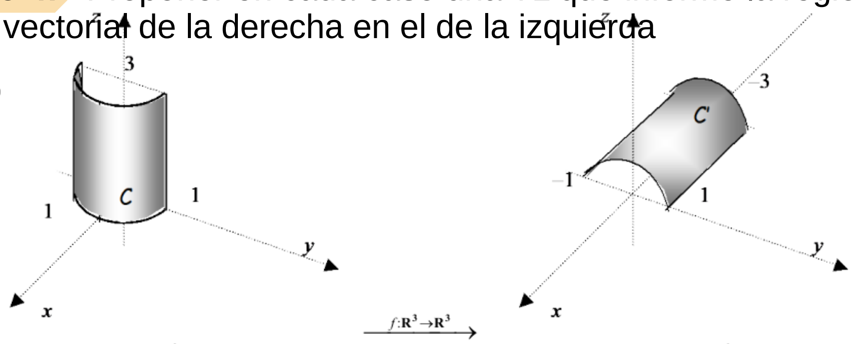
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -sen\frac{\pi}{4} \\ sen\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(Rotación en sentido antihorario de π/4)

Ejercicios de la Guía

Ejercicio 4: Proponer en cada caso una TL que informe la región indicada en el espacio vectorial de la derecha en el de la izquierda

Caso VI)



$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\}$$

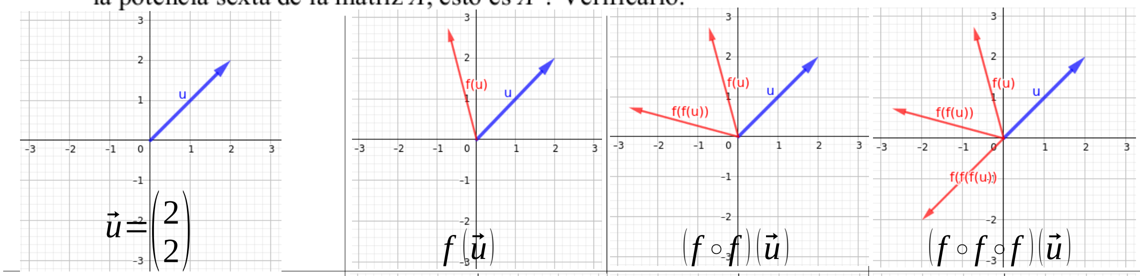
$$f(C) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y^2 + z^2 = 1 \wedge z \leq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge -3 \leq x \leq 0\}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & 0 & sen\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Rotación en sentido antihorario de π/2)

Ejercicios de la Guía

11.5) Sea f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotación en el plano en un ángulo $\theta = \pi/3$ y sea A su matriz asociada. Si f se compone con sí misma 6 veces, esto es $f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f$, ¿cuál será la transformación resultante? (no realizar los cálculos, sino pensarlo en términos de acciones). ¿Qué indica esto para la potencia sexta de la matriz A, esto es A^6? Verificarlo.



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$